

الأستاذ: شبحي إسماعيل

مسائل محلولة

في الكهرباء

للجنة الأولى جامعي

ديوان المطبوعات الجامعية

الطبعة الثانية



ديوان المطبوعات الجامعية

القسم الأول

الكهرباء الساكنة



ديوان المطبوعات الجامعية

الفصل الأول

الأثر الكهربائي القوى الكهربائية



ديوان المطبوعات الجامعية

التمرين 1 :

عين عدد الذرات والإلكترونات التي تكون قطعة نحاس متعادلة كهربائياً، كتلتها 3g. لنشحن هذه القطعة بشحنة موجبة مقدارها $5.10^{-9}C$. عيّن عدد الإلكترونات التي افتقدتها هذه القطعة، ثم قارنه بعدد الذرات وعدد الإلكترونات المكونة لهذه القطعة.

العدد الذري للنحاس $Z=29$ ، والوزن الذري له 63,55g، و الشحنة الإلكترونية $e=-1,6.10^{-19}C$

التمرين 2 :

تحمل كرتان ناقلتان متماثلتان شحنتين q_1 و q_2 ، نلامسهما ببعضهما ثم نفصلهما. أحسب قيمتي الشحنتين q_1' و q_2' اللتين تأخذهما الكرتان بعد التلامس، في الحالات التالية:

أ- $q_1=1,3.10^{-8}C$ و $q_2=0$.

ب- $q_1=3.10^{-8}C$ و $q_2=8.10^{-8}C$.

ج- $q_1=3.10^{-8}C$ و $q_2=-8.10^{-8}C$.

التمرين 3 :

بافتراض أن إلكترون ذرة الهيدروجين H_1^I يدور حول نواتها في مدار نصف قطره 0.53\AA . ما مقدار القوة الكهربائية التي يتعرض لها من قبل النواة؟ هل هي قوة تنافر أم تجاذب؟ أحسب قوة التجاذب الكتلي بينهما؛ ثم قارنها بالقوة الكهربائية. أحسب التسارع الناظمي لحركة هذا الإلكترون حول نواة ذرته، والسرعة الزاوية التي يدور بها.

التمرين 4 :

تؤثر شحنتان إحداهما عن الأخرى عندما تكونان على مسافة $r_1=11\text{cm}$ من بعضهما في الخلاء، بالقوة نفسها التي تؤثران بها عن بعضهما عندما تكونان على مسافة $r_2=7,4\text{cm}$ من بعضهما في وسط عازل. أوجد النفاذية الكهربائية النسبية ϵ_r لهذا الوسط.

التمرين 5 :

عُلقت كرتان متماثلتان نصفًا قطريهما 1cm ، وكتلة كل منهما $9,81\text{g}$ ، في نقطة واحدة، بخيطين طول كل منهما 19cm . شُحنت الكرتان بشحنتين متساويتين ومن نوع واحد، فانفرج الخيطان وشكلا فيما بينهما زاوية قائمة. أحسب:

أ- قيمة كل من الشحنتين.

ب- تؤثر كل من الخيطين.

التمرين 6 :

ملئ بالونان متماثلان بالهليوم ثم رُبطا بخيطين متماثلين، طول كل منهما 1m . في النهاية الحرة المشتركة للخيطين عُلقت كتلة مقدارها 5g ، ثم تُركت لتسبح في اتزان. شُحن كل بالون بشحنة q ، فابتعد البالونان عن بعضهما مسافة 60cm . ما مقدار هذه الشحنة؟

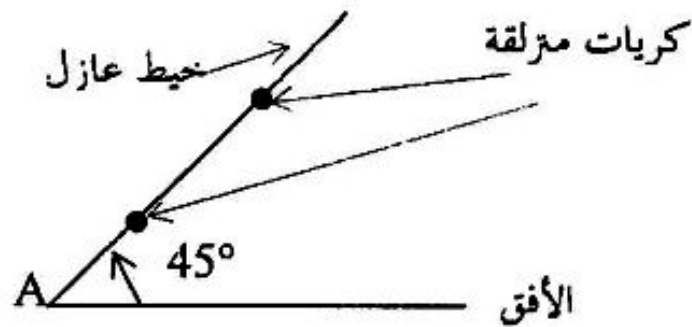
التمرين 7 :

تقع غند رؤوس مربع طول ضلعه a أربع شحنتات متساوية ومتماثلة، قيمة كل منها q . ما قيمة الشحنة q_0 ذات الإشارة المخالفة التي ينبغي وضعها عند مركز المربع، كي تنعدم محصلة القوى المؤثرة على كل من الشحنتات؟

*** أعد المسألة إذا كانت الشحنات موضوعة عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين 8 :

كريتا البلاستيك الصغيرتان المبيتان في الشكل المقابل مرتبتان بحيث يمكنهما الإنزلاق بحرية على طول خيط عازل.



أعطيت الكريتان شحنات متماثلة ومتساوية؛ بعد ذلك وُجدت الكرية السفلى عند النقطة A، بينما وُجدت الأخرى على بُعد 5cm منها. أوجد قيمة الشحنة إذا كانت كتلة كل من الكريتين 0,08g.

التمرين 9 :

تقع شحنتان موجبتان q_1 و q_2 عند نقطتين شعاعاً موضعيهما r_1 و r_2 على الترتيب. أوجد قيمة الشحنة السالبة q_3 وشعاع موضع النقطة التي ينبغي وضعها عندها، بحيث تكون القوة المؤثرة على كل من هذه الشحنات الثلاث معدومة.

التمرين 10 :

أدرس استقرارية توازن شحنة نقطية واقعة في منتصف المسافة الفاصلة بين شحنتين نقطيتين متساويتين:

أ- لهما نوع الشحنة الأولى.

ب- معاكستين لنوع الشحنة الأولى.

التمرين 11 :

شحنة نقطية مقدارها $1nC$ ، موضوعة عند نقطة الأصل.

أ- أوجد العبارة الشعاعية للقوة المؤثرة على شحنة مقدارها $1C$ ، وشعاع موضعها $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

ب- أوجد في المستوي $z=0$ ، أي المستوي xoy ، معادلة المنحنى الذي تتعرض الشحنة $1C$ في جميع نقاطه للمقدار نفسه من القوة $1N$. ماذا تشكل هذه النقاط في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة؟

التمرين 12 :

شحنة Q موضوعة عند النقطة $P(a,b,c)$. إذا وضعت شحنة q عند نقطة الأصل، تكون القوة عليها في اتجاه متجه الوحدة $\vec{e}_1 = 0,5\vec{i} - 0,5\sqrt{3}\vec{j}$ ، وإذا وضعت عند الموضع $A(1,0,0)$ تكون القوة عليها في اتجاه متجه الوحدة $\vec{e}_2 = 0,6\vec{i} - 0,8\vec{j}$. أوجد شعاع موضع النقطة P .

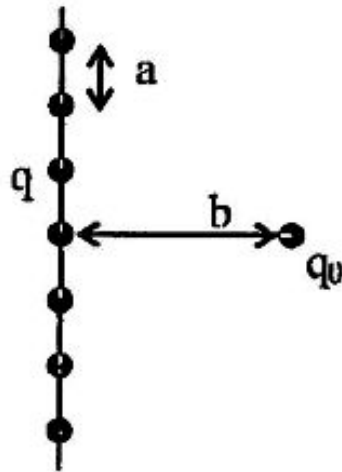
التمرين 13 :

أحسب القوة المؤثرة على الشحنة q_1 ، جرّاء الشحنتين q_2 و q_3 ، إذا علمت أن حامل الشحنتين q_1 و q_2 يشكل زاوية θ مع حامل الشحنتين q_1 و q_3 .

$$q_1 = -1,6\mu C ; q_2 = 3\mu C ; q_3 = -2\mu C ; \quad \text{ت.ع:}$$

$$r_{12} = 5cm ; r_{13} = 10cm ; \theta = 60^\circ$$

التمرين 14 :



سبع شحنات متماثلة q ، موضوعة على امتداد واحد، والمسافة بين كل اثنتين متتاليتين منها a ، أوجد القوة التي تتعرض لها شحنة q_0 موضوعة كما بالشكل، وتبعد مسافة b عن حامل بقية الشحنات.

التمرين 15 :

خيط مستقيم لانهائي الطول موضوع على امتداد المحور OZ ، مشحون بانتظام بكثافة شحنة طولية ثابتة وموجبة λ . أوجد القوة التي يتعرض لها جسيم مشحون بشحنة q_0 وموضوع عند النقطة $(0, y_0, 0)$.



ديوان المطبوعات الجامعية



ديوان المطبوعات الجامعية

حلول الفصل الأول

الأثر الكهربائي القوى الكهربائية

التمرين 1:

يوجد في كل مول واحد من أي عنصر كيميائي عدد آفوقادر N من الذرات. كتلة المول الواحد من النحاس 63,55g، إذا:

$$\left. \begin{array}{l} 63,55g \rightarrow N \\ 3g \rightarrow \rightarrow \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{3 \times N}{63,55} = \frac{3 \times 6,023 \cdot 10^{23}}{63,55} \approx 2,84 \cdot 10^{22} \text{ atoms}$$

نقول عن ذرة أنها متعادلة كهربائياً إذا كان المجموع الجبري لشحنتها الموجبة والسالبة معدوماً. كل ذرة نحاس متعادلة كهربائياً بها 29 إلكترونات، لذا فالعدد الكلي للإلكترونات في 3g من النحاس يكون:

$$29 \times 2,84 \cdot 10^{22} \approx 8,24 \cdot 10^{23} \text{ electrons}$$

عندما نقول: نشحن هذه القطعة بشحنة موجبة، فإننا في الحقيقة نزع منها إلكترونات، ولما كانت الإلكترونات سالبة الشحنة، فإن الشحنة الكلية للقطعة ستكون موجبة.

في حالتنا هذه تكون الشحنة الكلية المقتدة $-5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ ، بالتالي فعدد الإلكترونات المقتدة يكون: $-5 \cdot 10^{-9} / -1,6 \cdot 10^{-19} = 3,125 \cdot 10^{10} \text{ electrons}$

بمقارنة هذا العدد بعدد الذرات المكونة للقطعة نجد النسبة:

$$3,125 \cdot 10^{10} / 8,24 \cdot 10^{23} \approx 1,1 \cdot 10^{-12} = 1,1 \cdot 10^{-10} \%$$

وبمقارنته بعدد إلكتروناتها نجد النسبة:

$$3,125 \cdot 10^{10} / 2,24 \cdot 10^{21} \approx 1,4 \cdot 10^{-11} = 1,4 \cdot 10^{-11} \%$$

فهو ضعيف جدا مقارنة بما للقطعة من إلكترونات.

التمرين 2 :

قبل التلامس تحمل كل كرة شحنة مختلفة عن الأخرى؛ واما كانت الكتان ناقلتين، فإنه عند تلامسهما تتبادلان الشحنات فيما بينهما بحرية تامة، وتسعى الجملة المكونة من الكرتين المتلامستين إلى إحداث الإتزان الكهروستاتيكي، أي يتوقف تبادل الشحنات؛ ولما كلنت الكرتان متماثلتين، فإن الشحنة الكلية ستتوزع عليهما بالتساوي، ويظل المجموع الجبري الكلي لشحنة جملة الكرتين ثابتا، قبل التلامس وبعده.

$$\textcircled{q_1} \quad \text{قبل التلامس} \quad \textcircled{q_2}$$

$$\textcircled{q'_1} \quad \text{بعد التلامس} \quad \textcircled{q'_2}$$

$$q'_1 = q'_2 = q$$

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2 = 2q \Rightarrow q = (q_1 + q_2)/2$$

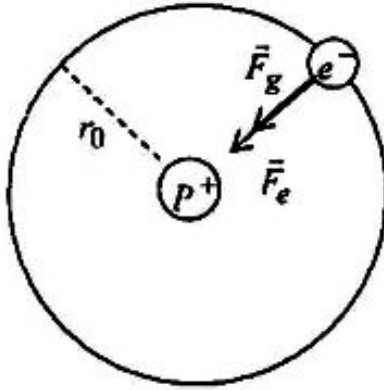
$$q_1 = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{C} ; q_2 = 0 \Rightarrow q'_1 = q'_2 = 6,5 \text{nC} \quad \text{ـا}$$

$$q_1 = 3 \cdot 10^{-8} \text{C} ; q_2 = 8 \cdot 10^{-8} \text{C} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = 55 \text{nC} \quad \text{ـب}$$

$$q_1 = 3 \cdot 10^{-8} \text{C} ; q_2 = -8 \cdot 10^{-8} \text{C} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = -25 \text{nC} \quad \text{ـج}$$

التمرين 3 :

يخضع الإلكترون في مداره إلى قوى كهربائية من قِبَل النواة. في ذرة نظير الهيدروجين H_1^1 ، تتكون النواة من بروتون موجب الشحنة؛ بالتالي فإنه حسب قانون كولوم:



$$F_e = K \frac{e|e|}{r_0^2} \approx -8,2 \cdot 10^{-8} N$$

حيث:

$$K = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2; e = -1,6 \cdot 10^{-19} C; r_0 = 0,53 A = 0,53 \cdot 10^{-10} m$$

تدل الإشارة السالبة على أن القوة قوة تجاذب.

- حسب قانون نيوتن للتجاذب العام، تكون قوة التجاذب الكتلي بين

$$\text{الإلكترون والنواة: } F_g = -G \frac{m_e m_p}{r_0^2} \approx -3,6 \cdot 10^{-47} N$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2/Kg^2; m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} Kg;$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} Kg$$

حيث:

$$\frac{F_g}{F_e} \approx 4,4 \cdot 10^{-40} = 4,4 \cdot 10^{-38} \% \quad \text{إذا:}$$

نلاحظ هنا الفرق الشاسع بين قيمتي القوة الكهربائية والقوة الثقالية؛ إذ أن قوى التفاعل الكهربائي أكبر بكثير من قوة التفاعل الثقالي، لذا من الممكن في مسائل التأثيرات المتبادلة بين الجسيمات المشحونة كهربائياً، إهمال قوى التجاذب الكتلي بينها.

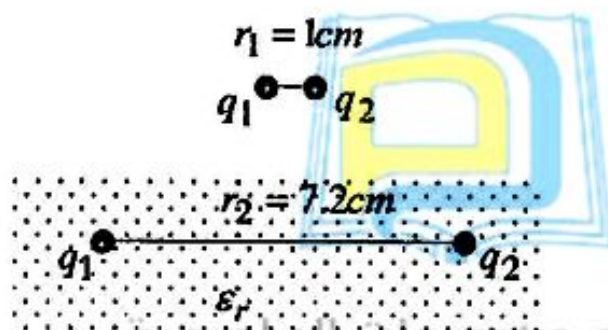
- حسب نموذج بوهر الذري، فإن الإلكترون يظل متحركا في مداره الثابت بسبب تساوي قوة التجاذب الكهربائي بينه وبين النواة، وقوة الطرد المركزي، أي: $F_e = m_e a_N = m_e \frac{v^2}{r_0}$ حيث a_N التسارع الناطمي.

$$\begin{aligned} \therefore a_N &= \frac{F_e}{m_e} \cong 9.10^{22} \text{ m/s}^2 \\ &= \frac{v^2}{r_0} \Rightarrow v = \sqrt{r_0 a_N} \cong 2.18.10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\omega^2 r_0 = a_N \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_N}{r_0}} \cong 4.12.10^{16} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{4.12.10^{16}}{2\pi} \cong 6.56.10^{15} \text{ cycles/sec} \quad \text{وبالدورات في الثانية:}$$

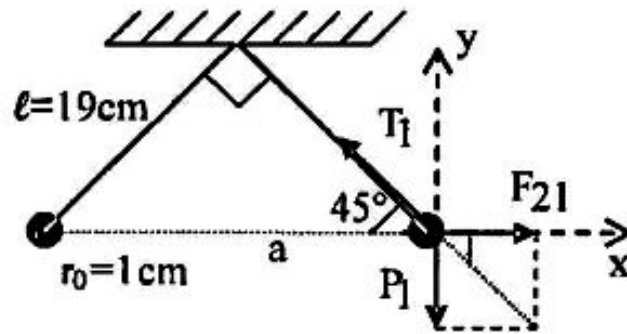
التمرين 4 :



$$\left. \begin{aligned} F_{e1} &= Kq_1q_2/r_1^2 \\ F_{e2} &= Kq_1q_2/\epsilon_r r_2^2 \\ F_{e1} &= F_{e2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{\epsilon_r r_2^2} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{r_1^2}{r_2^2} \therefore \epsilon_r = (11/7.4)^2 \cong 2.21$$

التمرين 5 :

1. بعد الإتزان تكون الجملة كما بالشكل، حيث \vec{P}_1 ثقل الكرة، و \vec{F}_{21} القوة الكهربائية التي تؤثر بها الثانية على الأولى، و \vec{T}_1 توتر الخيط الحامل للكرة الأولى.



من شرط الإتزان يكون:

$$\sum_i \vec{F}_{i1} = \vec{0} \quad \therefore \vec{P}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحورين x و y يكون:

$$\left. \begin{array}{l} F_{21} - T_1 \cos \alpha = 0 \\ T_1 \sin \alpha - P_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{21} = T_1 \cos \alpha \\ T_1 = P_1 / \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow F_{21} = P_1 / \tan \alpha$$

ديوان المطبوعات الجامعية

$$\therefore F_{21} = mg / \tan \alpha = mg$$

حيث m كتلة كل كرة، و g التسارع الأرضي، و $\alpha = 45^\circ$: $\tan \alpha = 1$

لنرمز للمسافة بين مركزي الكرتين بـ a .

$$\therefore F_{21} = Kq_1q_2 / a^2 = mg \Rightarrow q = \sqrt{mga^2 / K} = a\sqrt{mg / K}$$

حسب الشكل فإن: $\cos \alpha = (a/2)/(l+r_0)$ ، حيث l طول الخيط،
و r_0 نصف قطر الكرة.

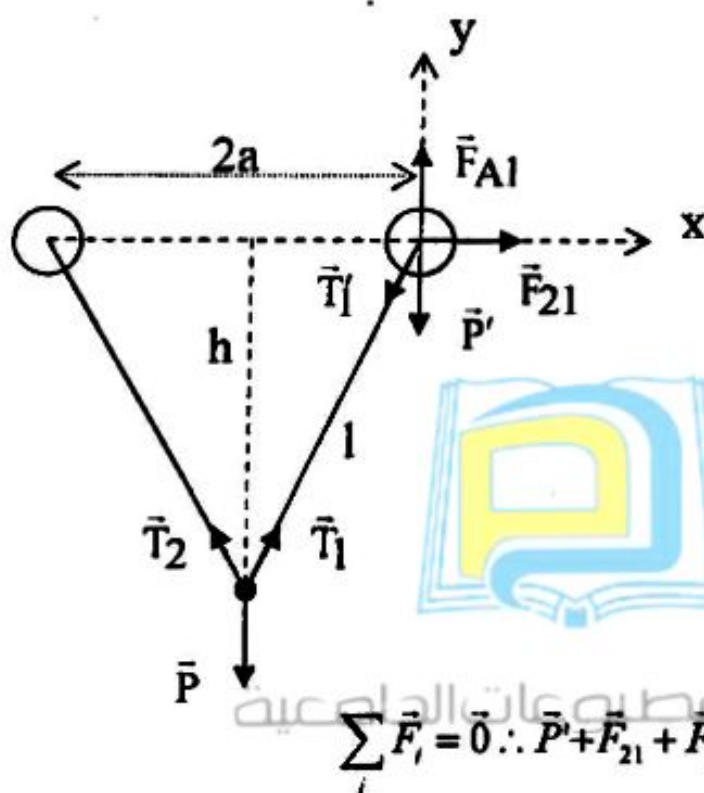
$$\therefore \sqrt{2}/2 = a/2(l+r_0) \Rightarrow a = \sqrt{2}(l+r_0) = \sqrt{2}(19+1) = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\therefore q = \sqrt{2}(l+r_0)\sqrt{mg/K} \cong \pm 92,49.10^{-8} \text{ C} = \pm 924,9 \text{ nC}$$

ب. توتر كل خيط:

$$\sin \alpha = P_1/T_1 \Rightarrow T_1 = P_1/\sin \alpha = mg/\sin \alpha \cong 0,1361 \text{ N}$$

التمرين 6 :



شرط اتزان البالون:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \therefore \vec{P}' + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{A1} + \vec{T}_1' = \vec{0} \dots \dots \dots (1)$$

حيث: \vec{P}' ثقل البالون، \vec{F}_{21} قوة التنافر الكهربائي التي يؤثر بها البالون الثاني على الأول، \vec{F}_{A1} دافعة أرخميدس، \vec{T}_1' توتر الخيط.

$$\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \dots \dots \dots (2) \quad \text{شرط اتزان الكتلة المعلقة:}$$

بإسقاط المعادلة (1) على المحور x يكون:

$$F_{21} - T_1' \cos(\pi/2 - \alpha) = 0 \dots \dots \dots (1')$$

وبإسقاط المعادلة (2) على المحور y يكون:

$$T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha - P = 0 \dots \dots \dots (2')$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_1' = \vec{0} \quad \text{شرط اتزان الخيط:}$$

$\vec{T}_1 = \vec{T}_1'$ و \vec{T}_2 محمولان على محور واحد، بالتالي فإن: $T_1 = T_1'$

وبالتماثل يكون: $T_1 = T_2$ ، إذا ، $T_1 = T_2 = T_1' = T$

$$\therefore \left. \begin{aligned} F_{21} - T \sin \alpha &= 0 \\ 2T \cos \alpha - P &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{21} &= T \sin \alpha \\ P &= 2T \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{F_{21}}{P} = \frac{\tan \alpha}{2} \Rightarrow F_{21} = \frac{1}{2} P \tan \alpha$$

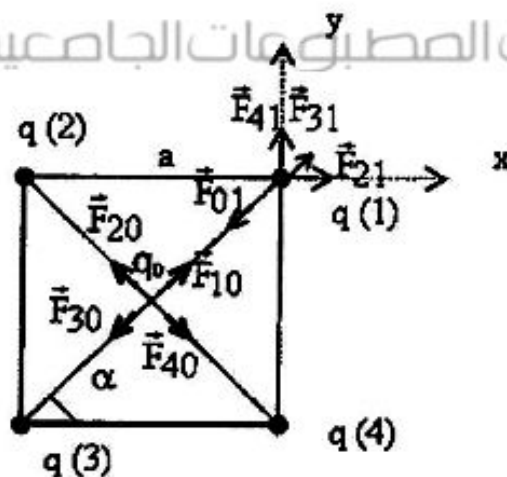
$$F_{21} = \frac{Kqq}{(2a)^2} = \frac{1}{2} mg \frac{a}{h} : a^2 + h^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - a^2}$$

$$\therefore \frac{Kq^2}{4a^2} = \frac{mga}{2\sqrt{l^2 - a^2}} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{4a^2mga}{2K\sqrt{l^2 - a^2}}} = \sqrt{\frac{2a^3mg}{K\sqrt{l^2 - a^2}}}$$

$$a = 30cm ; m = 5g ; g = 9,81m/s^2 ; l = 1m \quad \therefore q \cong 568,69nC$$

التمرين 7 :

ديوان المطبوعات الجامعية



الشحن الموضوعة عند رؤوس المربع من نوع واحد، لذا فالقوى الكهربائية المتبادلة بينها قوى تنافر، ومخالفة لنوع الشحنة الموضوعة عند المركز، لذا فالقوى المتبادلة معها قوى تجاذب. وعليه يكون التمثيل الشعاعي لقوى التأثير الكهربائي كما بالشكل.

شحن الرؤوس متماثلة ومتساوية ولها الأبعاد نفسها عن بعضها وعن شحنة المركز، لذا تكفي دراسة إحداها، ولتكن الشحنة (1).

$$\sum_i \vec{F}_{i1} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = \vec{0} \quad \text{شرط اتزان الشحنة (1):}$$

بإسقاطها على المحور x يكون:

$$F_{21} + F_{31} \cos \alpha - F_{01} \cos \alpha = 0 \dots (1)$$

وبإسقاطها على المحور y يكون:

$$F_{41} + F_{31} \sin \alpha - F_{01} \sin \alpha = 0 \dots (2)$$

$$\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \vec{F}_{30} + \vec{F}_{40} = \vec{0} \quad \text{شرط اتزان شحنة المركز:}$$

$$\vec{F}_{20} = -\vec{F}_{40} \quad \text{و} \quad \vec{F}_{10} = -\vec{F}_{30}$$

فشرط اتزان شحنة المركز محقق مهما كانت قيمة q_0 .

نعوض في المعادلة (1) عن قيم F_{21} و F_{31} و F_{01} بما يساويها فيكون:

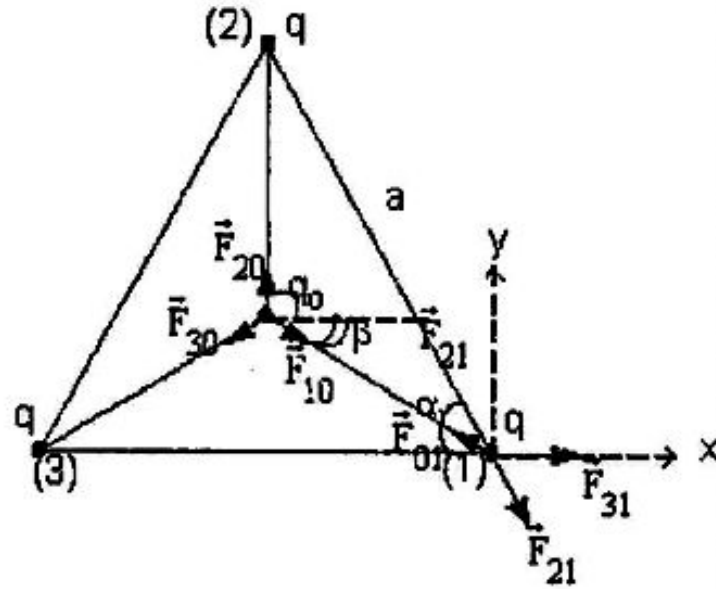
$$\frac{Kq^2}{a^2} + \frac{Kq^2}{b^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{Kqq_0}{(b/2)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 :$$

$$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2; \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} : \alpha = 45^\circ$$

q و q_0 مأخوذتان بقيمتيهما المطلقتين. بالاختصار يمكن كتابة:

$$q + \frac{\sqrt{2}}{4}q - \sqrt{2}q_0 = 0 \Rightarrow q_0 = \frac{4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}q$$

ولما كانت q_0 مخالفة لنوع q فإن: $q_0 = -\frac{4+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}q$



لأسباب نفسها، وبالمنطق نفسه يكون شرط اتزان الشحنة (1):

$$\vec{F}_{01} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{0}$$

بإسقاطها على المحور x يكون:

$$F_{31} + F_{21} \cos \alpha - F_{01} \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \dots \dots \dots (1')$$

وبإسقاطها على المحور y يكون:

$$F_{01} \sin \frac{\alpha}{2} - F_{21} \sin \alpha = 0 \dots \dots \dots (2')$$

$$\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \vec{F}_{30} = \vec{0} \quad \text{شرط اتزان شحنة المركز:}$$

$$F_{10} \cos \beta - F_{30} \cos \beta = 0 \quad \text{بإسقاطها على المحور x يكون:}$$

وهي محققة دوماً لأن: $F_{10} = F_{30} \dots\dots\dots (*)$

وبإسقاطها على المحور y يكون: $F_{20} - F_{10} \sin \beta - F_{30} \sin \beta = 0$

$$\beta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \therefore \sin \beta = 1/2$$

$$\left. \begin{array}{l} \therefore F_{20} - \frac{1}{2}F_{10} - \frac{1}{2}F_{30} = 0 \\ F_{10} = F_{30} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{20} - F_{10} = 0$$

وهي محققة دوماً لأن: $F_{20} = F_{10} \dots\dots\dots (**)$

من (*) و (**) فإن شرط اتزان شحنة q_0 محقق مهما كانت قيمتها.

بالتعويض عن F_{21} و F_{31} و F_{01} بما يساويها في المعادلة (1') يكون:

$$\frac{Kq^2}{a^2} + \frac{Kq^2}{a^2} \frac{1}{2} - \frac{Kqq_0}{(2b/3)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 : \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2}; \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \alpha = 60^\circ \\ b^2 + (a/2)^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2/4 \end{cases}$$

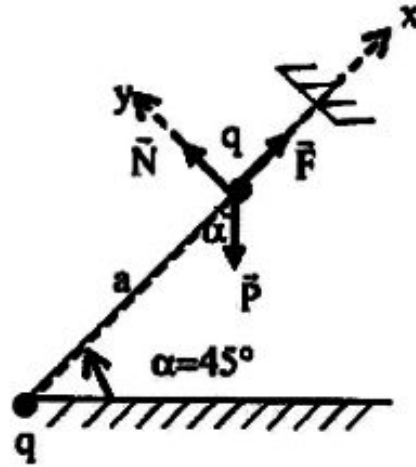
q و q_0 مأخوذتان بقيمتيهما المطلقتين. بالاختصار يمكن كتابة:

$$q + q/2 - 3\sqrt{3}q_0/2 = 0 \Rightarrow q_0 = q/\sqrt{3}$$

ولما كانت q_0 مخالفة لنوع q فإن: $q_0 = -q/\sqrt{3}$

التمرين 8 :

يمكن تمثيل حالة الاتزان بالشكل؛ حيث \vec{P} ثقل الكرة؛ و \vec{F} قوة التنافر بين الكرتين، و \vec{N} رد فعل الخيط على الكرة.



$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0}$$

شرط الإتزان:

$$F - P \cos \alpha = 0 \dots \dots (1)$$

على المحور x :

$$N - P \sin \alpha = 0 \dots \dots (2)$$

و على المحور y :

$$F = Kq^2 / a^2 , \quad P = mg$$

بالتعويض عن F و P في المعادلة (1) يكون:

$$Kq^2 / a^2 - mg \sqrt{2} / 2 = 0 \Rightarrow q = \sqrt{mg \sqrt{2} a^2 / 2K}$$

$$= a \sqrt{mg \sqrt{2} / 2K}$$

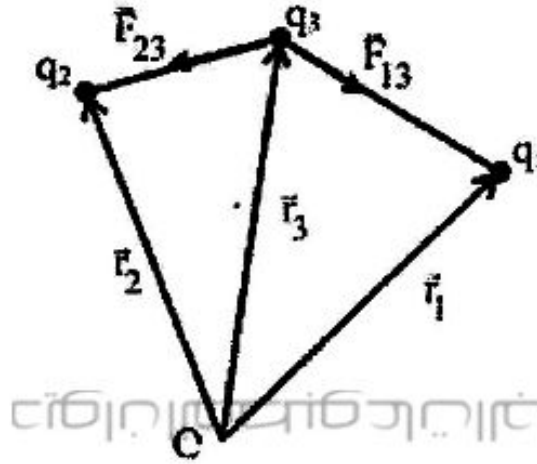
$$\therefore q \cong \pm 12,42 nC$$

بمقارنة المعادلتين (1) و (2)، وحيث $\alpha = 45^\circ$: $\cos \alpha = \sin \alpha$ فإن:

$$N = F = Kq^2 / a^2 \cong 5,55.10^{-4} N$$

التمرين 9 :

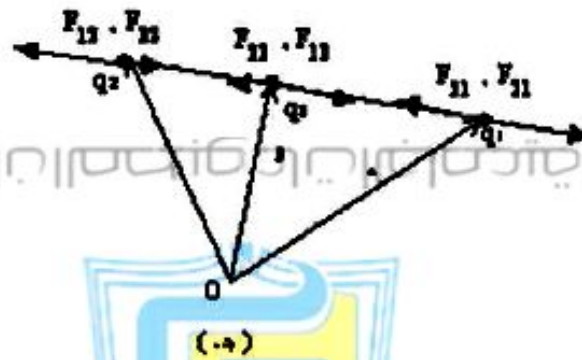
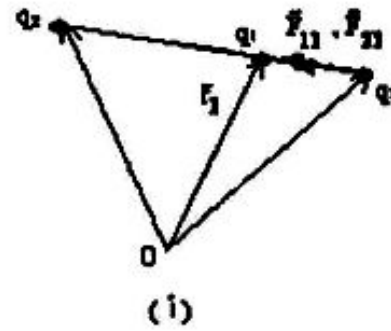
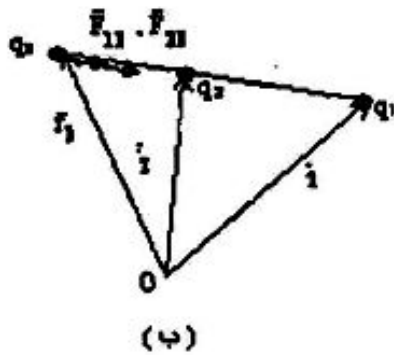
لنمثل المسألة كما بالشكل؛ \vec{r}_3 شعاع موضع الشحنة q_3 .



تخضع الشحنة q_3 إلى قوى جذب من الشحنتين q_1 و q_2 ، لأنها تختلف عنهما نوعاً.

لاتزان الشحنة q_3 يجب تحقق الشرط: $\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0}$

وحتى يتحقق هذا يجب أن تكون القوتان \vec{F}_{13} و \vec{F}_{23} متعاكستين مباشرة؛ أي أن: $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{23} \dots \dots \dots (1)$ أي لهما مقدار واحد و هما محمولان على حامل واحد؛ أي أن الشحنة q_3 يجب أن تكون شحولة على حامل الشحنتين q_1 و q_2 ، فلا يمكن أن تكون إذاً إلا عن يمينهما أو عن يسارهما أو بينهما، فإذا كانت عن يمينهما فإن القوتين \vec{F}_{13} و \vec{F}_{23} ستكونان في اتجاه واحد كما بالشكل (أ)، وهو يناقض الشرط (1)، وإذا كانت عن يسارهما، فإن القوتين ستكونان أيضاً في اتجاه واحد كما بالشكل (ب)، فلم تبق إذاً إلا حالة واحدة ممكنة، هي وقوع الشحنة q_3 بين الشحنتين q_1 و q_2 ، كما بالشكل (جـ).



$$F_{11} = F_{21}$$

$$\frac{Kq_1q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = \frac{Kq_2q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2}$$

شرط اتزان الشحنة q_3 :

q_1 و q_2 و q_3 مأخوذة بقيمتها المطلقة.

لنضع: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = a$ و $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = b$ ، إذاً: $|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| = b - a$

$$\therefore \frac{q_1}{a^2} = \frac{q_2}{(b-a)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{q_1}}{a} = \frac{\sqrt{q_2}}{b-a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{b\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \cdot |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

$$F_{31} = F_{21}$$

$$\frac{Kq_3q_1}{a^2} = \frac{Kq_2q_1}{b^2} \Rightarrow \frac{q_3}{a^2} = \frac{q_2}{b^2} \quad \text{شرط اتزان } q_1 :$$

$$q_3 = \frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2} \quad \text{بالتعويض عن } a \text{ بما يساويها نجد:}$$

و لما كانت إشارة q_3 مخالفة لإشارة q_1 و q_2 ، فإن :

$$q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}$$

$$F_{12} = F_{32} \quad \text{شرط اتزان الشحنة } q_2 :$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من شرط اتزان } q_1 \left\{ \begin{array}{l} F_{13} = F_{23} \\ F_{23} = F_{32} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{13} = F_{32} \\ \text{من شرط اتزان } q_2 \left\{ \begin{array}{l} F_{31} = F_{21} \\ F_{21} = F_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{31} = F_{12} \\ F_{13} = F_{31} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{12} = F_{32}$$

فباتزان الشحنتين q_1 و q_3 ، تكون الشحنة q_2 متزنة.

$$\vec{r}_3 + a\vec{u} = \vec{r}_1 \quad \text{شعاع موضع الشحنة } q_3 :$$

حيث \vec{u} شعاع الوحدة المتجه من موضع الشحنة q_2 إلى موضع الشحنة

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad q_1, \text{ ويمكن كتابته بالشكل:}$$

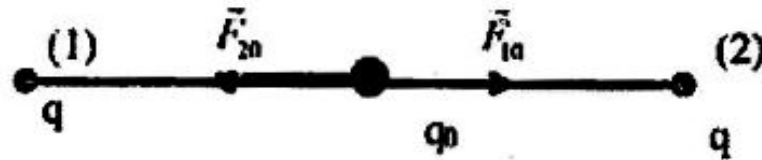
$$\therefore \vec{r}_3 = \vec{r}_1 - a\vec{u} = \vec{r}_1 - \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\therefore \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_2} \vec{r}_1 + \sqrt{q_1} \vec{r}_2}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$$

التمرين 10:

أ- q_0 لها نوع q :

تكون القوى كما بالشكل المقابل.



عند الإتزان يكون: $|\vec{F}_{10}| = |\vec{F}_{20}|$

لو أزيحت الشحنة q_0 قليلا عن وضع توازها يكون الشكل التالي:

$$|\vec{F}_{10}| > |\vec{F}_{20}|$$

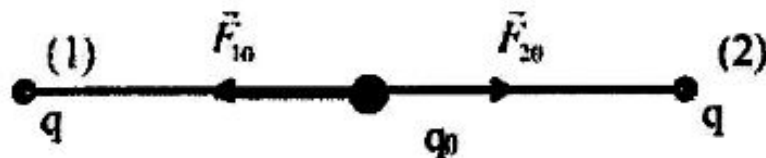


لذا فمحصلة القوى ستسعى إلى إبعادها عن الشحنة (1)؛ أي إلى إرجاعها نحو موضع الإتزان.

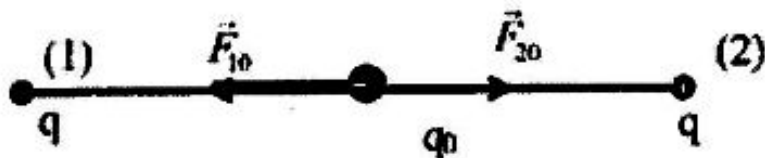
ويحدث الشيء نفسه لو أزيحت الشحنة q_0 جهة الشحنة (2). فالتوازن في هذه الحالة إذاً مستقر.

ب- q_0 لها نوع مخالف لنوع q :

$$|\vec{F}_{10}| = |\vec{F}_{20}| \quad \text{عند الإتزان يكون:}$$



لو أزيحت الشحنة q_0 قليلا عن موضع اتزانها ناحية الشحنة (1)، يكون الشكل التالي: $|\vec{F}_{10}| > |\vec{F}_{20}|$



لذا فمحصلة القوى ستسعى إلى جرّها نحو الشحنة (1)؛ أي إلى إبعادها عن موضع التوازن.

وبالمثل، لو أزيحت نحو الشحنة (2)، فستنجر نحوها. فالتوازن في هذه الحالة إذا، غير مستقر (قلق).

التمرين 11:



$$\vec{F} = K \frac{q_0 q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = 9 \frac{\vec{r}}{r} = \frac{9(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad .$$

$$|\vec{F}| = \frac{9}{r^2} = 1N \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \quad \text{ب-}$$

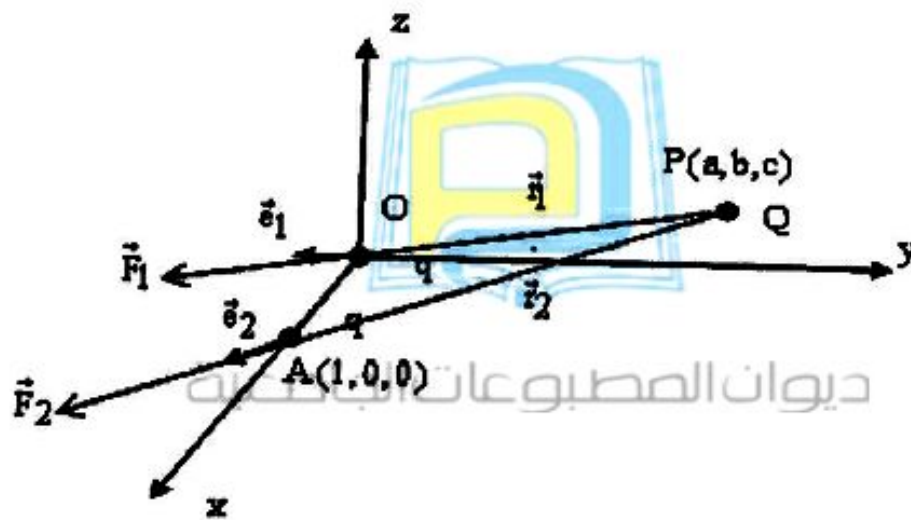
$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{أي:}$$

في المستوي الإحداثي $z=0$ أي (xoy) ، تكون المعادلة: $x^2 + y^2 = 9$ ، وهي معادلة محيط دائرة، مركزها مبدأ الإحداثيات (موضع الشحنة q_0)، ونصف قطرها 3م.

أما في الفضاء ذي الأبعاد الثلاثة، فإن المعادلة تشكل سطح كرة، مركزها مبدأ الإحداثيات، ونصف قطرها 3م، تكتب معادلتها كالتالي: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ أو $r=3m$.

التمرين 12:



$$\vec{F}_1 = \frac{KQq}{|\vec{PO}|^2} \cdot \frac{\vec{PO}}{|\vec{PO}|} = \frac{KQq}{|\vec{PO}|^3} \vec{PO} \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{\vec{PO}}{|\vec{PO}|}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{KQq}{|\vec{PA}|^2} \cdot \frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} = \frac{KQq}{|\vec{PA}|^3} \vec{PA} \Rightarrow \vec{e}_2 = \frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}$$

$$\overrightarrow{PO} = -(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \quad \therefore |\overrightarrow{PO}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\overrightarrow{PA} = -((a-1)\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \quad \therefore |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + c^2}$$

$$\therefore \vec{e}_1 = 0.5\vec{i} - 0.5\sqrt{3}\vec{j} = \frac{-(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\vec{e}_2 = 0.6\vec{i} - 0.8\vec{j} = \frac{-((a-1)\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2 + c^2}}$$

بمقارنة طرفي كل معادلة نجد: $c=0$ ، ونجد أيضا:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -0.5 \quad ; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.5\sqrt{3} ;$$

$$\frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}} = -0.6 \quad ; \quad \frac{b}{\sqrt{(a-1)^2 + b^2}} = 0.8$$

بقسمة المعادلتين الأوليين عن بعضهما، طرفا إلى طرف، نجد:

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبقسمة المعادلتين الثانيةين أيضا عن بعضهما، طرفا إلى طرف، نجد:

$$\frac{a-1}{b} = -\frac{0.6}{0.8} = -\frac{3}{4}$$

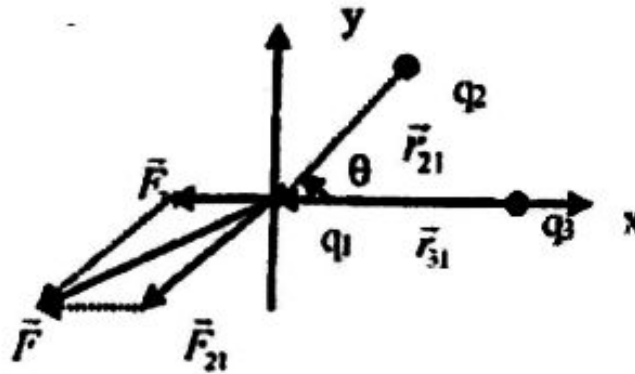
بعد حل المعادلتين الأخيرتين نجد:

$$a = \frac{4}{4-3\sqrt{3}} \quad ; \quad b = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{4-3\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}\vec{j} \quad \text{إذا فشعاع موضع النقطة } P \text{ هو:}$$

التمرين 13:

لتبسيط معالجة المسألة فإننا سننسبها إلى معلم إحداثيات كارتيزية ذي بعدين، (oxy) كما بالشكل.



$$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \frac{Kq_1q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} + \frac{Kq_3q_2}{r_{31}^3}\vec{r}_{21}$$

$$\vec{r} = -r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}), \quad \vec{r}_{31} = -r_{31}\vec{i}$$

بعد التعويض نجد:

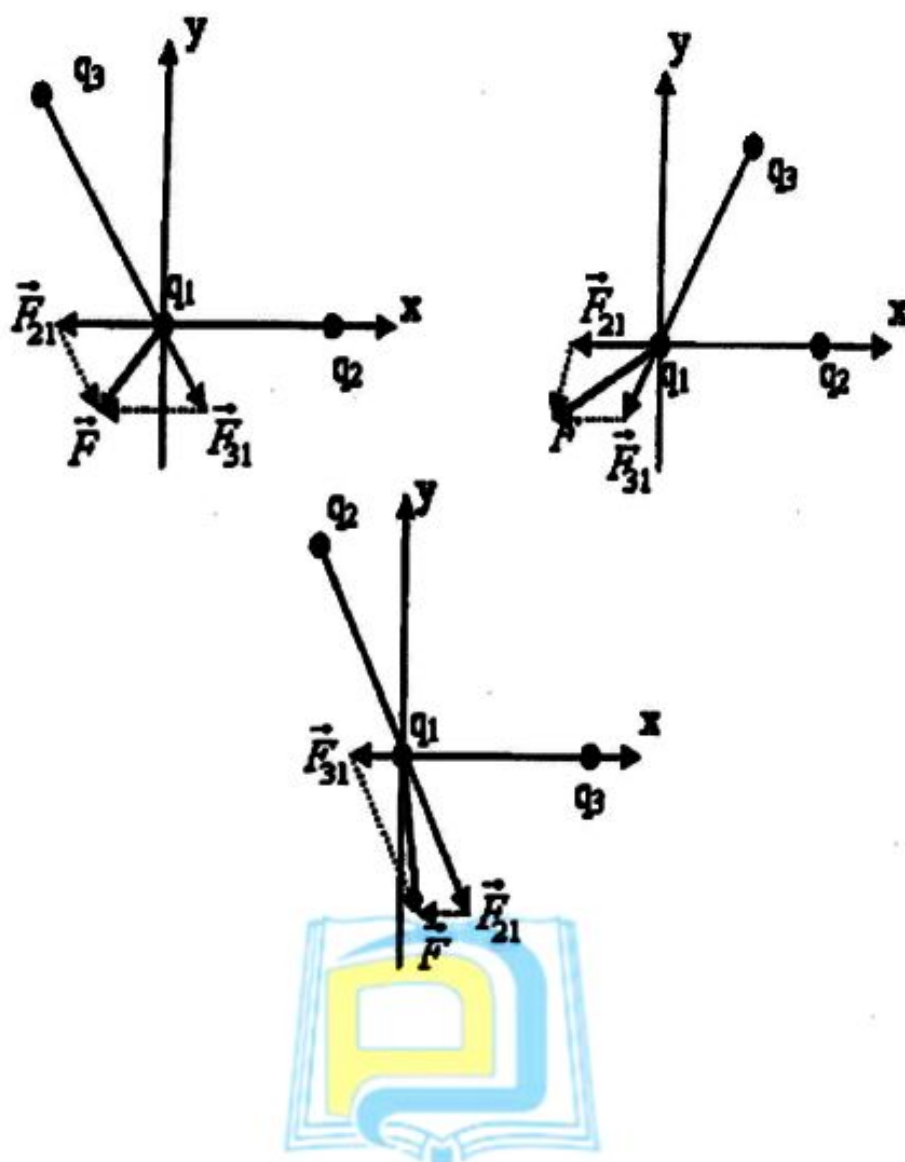
$$\vec{F} = -Kq\left(\frac{q}{r^2}\cos\theta + \frac{q}{r^2}\right)\vec{i} - \frac{Kqq}{r^2}\sin\theta\vec{j}$$

ديوان المطبوعات الجامعية

q_3, q_2, q_1 معبر عنها بقيمتها الجبرية.

$$\vec{F} \cong 5.76\vec{i} + 14.97\vec{j} \quad N \quad \text{تطبيق عددي:}$$

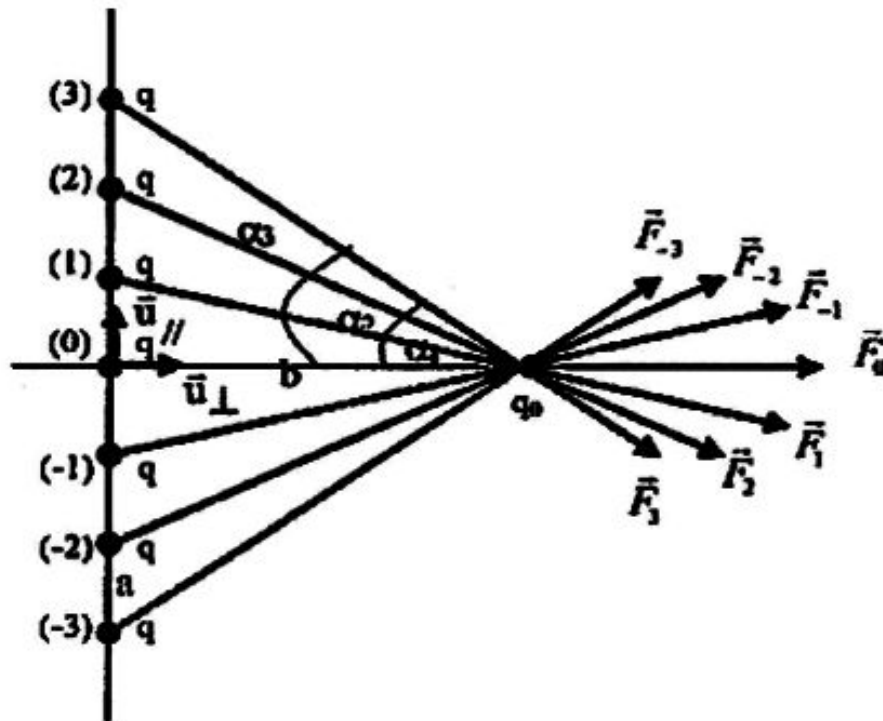
ملاحظة: يمكن أن تكون للشحنات وضعيات أخرى تحقق الوصف المذكور في نص المسألة، وبالتالي يُحصل على نتائج مختلفة.



ديوان المطبوعات الجامعية

التمرين 14:

لنعط للشحنات أدلة موضعية كما بالشكل.



\vec{F}_0 القوة التي تتعرض لها الشحنة q_0 من قبل الشحنة q ذات الدليل الموضعي (0).

\vec{F}_1 القوة التي تتعرض لها الشحنة q_0 من قبل الشحنة q ذات الدليل الموضعي (1).

\vec{F}_{-1} القوة التي تتعرض لها الشحنة q_0 من قبل الشحنة q ذات الدليل الموضعي (-1).

$$\vec{F} = \sum_{i=-3}^{i=3} \vec{F}_i = \vec{F}_{-3} + \dots + \vec{F}_0 + \dots + \vec{F}_3 \quad \dots \text{ وهكذا}$$

من تناظر هندسة المسألة نجد أن محصلة \vec{F}_1 و \vec{F}_{-1} تكون باتجاه \vec{F}_0 ، وكذلك \vec{F}_2 و \vec{F}_{-2} ، و \vec{F}_3 و \vec{F}_{-3} .

$$\vec{F}_0 = F_0 \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{F}_0}{F_0}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_{-1} &= (F_1 \cos \alpha_1 \vec{u}_1 - F_1 \sin \alpha_1 \vec{u}_\parallel) \\ &\quad + (F_1 \cos \alpha_1 \vec{u}_1 + F_1 \sin \alpha_1 \vec{u}_\parallel) \\ &= 2F_1 \cos \alpha_1 \vec{u}_1 \quad : F_1 = F_{-1}\end{aligned}$$

حيث \vec{u}_1 شعاع الوحدة باتجاه المحور المتجه من الشحنة q ذات الموضع (0) إلى الشحنة q_0 ، و \vec{u}_\parallel شعاع الوحدة في اتجاه تزايد السدليل الموضعي للشحنات q .

وبالمثل نجد:

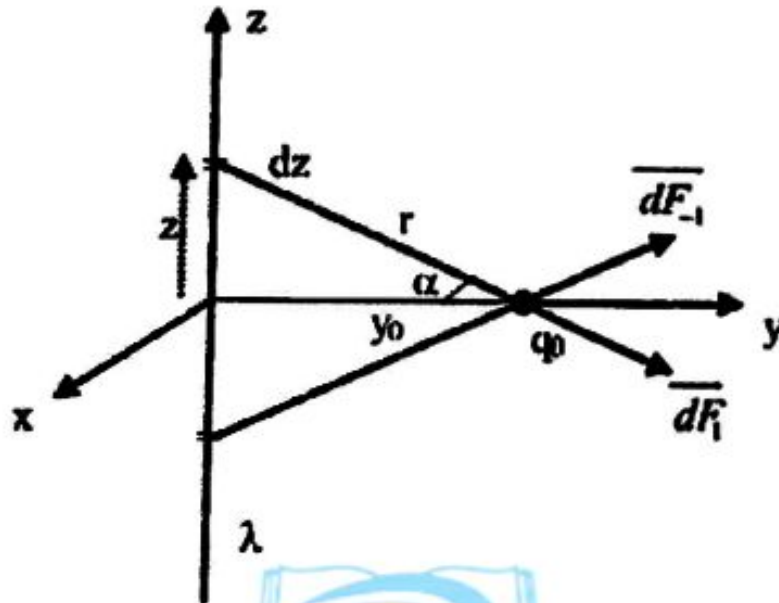
$$\begin{aligned}\vec{F}_3 + \vec{F}_{-3} &= 2F_3 \cos \alpha_3 \vec{u}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{-2} &= 2F_2 \cos \alpha_2 \vec{u}_1 \quad ; \quad \vec{F}_3 + \vec{F}_{-3} = 2F_3 \cos \alpha_3 \vec{u}_1 \\ \therefore \vec{F} &= \sum_{i=-3}^3 \vec{F}_i = [F_0 + 2(F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3)] \vec{u}_1 \\ F_0 &= \frac{Kqq_0}{b^2} \quad ; \quad F_1 = \frac{Kqq_0}{a^2+b^2} \quad ; \quad F_2 = \frac{Kqq_0}{(2a)^2+b^2} \quad ; \\ F_3 &= \frac{Kqq_0}{(3a)^2+b^2} \quad ; \quad \cos \alpha_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ; \\ \cos \alpha_2 &= \frac{b}{\sqrt{(2a)^2+b^2}} \quad ; \quad \cos \alpha_3 = \frac{b}{\sqrt{(3a)^2+b^2}}\end{aligned}$$

بعد التعويض والإختصار نجد:

$$\vec{F} = Kqq_0 b \cdot \left[\frac{1}{b^3} + 2 \left(\frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{1}{((2a)^2+b^2)^{3/2}} + \frac{1}{((3a)^2+b^2)^{3/2}} \right) \right] \vec{u}_1$$

التمرين 15:

نختار عنصراً طولياً من الخيط المشحون، ونوجد قوته العنصرية التي يؤثر بها على الشحنة q_0 ، ومن ثم نكامل على كامل الخيط المشحون، حتى نوجد القوة الكلية التي يؤثر بها هذا الخيط المشحون على الشحنة q_0 .



يؤثر العنصر dz بقوة dF_1 ، ويؤثر العنصر المناظر له بالنسبة لمبدأ الإحداثيات بالقوة dF_{-1} ، وهي مساوية بالمقدار للقوة dF_1 . تكون محصلتهما باتجاه المحور oy ، أي:

$$\vec{dF} = \vec{dF}_1 + \vec{dF}_{-1} = 2 dF_1 \cos \alpha \vec{j} = 2 \frac{Kq dq}{r^2} \cos \alpha \vec{j}$$

حيث dq هي الشحنة التي يحملها عنصر الطول dz .

$$\lambda = \frac{dq}{dz} \Rightarrow dq = \lambda dz \quad \therefore \vec{dF} = \frac{2Kq_0 \lambda \cos \alpha dz}{r^2} \vec{j} \quad \dots (*)$$

لإنجاز هذا التكامل نحول كل المتغيرات إلى متغير واحد، وليكن α ، و نغير ما يجب تغييره.

$$\cos \alpha = \frac{y_0}{r} \Rightarrow r = \frac{y_0}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{z}{y_0} \Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dz}{y_0} \Rightarrow dz = y_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

نعوض r و dz بما يساويهما في المعادلة (*) فيكون:

$$d\vec{F} = \frac{2Kq_0\lambda}{y_0} \cos \alpha d\alpha$$

$$\therefore \vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{2Kq_0\lambda}{y_0} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \quad \vec{j} =$$

$$\frac{2Kq_0\lambda}{y_0} [\sin \alpha]_0^{\pi/2} \vec{j} = \frac{2Kq_0\lambda}{y_0} (1 - 0) \vec{j}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{2Kq_0\lambda}{y_0} \vec{j}$$



ديوان المطبوعات الجامعية

الفصل الثاني

الحقل والكمون الكهربائيان



ديوان المطبوعات الجامعية



ديوان المطبوعات الجامعية

الباب الأول

الحقل الكهربائي وعمل القوى الكهربائية

التمرين 1:

جسيم كتلته $2g$ موجود في فضاء به حقل كهربائي ساكن موجه نحو الأسفل، قيمته 500 N/C . ما قيمة الشحنة الكهربائية التي ينبغي أن يحملها هذا الجسيم حتى يظل ساكناً؟

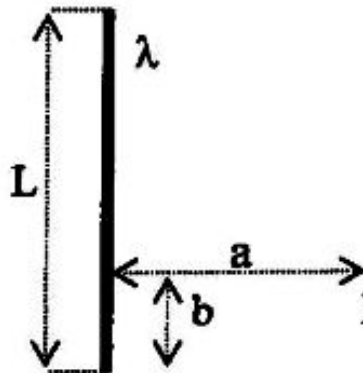
التمرين 2:

شحنة كهربائية مقدارها 25 nC موضوعة عند مبدأ الإحداثيات؛ وشحنة أخرى -25 nC عند الموضع $(6,0) \text{ m}$. أوجد شعاع الحقل الكهربائي عند الموضعين $(3,0) \text{ m}$ و $(3,4) \text{ m}$.

التمرين 3:

عشر شحنات نقطية سالبة قيمة كل منها $-q$ ، موزعة بانتظام على محيط حلقة دائرية عازلة نصف قطرها R . أوجد القوة التي تتعرض لها شحنة نقطية سالبة Q موضوعة على الناحية على سطح الدائرة عند مركزها، على بُعد a منه. هل ستقرب هذه الشحنة من الحلقة أم ستقرب منها؟

التمرين 4:



أوجد الحقل الكهربائي الناشئ عن القضيب

المستقيم ذي الطول L ، والمشحون بانتظام بكثافة

طولية λ ، عند الموضع M ، كما بالشكل المقابل.

التمرين 5 :

خيط ممتد على طول المحور OZ ، مشحون بكثافة طولية $\lambda = \frac{Az}{a^2 + z^2}$.

- أوجد مقدار الشحنة التي يحملها جزء الخيط $0 \leq z \leq a$ ، ثم الجزء $-a \leq z \leq a$.

- أوجد شعاع الحقل الكهربائي الناشئ عن هذا الخيط عند الموضع $M(a, 0, 0)$.

- إستنتجه عند الموضع $M'(0, a, 0)$ ؛ ثم عند الموضع $M''(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$.

التمرين 6 :

أوجد الحقل الكهربائي الناشئ عن نصف حلقة دائرية قطرها $2R$ ، مشحونة بكثافة طولية ثابتة λ ، عند موضع واقع على محورها، ويبعد عن مركزها مسافة a .

التمرين 7 :

حلقة نصف قطرها R ، مشحونة بكثافة طولية $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$.

- أوجد الشحنة الكلية لها.

- أوجد الحقل الكهربائي الناشئ عنها، عند موضع من محورها، على بُعد a من مركزها.

- أعد المسألة إذا كانت الكثافة الطولية $\lambda = \lambda_0 \cos^2 \theta$.

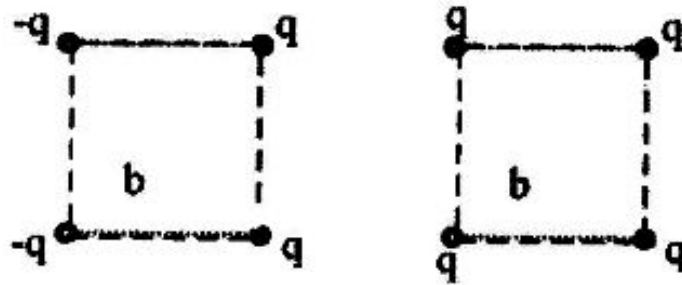
التمرين 8 :

أسطوانة طولها L ونصف قطر قاعدتها R . شُحن سطحها الجانبي بكثافة ثابتة σ .

أوجد الحقل الكهربائي الناشئ عنها، عند موضع من محورها، على بُعد a من مركز قاعدتها القرية منها.

التمرين 9 :

أوجد الحقل والكمون الكهربائيين عند مركز المربع، للمنظومتين التاليتين.



التمرين 10 :

شحنة نقطية مقدارها 25nC موضوعة في حقل كهربائي شاقولي منتظم متجه نحو الأعلى، قيمته $5 \cdot 10^4 \text{N/C}$.

- ما عمل القوة الكهربائية التي تؤثر عليها إذا انتقلت نحو اليمين مسافة

45cm ؟

- ثم إذا انتقلت نحو الأسفل مسافة 80cm ؟

- ثم نحو الأعلى باتجاه يصنع زاوية 30° مع الأفق، مسافة 260cm ؟

التمرين 11 :

يُعطى الحقل السلمي لكمون كهربائي بـ

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = 50x^2yz + 20y^2 \text{ volts}$$

- أوجد شعاع الحقل الكهربائي عند الموضع P المعطى بإحداثياته

الكارتيزية $(1, 2, 3)\text{m}$.

- ما فرق الكمون بينه وبين نقطة الأصل؟
- ما مقدار العمل الذي يجب أن يبذل لنقل شحنة نقطية مقدارها $3\mu\text{C}$ ، من نقطة الأصل إلى الموضع P ؟

التمرين 12 :

يوصف مجال كهربائي في الفضاء بـ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = 40xy \vec{i} + 20x^2 \vec{j} + 2\vec{k} \text{ v/m}$$

- أوجد فرق الكمون بين الموضعين $P(1, -1, 0)\text{m}$ و $Q(2, 1, 3)\text{m}$.
- أوجد الكمون عند الموضع P إذا كان المرجع الصفري عند الموضع Q.
- أوجد الكمون عند موضع $M(x, y, z)$.
- أوجد الكمون عند الموضع P والموضع Q، إذا كان المرجع الصفري عند نقطة الأصل.



ديوان المطبوعات الجامعية

الباب الثاني

طبوغرافية الفضاء الكهربائي

التمرين 13 :

إذا كان الكمون الكهربائي ثابتا في منطقة من الفضاء، فكيف يكون الحقل عندها؟

التمرين 14 :

إذا كان الحقل الكهربائي معدوما في منطقة من الفضاء، فهل يكون الكمون معدوما كذلك فيها؟

التمرين 15 :

موضعان A و B يبعدان عن بعضهما مسافة 1cm، كموناهما على الترتيب 30v و 70v .

أوجد متوسط مركبة الحقل الكهربائي المحمولة على المحور المار بالموضعين A و B.

التمرين 16 :

إذا عُلِمَ شعاع الحقل الكهربائي عند موضع معلوم، فهل يمكن حساب الكمون عنده؟ إذا كان الجواب بالإثبات فكيف ذلك؟ وإذا كان الجواب بالنفي فما المعطيات الإضافية اللازمة لذلك؟

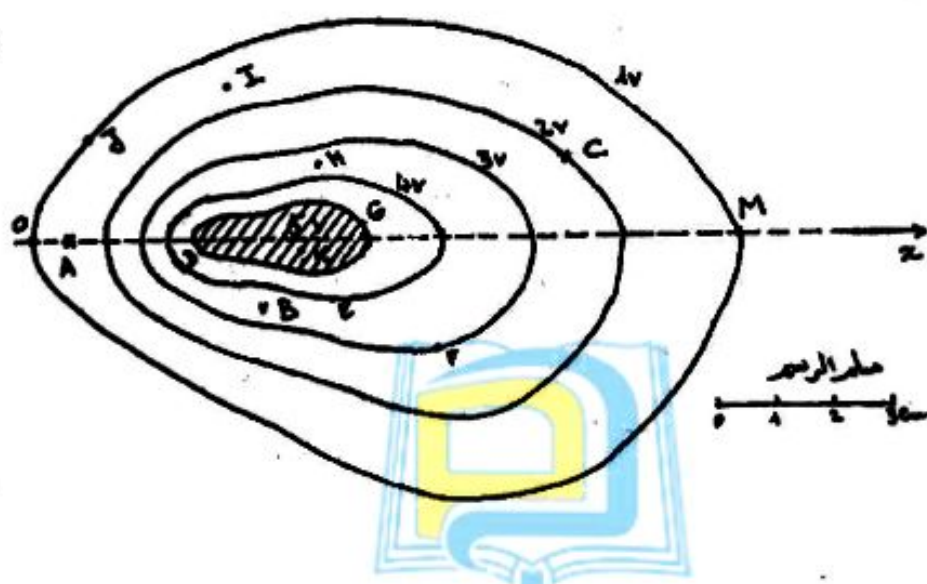
التمرين 17 :

موضعان A و B يبعدان عن بعضهما مسافة 1cm، فرق الكمون بينهما 100v. هل يمكن حساب الحقل الكهربائي المتوسط (\vec{E}_{moy}) بجوارهما؟

التمرين 18 :

يمثل الشكل أدناه بعضاً من خطوط سطوح تساوي الكمون في المستوي xy .

- أوجد شعاع الحقل الكهربائي المتوسط، عند المواضع A و B و C .
- في أية منطقة يكون الحقل أشد ما يمكن؟ أوجده هناك.
- تتبع خطوط الحقل الكهربائي المارة بالمواضع: A و B و C و D و E و F و G و H و I و J و K .



د- أرسم بيان الكمون الكهربائي للمواضع الواقعة على المحور x ، تابعة للإحداثي x ، باستخدام سلم الرسم:

$$1\text{cm} \rightarrow 1\text{volt} \quad \text{و} \quad 1\text{cm} \rightarrow 1\text{cm}$$

هـ- يُبعث من المآلة نهاية بروتون وفق المحور x ، نحو مبدأ الإحداثيات، و تكون له طاقة كلية مقدارها 3eV عندما يمر بالموضع M .

- أوجد سرعته الابتدائية، وسرعته عند الموضع M .

- أرسـم على البـيان السـابق نـفسه مـنحنيات الطاقـة الكامنة E_p ، والطاقة الحركية E_C ، والطاقة الكلية E_T ، لهذا البروتون، لجزء المحور $0 \leq x \leq x_M$.

- صف حركة هذا البروتون.

تُعطى: شحنة البروتون $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

كتلة البروتون $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$



ديوان المطبوعات الجامعية



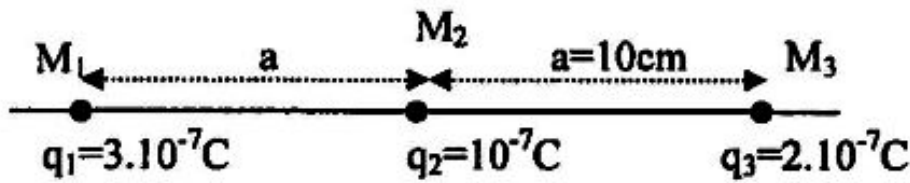
ديوان المطبوعات الجامعية

الباب الثالث

الطاقة الكامنة والطاقة الداخلية

التمرين 19 :

للمنظومة المقابلة



أحسب:

- الطاقة الكامنة لكل شحنة.

- الطاقة الداخلية للحملة.

- لترك q_1 حرة، وُبقي q_2 و q_3 مثبتين. ما مقدار الطاقة الحركية E_{C1} للشحنة q_1 ، عندما تصل المالا نهاية؟

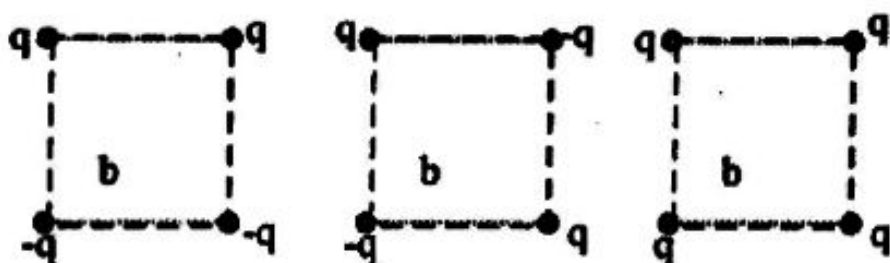
- لترك أيضا q_2 حرة، وُبقي q_3 مثبتة. ما مقدار الطاقة الحركية E_{C2} للشحنة q_2 ، عندما تصل المالا نهاية أيضا؟

- قارن ($E_{C1}(\infty)+E_{C2}(\infty)$) بالطاقة الداخلية للمنظومة. ماذا تلاحظ؟

إشرح.

التمرين 20 :

أحسب الطاقة الداخلية لكل جملة من الجمل الممثلة بالأشكال الموالية.



التمرين 21 :

أحسب الطاقة الكامنة لأيون من سلسلة مستقيمة لا نهائية من الأيونات المترابطة، حيث تتناوب الأيونات الموجبة والأيونات السالبة دورياً، بافتراضها شحنات نقطية، القيمة المطلقة لكل منها q ، والمسافة بين كل أيونين متتاليين a .

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{يُعطى:}$$

$$q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; a=2,8 \text{ \AA} : \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \quad \text{تطبيق عددي:}$$



التمرين 22 :

ثلاث شحنات نقطية متماثلة، قيمة كل منها $4 \mu\text{C}$ ، موضوعة أركان مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $0,5 \text{ mm}$. ما مقدار الشغل الذي يجب أن يُبذل لتحريك إحدى الشحنات إلى منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الآخرين؟

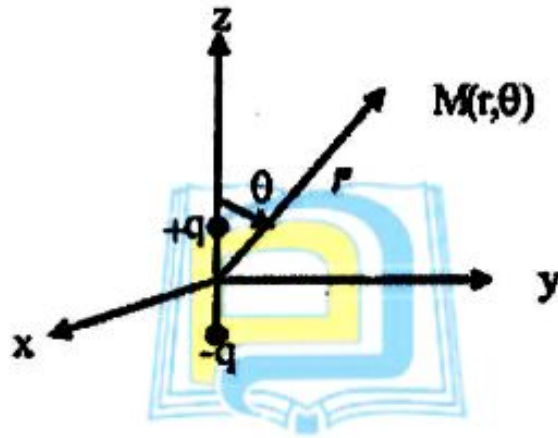
الباب الرابع

ثنائي الأقطاب الكهربائي

التمرين 23 :

أوجد الكمون الكهربائي الناشئ عن ثنائي الأقطاب الموضح كما بالرسم، عند موضع بعيد جدا عنه؛ أي $a \ll r$ ، حيث a البعد بين شحنتي الثنائي، q و $-q$.

- إستنتج من ثمّ عبارة الحقل الكهربائي عند ذلك الموضع.



التمرين 24 :

ثنائي أقطاب كهربائي عزمه $\vec{p} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \text{ nC.m}$ موضوع عند الموضع $M(1,1,1)m$.

- أوجد الكمون الكهربائي الناشئ عنه، عند موضع $A(x,y,z)$ ، ثم استنتج قيمته عند الموضع $(5,2,-1)m$.

- أوجد مركبة الحقل الكهربائي المحمولة على المحور x عنده.

التمرين 25 :

ثنائي أقطاب كهربائي له عزم $\vec{p}_1 = 20\vec{k} \text{ nC.m}$ موضوع عند الأصل،
وثنائي آخر له عزم $\vec{p}_2 = 50\vec{k} \text{ nC.m}$ موضوع عند الموضع $(0,0,10)\text{m}$.
أوجد الحقل والكمون عند منتصف القطعة المستقيمة الممتدة بين
موضعيهما.

التمرين 26 :

ثلاثة ثنائيات أقطاب موضوعة عند مبدأ الإحداثيات، لكل منها عزم
مقداره $400\pi\epsilon_0 \text{ C.m}$ ، أحدها متجه باتجاه تزايد المحور x ، والثاني باتجاه تزايد
المحور z . أوجد الكمون الكهربائي عند المواضع:

$$D(1,2,3)\text{m} , C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\text{m} , B(1,0,0)\text{m} , A(0,0,1)\text{m}$$

التمرين 27 :

صف كيفية تأثير حقل كهربائي خارجي على ثنائي أقطاب كهربائي
موضوع فيه. أوجد الطاقة الكامنة التي يمتلكها ثنائي الأقطاب في هذا الحقل.



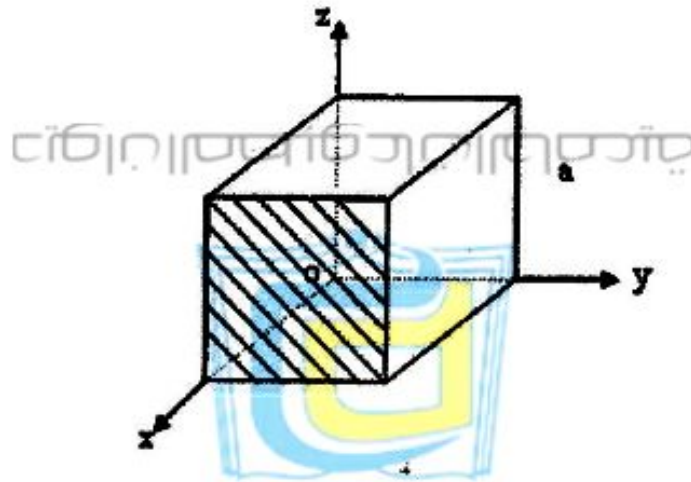
ديوان المطبوعات الجامعية

الباب الخامس

الشفق ونظرية غاوس

التمرين 28 :

وُضعت علبة مكعبة كما بالشكل المقابل.



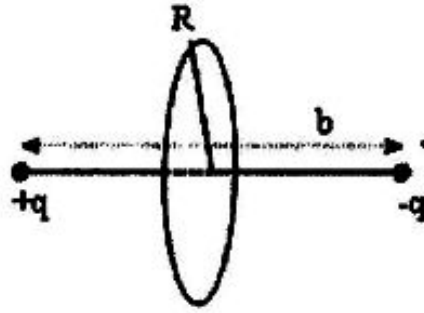
ا- أوجد تدفق الحقل $\vec{E} = E_0 \vec{i}$ (E_0 ثابت)، عبر السطح المظلل للعلبة.

ب- أوجد تدفق الحقل $\vec{E} = Cyz^2 \vec{i}$ من خلاله (C ثابت).

ج- أوجد تدفق الحقل الكهربائي $\vec{E} = C(y\vec{i} + x\vec{j})$ عبر السطح الكلي للعلبة. إستنتج قيمة الشحنة الإجمالية التي تحويها هذه العلبة.

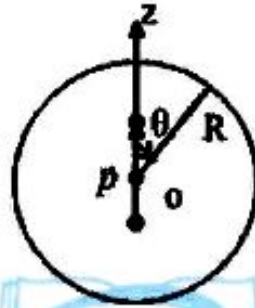
التمرين 29 :

شحنتان نقطيتان تبعدان عن بعضهما مسافة b . أحسب تدفق الحقل الكهربائي الناشئ عنهما عبر سطح دائرة نصف قطرها R ، عمودية على المحور المار بالشحنتين، وواقعة في منتصف القطعة المستقيمة الممتدة بينهما.



التمرين 30 :

أ- أكتب عبارة الحقل الكهربائي الناشئ عن ثنائي الأقطاب الممثل كما بالشكل المقابل، عند موضع على سطح الكرة المحيطة به.



ب- أحسب تدفق هذا الحقل عبر كامل سطح الكرة. هل يمكنك معرفة هذه النتيجة دون إجراء أية حسابات؟ كيف ذلك؟

التمرين 31 :

أ- تقع شحنة نقطية عند مركز مكعب. أحسب تدفق الحقل الكهربائي الناشئ عنها عبر أحد وجوه هذا المكعب.

ب- أعد المسألة فيما إذا كانت الشحنة واقعة عند أحد الأركان.

التمرين 32 :

أدرس الحقل الكهربائي الناشئ عن مستوي لا نهائي الأبعاد، مشحون بانتظام.

التمرين 33 :

أدرس الحقل الناشئ عن توزيع كروي منتظم؛ سطحي ثم حتمي.

التمرين 34 :

أدرس الحقل الكهربائي الناشئ عن توزيع كروي حتمي، نصف قطره R ، وكثافته الحجمية $\rho = \frac{A}{r}$ ، حيث A ثابت موجب.

التمرين 35 :

أدرس الحقل الكهربائي الناشئ عن خيط مستقيم لا نهائي الطول مشحون بانتظام.

التمرين 36 :

أدرس الحقل الكهربائي الناشئ عن اسطوانة نصف قطر مقطعها R ، وطويلة جدا، ومشحونة بانتظام، سطحيًا ثم حتميًا.

التمرين 37 :

أدرس الحقل الكهربائي الناشئ عن اسطوانة نصف قطر مقطعها R ، وطويلة جدا، ومشحونة بكثافة حجمية $\rho = \frac{A}{r}$ ، حيث A ثابت موجب و r البعد عن محور الأسطوانة.

التمرين 38 :

كرة نصف قطرها R_1 ، لها تجويف مركزي نصف قطره R_2 . وزعت شحنة q بانتظام على حجمها. أوجد الحقل والكمون الكهربائيين في جميع المناطق، ثم مثلهما بيانيا.

التمرين 39 :

يمكن اعتبار الإلكترون في ذرة الهيدروجين موزعاً على الفضاء بكثافة حجمية $\rho = Ae^{-2r/a_0} C/m^3$ ، حيث: $a_0 = 0,53 \text{ \AA}$.

أ- أوجد قيمة A حتى تكون الشحنة الكلية $|e|$.

ب- حدّد قيمة الشحنة داخل كرة نصف قطرها a_0 (نصف قطر مسار الإلكترون).

ج- أحسب الحقل الكهربائي بدلالة r ، ثم مثله بيانياً.

د- أحسب كذلك الكمون.

التمرين 40 :

أ- أحسب قيمة شحنة الأرض، معتبراً إياها كرة نصف قطرها 6400 km ، ومفترضاً شدة الحقل الكهربائي حول سطحها واحدة في جميع المواضع، وتساوي 130 v/m ، ويتجه نحو مركزها.

ب- الآن إذا علمت أن الحقل عند ارتفاع 1400 m عن سطح الأرض يساوي 20 v/m ، وأنه متجه نحو مركزها أيضاً، فأوجد متوسط كثافة الشحنة في هذا الغلاف الجوي الذي سُمكه 1400 m .

ديوان المطبوعات الجامعية

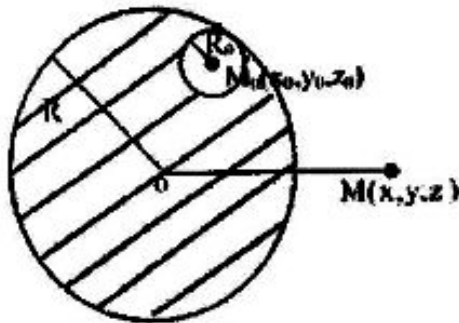
التمرين 41 :

(O, R) كرة مشحونة بكثافة حجمية ρ ثابتة. أقطعت منها الكرة (M_0, R_0) المبيّنة كما بالشكل.

أوجد شعاع الحقل الكهربائي

الناشئ عن الجزء المتبقي، عند موضع

$M(x,y,z)$.

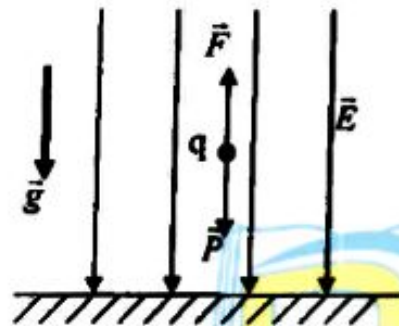


حلول الباب الأول

الحقل الكهربائي وعمل القوى الكهربائية

التمرين 1 :

حتى يظل هذا الجسم متوازنا يجب أن تكون محصلة القوى عليه معدومة. ولما كانت قوة ثقله متجهة نحو الأسفل، فيجب أن تكون قوة الحقل الكهربائي عليه متجهة نحو الأعلى؛ أي بعكس اتجاه الحقل الكهربائي، كما بالشكل، وتكون الشحنة سالبة.



$$|\vec{F}| = |\vec{P}|, \quad |q|E = mg$$

$$m = 2g \quad ; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad E = 500 \text{ N/C}$$

$$\therefore |q| = 0.00003924 \text{ C} = 39.24 \mu\text{C} \quad \therefore q = -39.24 \mu\text{C}$$

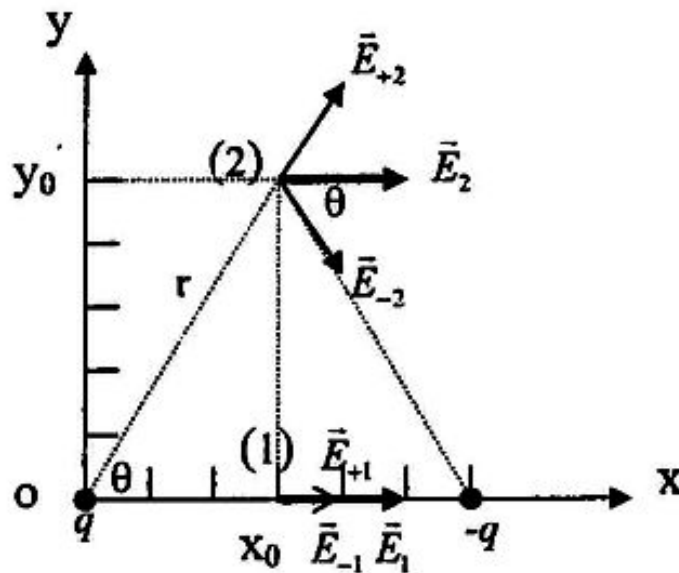
التمرين 2 :

عند الموضع (1): (3,0)m

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{+1} + \vec{E}_{-1} = \frac{Kq}{x_0^2} \vec{i} + \frac{Kq}{x_0^2} \vec{i} = 2 \frac{Kq}{x_0^2} \vec{i}$$

$$K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2; q = 25 \text{ nC} = 25 \cdot 10^{-9} \text{ C}; x_0 = 3 \text{ m}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = 50 \vec{i} \text{ NC}^{-1}$$



(تمثيل \vec{E}_2 و \vec{E}_1 على الرسم غير متجانس)

عند الموضع (2): (3,4)m

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{+2} + \vec{E}_{-2} = \frac{Kq}{r^2} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \frac{Kq}{r^2} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

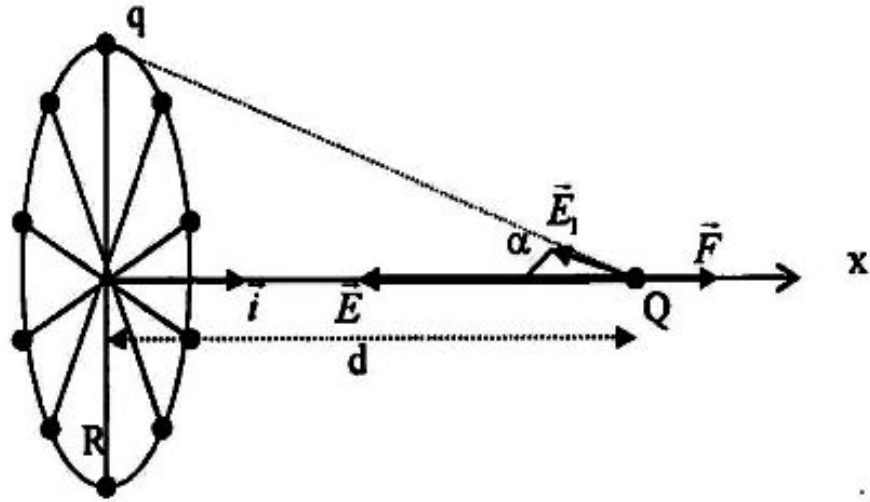
$$= 2 \frac{Kq}{r^2} \cos \theta \vec{i} = 2 \frac{Kq}{r^2} \frac{x_0}{r} \vec{i}$$

$$r = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \therefore \vec{E}_2 = \frac{2Kqx_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$$y_0 = 4 \text{ m} \therefore \vec{E}_2 = 10.8 \vec{i} \text{ NC}^{-1}$$

التمرين 3 :

من تناظر الشكل نرى أن الحقل الكلي يكون محمولا على المحور OX،
وبالتالي فإن:



$$E = 10 E_x = 10 E_1 \cos \alpha = \frac{10 K q}{(d^2 + R^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

$$\therefore \vec{E} = - \frac{10 K |q| d}{(d^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

ديوان المطبوعات الجامعية

وبالتالي فإن القوة التي تتعرض لها الشحنة Q هي:

$$\vec{F} = Q \vec{E} = \frac{10 K |q| |Q| d}{(d^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

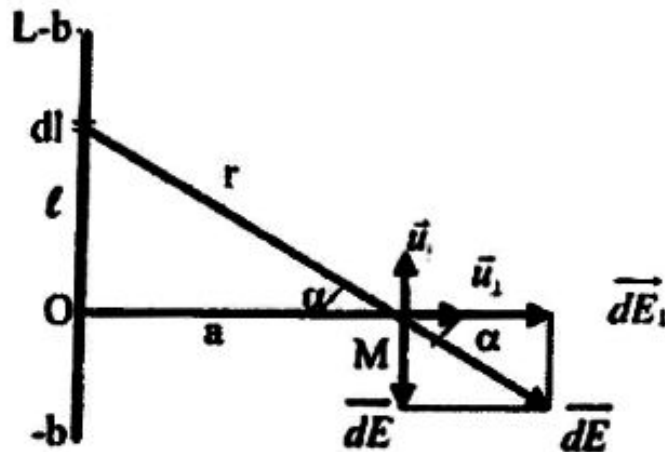
فالشحنة Q إذاً، ستبتعد عن الحلقة؛ ذلك أن الشحنات السالبة تتأثر بقوة
اتجاهها معاكس لاتجاه الحقل.

التمرين 4 :

$dl = \lambda dq$ عنصر طولي للشحنة.

\vec{u}_{\parallel} شعاع وحدة مواز للقضيب المشحون.

\vec{u}_{\perp} شعاع وحدة عمودي عليه.



$$\vec{dE} = \vec{dE}_{\parallel} + \vec{dE}_{\perp} = dE_{\parallel}(-\vec{u}_{\parallel}) + dE_{\perp}\vec{u}_{\perp}$$

$$dE_{\perp} = dE \sin \alpha = dE \frac{l}{r} = \frac{K dq}{r^2} \cdot \frac{l}{r} = \frac{K \lambda dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} \cdot l$$

$$= K \lambda \frac{ldl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\therefore E_{\perp} = \int dE_{\perp} = K \lambda \int_{-b}^{L-b} \frac{ldl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = K \lambda \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right]_{-b}^{L-b}$$

$$= K \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (L-b)^2}} \right)$$

$$dE_{\perp} = dE \cos \alpha = dE \frac{a}{r} = \frac{K dq}{r^2} \cdot \frac{a}{r} = \frac{K \lambda dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} a$$

$$= K \lambda a \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}}$$

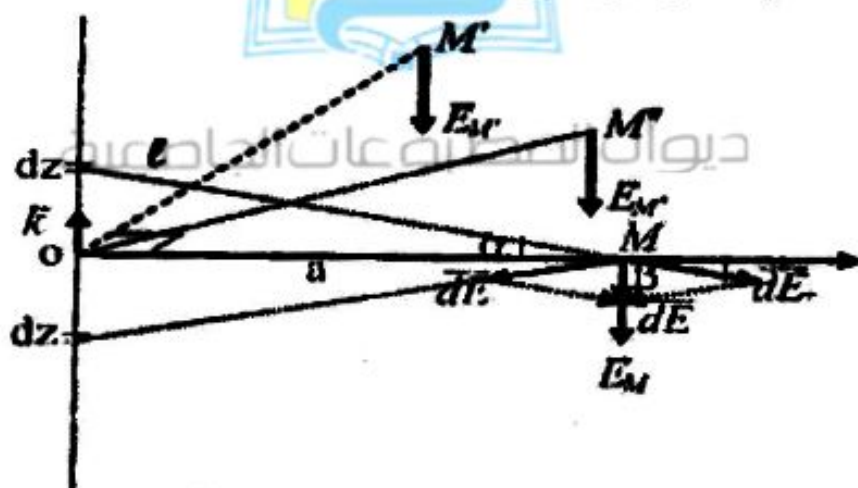
$$\therefore E_{\perp} = \int dE_{\perp} = K \lambda a \int_{-b}^{L-b} \frac{dl}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = K \lambda a \left[\frac{l}{a^2 \sqrt{a^2 + l^2}} \right]_{-b}^{L-b}$$

$$= \frac{K \lambda}{a} \left(\frac{L-b}{\sqrt{a^2 + (L-b)^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\therefore \vec{E} = K \lambda \left[- \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (L-b)^2}} \right) \vec{u}_{\parallel} + \frac{1}{a} \left(\frac{L-b}{\sqrt{a^2 + (L-b)^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{u}_{\perp} \right]$$

التمرين 5 :

- لنختار عنصر طول من هذا الخيط.



$$0 \leq z \leq a$$

$$q = \int dq = \int_0^a \lambda dz = \int_0^a \frac{Az}{(a^2 + z^2)} dz = A \left[\frac{1}{2} \ln(a^2 + z^2) \right]_0^a$$

$$= \frac{A}{2} (\ln(2a^2) - \ln a^2) = \frac{A \ln 2}{2}$$

$$-a \leq z \leq a$$

$$q = \int dq = \int_{-a}^a \lambda dz = \int_{-a}^a \frac{Az}{(a^2 + z^2)} dz = A \left[\frac{1}{2} \ln(a^2 + z^2) \right]_{-a}^a = 0$$

- إذا افترضنا أن A مقدار موجب فإن الطولية لشحنة الخيط ستكون موجبة للجزء الذي له $z > 0$ ، وسالبة للذي له $z < 0$ ، لذا فإنه إذا اخترنا عنصرين متناظرين بالنسبة لـ 0 ، فإن الحقل العنصري لهما سيكون كما بالشكل؛ وعليه تكون محصلتهما في اتجاه $(-\vec{k})$ ، كما بالشكل أيضا.

$$\vec{dE} = \vec{dE}_+ + \vec{dE}_-$$

$$dE = dE_+ \cos \beta + dE_- \cos \beta = 2dE_+ \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \sin \alpha ; dE_+ = dE_-$$

$$= 2 \sin \alpha \frac{K dq}{l^2} = 2 \sin \alpha \frac{K \lambda dz}{l^2} = 2KA \frac{z \sin \alpha dz}{(a^2 + z^2)(a^2 + z^2)}$$

$$\tan \alpha = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a \tan \alpha \Rightarrow dz = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\therefore dE = 2KA \frac{a \tan \alpha \cdot \sin \alpha \cdot a d\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot (a^2 + a^2 \tan^2 \alpha)^2} = \frac{2KA}{a^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha d\alpha$$

$$\therefore E = \int dE = \frac{2KA}{a^2} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{2KA}{a^2} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{\pi/2} \\ = \frac{2KA}{3a^2}$$

$$\therefore \vec{E}_M = -\frac{2KA}{3a^2} \vec{k}$$

- الموضع $M'(0,a,0)$ مشابه تماما للموضع M ، بالنسبة للخيط المشحون، وواضح جدا أن الحقل عنده يُكتب:

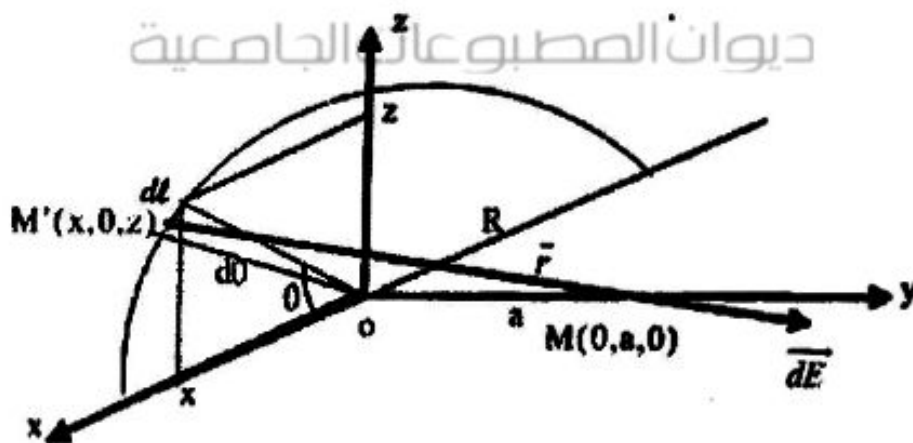
$$\vec{E}_{M'} = -\frac{2KA}{3a^2} \vec{k}$$

وكذلك الموضع $M''(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$ فهو يبعد أيضا بالبعد a عن الخيط المشحون، وواضح أيضا أن الحقل عنده يُكتب:

$$\vec{E}_{M''} = -\frac{2KA}{3a^2} \vec{k}$$

التمرين 6 :

سنستخدم لتبسيط حل هذه المسألة، جملة الإحداثيات الديكارتية.



$$\overline{dE} = \frac{Kdq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{r} = \overline{MM'} = -x\vec{i} + a\vec{j} - z\vec{k}, r = \sqrt{x^2 + a^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$: x^2 + z^2 = R^2$$

$$\therefore \overline{dE} = \frac{K\lambda dl}{(R^2 + a^2)^{3/2}} (-x\vec{i} + a\vec{j} - z\vec{k})$$

$$dl = R d\theta; \cos \theta = \frac{x}{R}; \sin \theta = \frac{z}{R}$$

$$\therefore \overline{dE} = \frac{K\lambda R d\theta}{(R^2 + a^2)^{3/2}} (-R \cos \theta \vec{i} + a\vec{j} - R \sin \theta \vec{k})$$

$$\vec{E} = \frac{K\lambda R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[-R \int_0^\pi \cos \theta d\theta \vec{i} + a \int_0^\pi d\theta \vec{j} - R \int_0^\pi \sin \theta d\theta \vec{k} \right]$$

$$= \frac{K\lambda R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[-R [\sin \theta]_0^\pi \vec{i} + a [\theta]_0^\pi \vec{j} - R [-\cos \theta]_0^\pi \vec{k} \right]$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{K\lambda R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} (a\pi \vec{i} - 2R \vec{k})$$



التمرين 7 :

- كما في التمرين السابق، نختار عنصرا dl من هذه الحلقة.

$$q = \int dq = \int \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos \theta R d\theta = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

- كما في الشكل السابق

$$\vec{E} = \int \overline{dE} = \int \frac{Kdq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \int \frac{K\lambda dl}{r^3} \vec{r}$$

$$= \int \frac{K \lambda_0 \cos \theta R d\theta}{(R^2 + a^2)^{3/2}} (-x\vec{i} + a\vec{j} - z\vec{k})$$

$$\because x = R \cos \theta \quad ; \quad z = R \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \frac{K \lambda_0 R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[-R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \vec{i} + a \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \vec{j} \right. \\ &\quad \left. - R \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \vec{k} \right] \\ &= \frac{K \lambda_0 R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[-R \left[\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \vec{i} + a [\sin \theta]_0^{2\pi} \vec{j} \right. \\ &\quad \left. - R \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{2\pi} \vec{k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \frac{K \lambda_0 R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} ((-R\pi)\vec{i} + 0\vec{j} - 0\vec{k}) \\ &= -\frac{K \lambda_0 R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \vec{i} \end{aligned}$$

$$\lambda = \lambda_0 \cos^2 \theta \quad ***$$

$$\begin{aligned} q &= \int dq = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos^2 \theta \cdot R d\theta = \lambda_0 R \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\lambda_0 R}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \lambda_0 R \pi \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{K \lambda dl}{r^3} \vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{K \lambda_0 \cos^2 \theta R d\theta}{(R^2 + a^2)^{3/2}} (-x \vec{i} + a \vec{j} - z \vec{k})$$

$$= \frac{K \lambda_0 R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \left[-R \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta \vec{i} + a \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \vec{j} - R \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \vec{k} \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

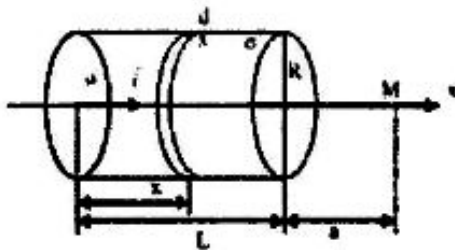
$$= [\sin \theta]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{K \lambda_0 R}{(R^2 + a^2)^{3/2}} a \pi \vec{i}$$

التمرين 8 : ديوان المطبوعات الجامعية



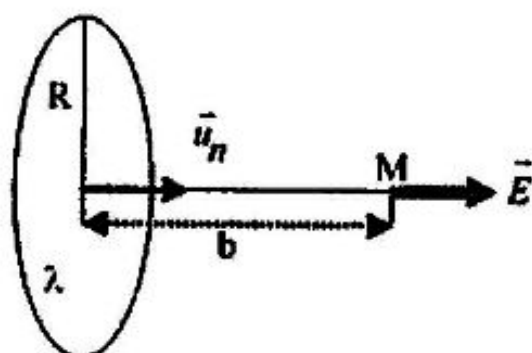
يمكن اعتبار هذه الأسطوانة

حلقات متتالية، وعليه سنختار حلقة

عنصرية منها، كما بالشكل الموالي.

معلوم أن الحقل الناشئ عن حلقة نصف قطرها R ومشحونة بانتظام بكثافة طولية λ ، عند موضع من محورها، ويبعد مسافة b عن مركزها، يُعطى بالعلاقة:

$\vec{E} = \frac{K\lambda 2\pi R b}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \vec{u}_n$. $2\pi R$ محيط الحلقة، وعليه فالمقدار $\lambda 2\pi R$ هو الشحنة الكلية التي تحملها الحلقة؛ أي $q = \lambda 2\pi R$ ، إذاً:



$$\vec{E} = \frac{Kqb}{(R^2 + b^2)^{3/2}} \vec{u}_n$$

فالحقل الناشئ عن الحلقة العنصرية عند الموضع M هو:

$$d\vec{E} = \frac{K dq (L+a-x)}{(R^2 + (L+a-x)^2)^{3/2}} \vec{i} = \frac{K \sigma 2\pi R dx (L+a-x)}{(R^2 + (L+a-x)^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$: dq = \sigma 2\pi R dx$

$$\therefore \vec{E} = K \sigma 2\pi R \int_{x=0}^{x=L} \frac{(L+a-x) dx}{(R^2 + (L+a-x)^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$$y = L+a-x \Rightarrow dy = -dx \quad \text{لنعتبر:}$$

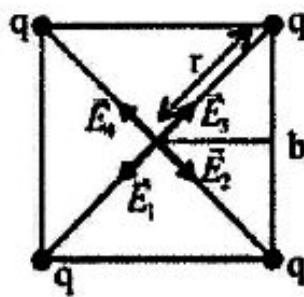
$$x = 0 \Rightarrow y = L+a; x = L \Rightarrow y = a$$

$$\therefore \vec{E} = K \sigma 2\pi R \int_{y=L+a}^{y=a} \frac{y (-dy)}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \vec{i} = K \sigma 2\pi R \left[\frac{1}{(R^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{L+a}^a \vec{i}$$

لاحظ هنا أن \vec{r} ثابت، مقداراً واتجاهاً، وعليه فإنه لن يسبب أية صعوبة لإيجاد هذا التكامل.

$$\therefore \vec{E} = K\sigma 2\pi R \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L+a)^2}} \right) \vec{i} : K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

التمرين 9 :

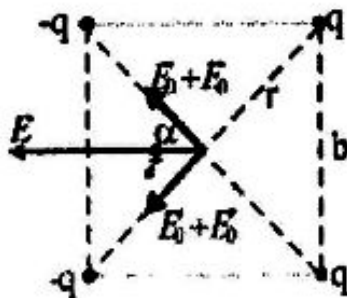


واضح أن الحقل الكهربائي عند مركز المربع للمنظومة المقابلة معدوم $\vec{E} = 0$ ، أما الكمون فهو:

$$V = 4 \frac{Kq}{r} : r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow r = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore V = 4 \frac{Kq}{b/\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}K \frac{q}{b} : K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

وللمنظومة الثانية:



$$V = \frac{Kq}{r} + \frac{K(-q)}{r} + \frac{Kq}{r} = 0$$

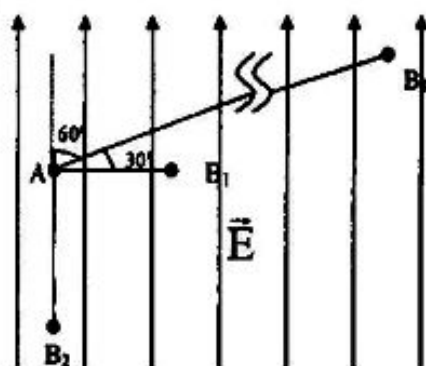
أما الحقل:

$$E_0 = \frac{Kq}{r^2} ; \cos \alpha = \frac{b/2}{r} \quad \text{حيث:}$$

$$\therefore \vec{E} = 4 \frac{Kqb}{2r^3} \vec{e} = 4\sqrt{2} \frac{Kq}{b^2} \vec{e} : r = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

\vec{e} متجه الوحدة المثل كما بالشكل.

التمرين 10 :



لكل الحالات يكون العمل:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore W = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{l} = q \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

حيث \vec{E} حقل ثابت مقداراً واتجهاً.

$$W_1 = q \vec{E} \cdot \vec{AB}_1 = 0 : \vec{E} \perp \vec{AB}_1$$

$$W_2 = q \vec{E} \cdot \vec{AB}_2 = q |\vec{E}| |\vec{AB}_2| \cos(\vec{E}, \vec{AB}_2) = -q E \vec{AB}_2 : (\vec{E}, \vec{AB}_2) = 180^\circ, \cos 180^\circ = -1$$

$$\therefore W_2 = 25 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot 10^{-2} \cdot (-1) = -10^{-3} J = -1 mJ$$

قيمة العمل في هذه الحالة سالبة، فهو عمل مقاوم؛ ذلك أن الشحنة

تتحرك في عكس اتجاه الحقل، وهي موجبة.

$$W_3 = q \vec{E} \cdot \vec{AB}_3 = q |\vec{E}| |\vec{AB}_3| \cos(\vec{E}, \vec{AB}_3) = -q E \vec{AB}_3 : (\vec{E}, \vec{AB}_3)$$

$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore W_3 = 25 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 260 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2} = 1625 \cdot 10^{-6} J = 1625 \mu J$$

التمرين 11 :

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$= -(100xyz\vec{i} + (50x^2z + 40y)\vec{j} + 50x^2y\vec{k}) \text{ V/m}$$

$$\therefore \vec{E}(P) = \vec{E}(x=1, y=2, z=3) = -(600\vec{i} + 230\vec{j} + 100\vec{k}) \text{ V/m}$$

$$V(P) = V(x=1, y=2, z=3) = 380 \text{ V}$$

$$V(O) = V(x=0, y=0, z=0) = 0$$

$$\therefore V(P) - V(O) = 380 \text{ V} ; V(O) - V(P) = -380 \text{ V}$$

- عندما نقول " العمل الذي يجب أن يُبذل "، فهذا يعني أنه يبذل ضد

قوى الحقل، وعليه فإن: $\vec{F}' = -\vec{F} = -q\vec{E}$

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$\therefore dW' = \vec{F}' \cdot d\vec{l} = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\vec{E} \cdot d\vec{l} = qdV : dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore W'_{O \rightarrow P} = \int_O^P dW' = q \int_O^P dV = q(V(P) - V(O))$$

$$= 3 \cdot 10^{-6} \cdot 380 = 1140 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 1140 \mu\text{J}$$

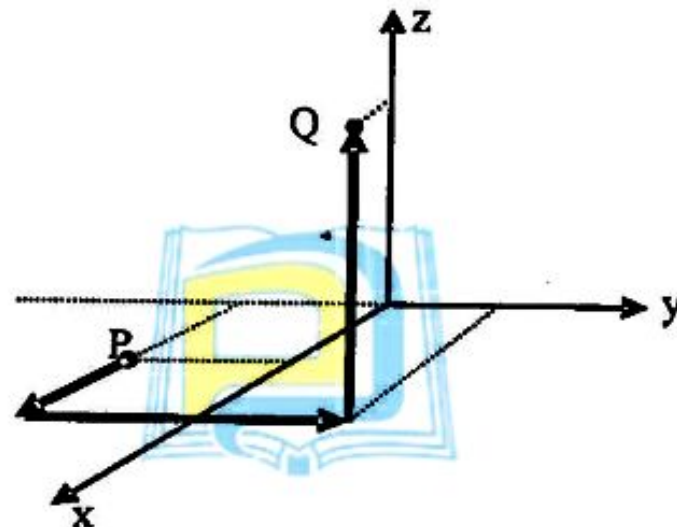
التمرين 12 :

$$\int_P^Q dV = - \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_P^Q (40xy\vec{i} + 20x^2\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= - \int_P^Q (40xydx + 20x^2dy + 2dz)$$

فرق الكمون بين موضعين هو تجوال الحقل الكهربائي بين هذين الموضعين. وحيث أن الحقل الكهربائي حقل محافظ، فإن تجواله بين موضعين لا يتعلق بشكل المسار المسلوك، بل فقط بين موضعي بداية المسار ونهايته، وعليه فإننا سنختار شكل المسار بكيفية تجعل إنجاز التكامل السابق عملية سهلة. سنختاره بالكيفية التالية:

يكون في المرحلة الأولى قطعة مستقيمة لها كل من y و z ثابتان، ويتم الانتقال فقط على المحور x ، وفي المرحلة الثانية يتغير y فقط، ويبقى z و x ثابتين، وفي المرحلة الأخيرة يتغير z فقط، ويبقى المتغيران الآخران، x و y ، ثابتين.



$$\begin{aligned}
 &P(x=1, y=-1, z=0) \rightarrow (x=2, y=-1, z=0) \rightarrow \\
 &\quad \text{المرحلة الأولى} \quad \text{المرحلة الثانية} \\
 &(x=2, y=1, z=0) \rightarrow Q(x=2, y=1, z=3) \\
 &\quad \text{المرحلة الأخيرة}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_P^Q dV = V(Q) - V(P)$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\int_{\substack{x=1 \\ y=-1 \\ z=0}}^{\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=3}} 40xy \, dx + \int_{\substack{y=-1 \\ z=0 \\ x=2}}^{\substack{y=1 \\ z=3 \\ x=2}} 20x^2 \, dy + \int_{\substack{z=0 \\ x=2 \\ y=1}}^{\substack{z=3 \\ x=2 \\ y=1}} 2 \, dz \right] \\
&= - \left[-40 \int_1^2 x \, dx + 80 \int_{-1}^1 dy + \int_0^3 dz \right] \\
&= - \left[-40 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 80[y]_{-1}^1 + 2[z]_0^3 \right]
\end{aligned}$$

$$= -106V \quad \therefore V(P) - V(Q) = 106V$$

$$V(P) - V(Q) = 106V \Rightarrow V(P) = 106 + V(Q)$$

$$V(Q) = 0 \Rightarrow V(P) = 106V$$

- لإيجاد الكمون الذي يمكن أن يشتق منه الحقل الكهربائي المعطى، فإنه يُجرى التكامل اللاحدود التالي: $V = \int dV = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ بالكيفية التالية:

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -40xy \dots\dots\dots(1) \right.$$

$$\therefore \left[\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = -20x^2 \dots\dots\dots(2) \right.$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = -2 \dots\dots\dots(3) \right]$$

بحل جملة المعادلات التفاضلية الجزئية هذه معاً، يُنجز الحل.

لنبدأ بالمعادلة (1):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -40xy \Rightarrow V(x, y, z) = -40 \frac{x^2}{2} y + f(y, z) \\ = -20x^2 y + f(y, z)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = -20x^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = (2) = -20x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow f = f(z) \therefore V(x, y, z) = -20x^2 y + f(z)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = (3) = -2 \Rightarrow f(z) = -2z + C$$

$$\therefore V(x, y, z) = -20x^2 y - 2z + C$$

حيث C ثابت اختياري.

- إذا كان المرجع الصفري عند نقطة الأصل فإن:

$$V(0, 0, 0) = C = 0 \therefore V(x, y, z) = -20x^2 y - 2z \text{ (volts)}$$

$$\therefore V(P) = V(x=1, y=-1, z=0) = 20 \text{ v}$$

$$V(Q) = V(x=2, y=1, z=3) = -86 \text{ v}$$

لاحظ هنا أن الكمون يتغير بتغير المرجع، إلا أن فرق الكمون يظل ثابتاً

مهما تغير المرجع:

$$V(P) - V(Q) = 20 - (-86) = 106 \text{ v}$$

حلول الباب الثاني

طبوغرافية الفضاء الكهربائي

التمرين 13 :

$$V = Cte \Rightarrow \vec{E} = 0$$

يُوصف الحقل الكهربائي بأنه سالب
تدرج كمونه؛ $(\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V)$ ،

فإذا كان الكمون ثابتا في منطقة من

الفضاء فإنه لا تدرج له، وعليه فالحقل معدوم في هذه المنطقة،
ويكون للحقل وجود عند الحدود الخارجية لهذه المنطقة، إذا كان هناك
اختلاف في الكمون بينها وبين جوارها.

التمرين 14 :

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow V = Cte$$

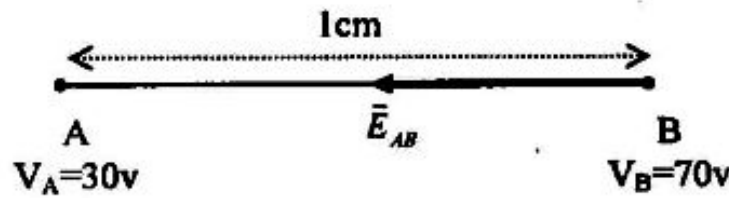
تُعطي الصيغة التفاضلية التي تصف

العلاقة بين الحقل وكمونه بالعلاقة:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

إذا كان الحقل معدوما في منطقة من الفضاء، فهذا يعني أن $dV = 0$ ،
أي أن فرق الكمون بين أيّ موضعين منها معدوم، فالكمون في هذه المنطقة
ثابت؛ ولا يقتضي ذلك أن يكون هذا الكمون معدوما.

التمرين 15 :



$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$\therefore E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

إذا لم يُوصف الكمون بدالة موضعية مضبوطة، بل بقيم معلومة عن مواضع منفصلة، فإنه لا يمكن التعبير عن الحقل إلا بقيم متوسطة لمركباته المحمولة على حامل أي موضعين من هذه المواضع المعلومة.

$$\therefore \vec{E}_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} ; \vec{E}_y = -\frac{\Delta V}{\Delta y} ; \vec{E}_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z}$$

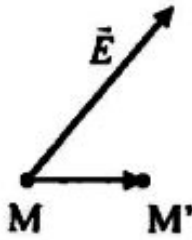
$$\vec{E}_l = -\frac{\Delta V}{\Delta l} : \text{ووفق أي اتجاه } l$$

يكون الحقل أو مركباته دوماً باتجاه تناقص الكمون، وعليه فإن مركبة الحقل المحمولة على حامل الموضعين A و B تكون متجهة من B إلى A، وتكون:

$$\vec{E}_{AB} = \frac{\Delta V}{\Delta l} = \frac{70-30}{1.10^{-2}} = 40.10^2 \text{ v/m}$$

التمرين 16 :

لنختار موضعا M' مجاورا للموضع M ، بحيث يمكن اعتبار \vec{E} ثابتا في المنطقة التي تحويهما.



$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

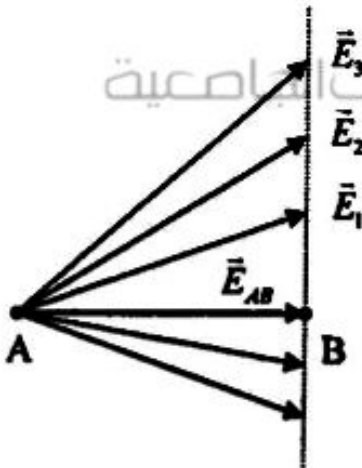
$$\int_M^{M'} dV = - \int_M^{M'} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_{M'} - V_M \cong -\vec{E} \cdot \overline{MM'}$$

$$\therefore V_M \cong V_{M'} + \vec{E} \cdot \overline{MM'}$$

من خلال العبارة الأخيرة نلاحظ أن لا يمكن معرفة الكمون عند الموضع M إذا عُرف فقط الحقل الكهربائي عندها، بل لا بد أيضا من معرفة الكمون عند موضع آخر مجاور لها، M' مثلا.

التمرين 17 :

لنفترض $V_A > V_B$ ، بالتالي فإن القيمة المتوسطة للحقل الكهربائي المحمولة على حامل الموضعين A و B هي:



$$\begin{aligned} \overline{E_{AB}} &= \frac{|V_A - V_B|}{AB} \\ &= \frac{100}{1.10^{-2}} = 10^4 \text{ v/m} \end{aligned}$$

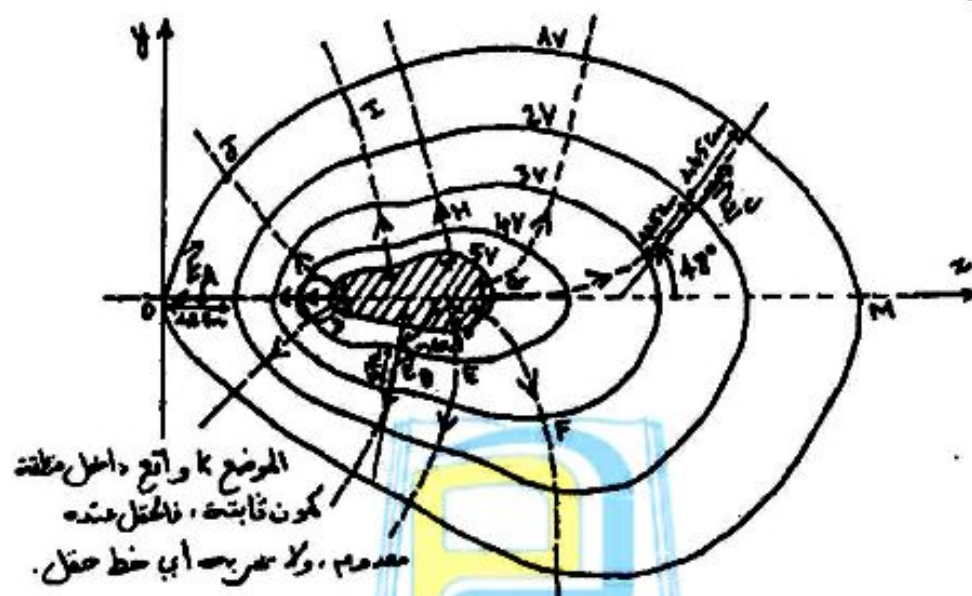
وتكون متجهة باتجاه تناقص الكمون؛

أي من A إلى B .

أما الحقل المتوسط \vec{E}_{moy} فلا يمكن تعيينه، لأن مسقط الحقل الكهربائي على الاتجاه \overline{AB} (مركبة الحقل على الاتجاه \overline{AB})، يمكن أن تكون مسقطاً لعدد لا نهائي من أشعة الحقل، كـ \vec{E}_1 و \vec{E}_2 و \vec{E}_3 .

التمرين 18 :

لنحدد أولاً حامل شعاع الحقل، واتجاهه. يكون حامله متعامداً مع سطح تساوي الكمون عند ذلك الموضع؛ أما اتجاهه فهو باتجاه تناقص الكمون، كما بالشكل.



1. لنحسب الآن القيمة المتوسطة لشدة الحقل.

ديوان المطبوعات الجامعية

$$|\vec{E}_A| \cong \frac{|\Delta V|}{|\Delta l|} \cong \frac{2-1}{1.2} = \frac{1}{1.2} = 0.8333 \text{ v/cm} = 83.333 \text{ v/m}$$

$$|\vec{E}_B| \cong \frac{|\Delta V|}{|\Delta l|} \cong \frac{4-3}{0.7} = \frac{1}{0.7} = 1.42857 \text{ v/cm} = 142.857 \text{ v/m}$$

$$|\vec{E}_C| \cong \frac{1}{2} \left(\frac{|\Delta V|}{|\Delta l_1|} + \frac{|\Delta V|}{|\Delta l_2|} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{3-2}{1.25} + \frac{2-1}{1.45} \right) = \frac{1}{0.7}$$

$$= 0.7448 \text{ v/cm} = 74.483 \text{ v/m}$$

ولنحدد الاتجاه، لذلك نقيس الزاوية التي يصنعها شعاع الحقل مع أحد المحاور الإحداثية، وليكن x مثلاً.

$$(\vec{E}_A, \vec{ox}) = 180^\circ \therefore \vec{E}_A \cong -83.333 \vec{i} \text{ v/m}$$

$$(\vec{E}_B, \vec{ox}) \cong -101^\circ$$

$$\therefore \vec{E}_B \cong 142.857 (\cos(-101^\circ) \vec{i} + \sin(-101^\circ) \vec{j}) \text{ v/m}$$

$$= -142.857 (0.191 \vec{i} + 0.982 \vec{j}) \text{ v/m}$$

$$(\vec{E}_C, \vec{ox}) \cong 48^\circ \therefore \vec{E}_C \cong 74.483 (\cos 48^\circ \vec{i} + \sin 48^\circ \vec{j}) \text{ v/m}$$

$$= 74.483 (0.669 \vec{i} + 0.743 \vec{j}) \text{ v/m}$$

ب. يكون الجقل أشد ما يمكن في المنطقة التي تكون فيها سطوح تساوي الكمون أقرب إلى بعضها، وهي بالتقريب المنطقة الموضوعة داخل حيز دائري، كما بالشكل. لنحسب الجقل عندها.

$$|\vec{E}_{\max}| \cong \frac{|\Delta V|}{|\Delta l|} \cong \frac{5-4}{0.5} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ v/cm} = 200 \text{ v/m}$$

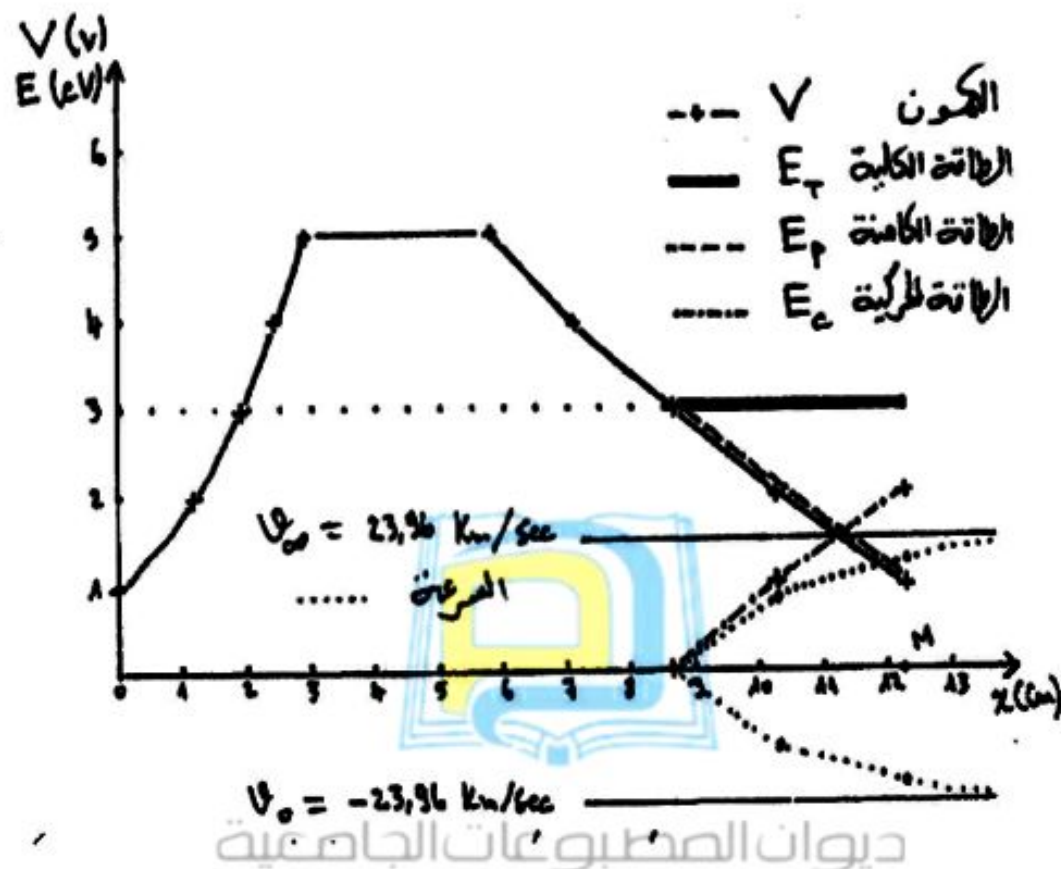
$$(\vec{E}_{\max}, \vec{ox}) = 180^\circ \therefore \vec{E}_{\max} \cong -200 \vec{i} \text{ v/m}$$

ج. يتم رسم خط الحقل بالإنطلاق من الموضع الذي يمر به خط الحقل هذا، إذ لا يمر بموضع ما إلا خط حقل وحيد، ومن ثمَّ رسم خطوط مستمرة تكون في كل موضع يمر به، متعامدة مع سطح تساوي الكمون عند ذلك الموضع نفسه، إلى أن تنتهي عند منطقة كمون ثابتة، أو تمتد إلى المالا نهاية.

في الشكل مُثلت خطوط الحقل بخطوط متقطعة موجهة --->---

د. بتتبع المواضع التي تتقاطع فيها سطوح تساوي الكمون المبينة على الشكل، مع المحور x، يُحصل على الجدول الآتي:

X (cm)	0	1.2	1.9	2.4	2.9	5.8	7.1	8.7	10.3	12.3
V(v)	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1



م. يتحرك هذا البروتون داخل حقل كهربائي ساكن، وهو حقل محافظ، وعليه فإن طاقته الكلية مقدار ثابت.

$$E_T = E_p + E_c = |e|V + \frac{1}{2}m_p v^2 = 3.1, 6.10^{-19}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m_p}(3.1, 6.10^{-19} - |e|V)}$$

حساب السرعة الابتدائية:

البروتون بُعث من المالا نهاية، حيث الكمون معلوم، $V=0$ ، إذاً:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2.3.1,6.10^{-19}}{1,672.10^{-27}}} \cong 23961,7 \text{ m/s} \cong 24 \text{ km/s}$$

حساب السرعة عند الموضع M :

$$V_M = 1 \text{ v} \quad \therefore v_M = \sqrt{\frac{2(3.1,6.10^{-19} - 1,6.10^{-19}.1)}{1,672.10^{-27}}} \\ \cong 19564,6 \text{ m/s} \cong 19,56 \text{ km/s}$$

الطاقة الكامنة:

$$E_p = qV = |e|V = 1,6.10^{-19} V \text{ (joules)} = V \text{ (eV)}$$

$$: 1\text{eV} = 1,6.10^{-19} \text{ joules}$$

وعليه فمنحنى الطاقة الكامنة E_p ، هو نفسه منحنى الكمون V المرسوم سابقاً، على أن لا تتجاوز الطاقة الكامنة الكلية $E_T = 3\text{eV}$ ؛ وعليه فإن البروتون لن يتجاوز سطح تساوي الكمون 3volts عند اقترابه من منطقة الكمون الثابت 5volts؛ أي أن الفاصلة x لن تقل عن 8,7cm. إذاً فالتمثيل الفعلي للطاقة الكامنة لهذا البروتون سيكون للجزء الذي له $8,7\text{cm} \leq x \leq x_{Af} = 12,3 \text{ cm}$

الطاقة الحركية:

$$E_T = E_p + E_c \Rightarrow E_c = E_T - E_p = 3 - V \text{ (eV)}$$

ينبغي للطاقة الحركية أن تكون مقداراً موجباً، وعليه فإن:

$$E_c = 3 - V \geq 0 \Rightarrow V \leq 3 \text{ volts}$$

أي أن البروتون المقذوف باتجاه مبدأ الإحداثيات سيتوقف عند سطح تساوي الكمون $3V$ ، ثم يعود من حيث أتى؛ أي نحو المالا نهاية، بطاقة حركية حدية $E_C(\infty)$.

$$E_C(\infty) + E_P(\infty) = E_T; E_P(\infty) = 0; V(\infty) = 0$$

$$\therefore E_C(\infty) = E_T = 3.1, 6.10^{-19} = \frac{1}{2} m_p v_\infty^2$$

$$\therefore v_\infty = \sqrt{\frac{2E_C(\infty)}{m_p}} \cong 23961,7 \text{ m/s} \cong 24 \text{ km/s}$$

وهي السرعة الابتدائية نفسها التي انطلق بها.



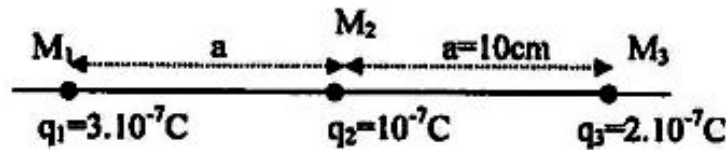
ديوان المطبوعات الجامعية

حلول الباب الثالث

الطاقة الكامنة والطاقة الداخلية

التمرين 19 :

- حساب الطاقات الكامنة:



$$E_{P_1} = q_1 V_1 = q_1 \left(K \frac{q_2}{a} + K \frac{q_3}{2a} \right) = \frac{Kq_1}{a} \left(q_2 + \frac{q_3}{2} \right)$$

$$= 54.10^{-4} \text{ J} = 5.4 \text{ mJ}$$

$$E_{P_2} = q_2 V_2 = q_2 \left(K \frac{q_1}{a} + K \frac{q_3}{a} \right) = \frac{Kq_2}{a} (q_1 + q_3)$$

$$= 45.10^{-4} \text{ J} = 4.5 \text{ mJ}$$

$$E_{P_3} = q_3 V_3 = q_3 \left(K \frac{q_1}{2a} + K \frac{q_2}{a} \right) = \frac{Kq_3}{a} \left(\frac{q_1}{2} + q_2 \right)$$

$$= 45.10^{-4} \text{ J} = 4.5 \text{ mJ}$$

- حساب الطاقة الداخلية للجملة:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 E_{P_i} = \frac{1}{2} (5.4 + 4.5 + 4.5) = 7.2 \text{ mJ}$$

- عندما تُترك q_1 حرةً فإنها ستغادر مكانها مبتعدة عن الشحنتين q_2 و q_3 ، لأن شحنتها متماثلة نوعاً، وبالضبط ستتحرك على المحور الحامل للشحنات الثلاث.

طالما أنه لا تؤثر في الشحنة سوى قوة الحقل الكهربائي، وهي قوة محافظة، فإن الطاقة الكلية ستظل ثابتة. وعليه فإن:

$$\underbrace{E_{P1}(M_1) + E_{C1}(M_1)}_{\text{الوضع الابتدائي}} = \underbrace{E_{P1}(\infty) + E_{C1}(\infty)}_{\text{الوضع النهائي}}$$

الوضع النهائي الوضع الابتدائي

$$E_{C1}(M_1) = 0 \quad \text{لأن سرعتها الابتدائية معدومة.}$$

$$E_{P1}(\infty) = 0 \quad \text{لأنها ابتعدت كثيراً عن الشحنتين الأخريين.}$$

$$\therefore E_{C1}(\infty) = E_{P1}(M_1) = q_1 \left(K \frac{q_2}{a} + K \frac{q_3}{2a} \right) = 5.4 \text{ mJ}$$

- الآن، ولما ابتعدت الشحنة q_1 ، فإن المنظومة ستكون بالشكل:



عندما تترك q_2 حرةً فإنها ستبتعد عن q_3 (قوى التنافر)، كما ابتعدت q_1 سابقاً، ويكون كما للحالة السابقة:

$$E_{P2}(M_2) + E_{C2}(M_2) = E_{P2}(\infty) + E_{C2}(\infty)$$

وللمبررات السابقة نفسها يكون: $E_{C2}(M_2) = 0$ و $E_{P2}(\infty) = 0$

$$\therefore E_{C2}(\infty) = E_{P2}(M_2) = q_2 K \frac{q_3}{a} = 1.8 \text{ mJ}$$

نشير هنا إلى أن هذه الطاقة الكامنة للشحنة q_2 ، هي في وجود الشحنة q_3 فقط، بخلاف الحالة الأولى، إذ كانت بوجود q_3 و q_1 في آن واحد.

- واضح الآن أنه لو تركت q_3 حرة فإنها لن تغادر مكانها، لأنها لا تخضع لأيّة قوة، ولا تمتلك أيّة طاقة كامنة تمكنها من ذلك.

- لنقارن الآن $(E_{C1}(\infty) + E_{C2}(\infty))$ بالطاقة الداخلية للمنظومة.

$$E_{C1}(\infty) + E_{C2}(\infty) = 5.4 + 1.8 = 7.2 \text{ mJ}$$

الملاحظة:

يُلاحظ جلياً أن مجموع الطاقات الحركية عند المآلهية، يساوي تماماً الطاقة الداخلية للمنظومة.

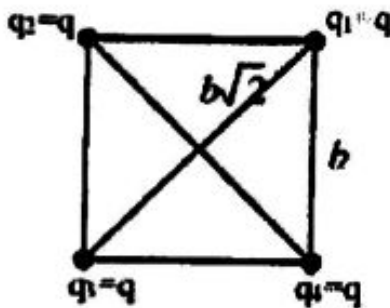
الشرح:

معلوم أن الطاقة الداخلية لمنظومة شحنات داخلية، هي بالتعريف العمل اللازم لجمع تلك الشحنات، بعد جلبها من المآلهية، أو هي مجموع الأعمال التي يبذلها الحقل الكهربائي لتشتيتها.

ومعلوم أيضاً أن عمل قوة، أيّة قوة، محافظة أو غير محافظة، بين موضعين، يساوي التغير في الطاقة الحركية. وطالما أن الطاقات الحركية الابتدائية في مسألتنا هذه معدومة، فطبيعي جداً أن نجد ما وجدنا، من أن:

مجموع الطاقات الحركية النهائية = الطاقة الداخلية للمنظومة

التمرين 20 :



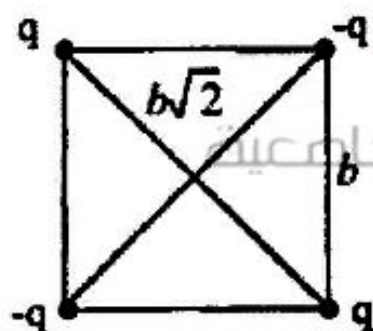
$$U = \sum_{\text{all possible pairs}} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

لكل i و j يكون $q_i q_j = q^2 \therefore U = k \left(\begin{array}{c} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} \\ + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} \\ + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \end{array} \right)$

$$U = K \left(\begin{array}{c} \frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{q^2}{b} \\ + \frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} \\ + \frac{q^2}{b} \end{array} \right)$$

$$= K \frac{q^2}{b} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{2} K \frac{q^2}{b}$$



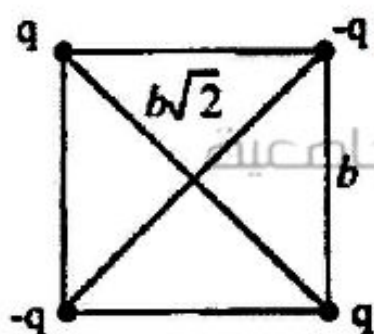
$$U = K \left(\begin{array}{c} -\frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{q^2}{b} \\ + \frac{-q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} \\ + \frac{-q^2}{b} \end{array} \right)$$

$$= K \frac{q^2}{b} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = -\frac{8 - 2\sqrt{2}}{2} K \frac{q^2}{b}$$

$q_1 q_j = q^2$ لكل i و j يكون $\therefore U = k \left(\begin{array}{c} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} \\ + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} \\ + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \end{array} \right)$

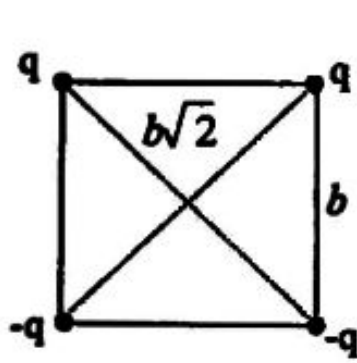
$$U = K \left(\begin{array}{c} \frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{q^2}{b} \\ + \frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} \\ + \frac{q^2}{b} \end{array} \right)$$

$$= K \frac{q^2}{b} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = \frac{8 + 2\sqrt{2}}{2} K \frac{q^2}{b}$$



$$U = K \left(\begin{array}{c} -\frac{q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{q^2}{b} \\ + \frac{-q^2}{b} + \frac{q^2}{b\sqrt{2}} \\ + \frac{-q^2}{b} \end{array} \right)$$

$$= K \frac{q^2}{b} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = -\frac{8 - 2\sqrt{2}}{2} K \frac{q^2}{b}$$



$$U = K \left(\begin{aligned} &\frac{q^2}{b} + \frac{-q^2}{b\sqrt{2}} + \frac{-q^2}{b} \\ &+ \frac{-q^2}{b} + \frac{-q^2}{b\sqrt{2}} \\ &+ \frac{q^2}{b} \end{aligned} \right)$$

$$= K \frac{q^2}{b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) = -\sqrt{2} K \frac{q^2}{b}$$

التمرين 21 :

لنحسب الطاقة الكامنة لأحد الأيونات الموجبة:



$$\begin{aligned} E_{P+} = qV_+ &= q \left(2 \frac{K(-q)}{a} + 2 \frac{Kq}{2a} + 2 \frac{K(-q)}{3a} + 2 \frac{Kq}{4a} + \dots \right) \\ &= -2 \frac{Kq^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \end{aligned}$$

حسب القاعدة المعطاة فإن: $\ln(1+1) = \ln 2 \cong 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

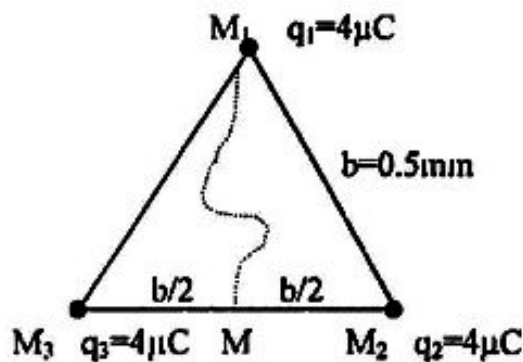
$$\begin{aligned} \therefore E_{P_+} &\cong -2 \ln 2 \frac{Kq^2}{a} = -2 \ln 2 \frac{9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2,8 \cdot 10^{-10}} \\ &\cong -1,14 \cdot 10^{-18} \text{ J} \cong -7,13 \text{ eV} \\ 1 \text{ eV} &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

ولأحد الأيونات السالبة:

$$E_{p-} = -qV_- = -q \left(2 \frac{Kq}{a} + 2 \frac{K(-q)}{2a} + 2 \frac{Kq}{3a} + 2 \frac{K(-q)}{4a} + \dots \right)$$

$$= -2 \frac{Kq^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \cong -2 \ln 2 \frac{Kq^2}{a} \cong -7,13 \text{ eV}$$

التمرين 22 :



لنحرك q_1 مثلاً من موضعها

M_1 ، إلى الموضع M منتصف القطعة

المستقيمة بين M_2 و M_3 .

عمل قوة الحقل $dW_{elec} = -dE_p$

العمل الواجب بذله $dW_{ext} = -dW_{elec} = dE_p$

$$\therefore \int_{M_1}^M dW_{ext} = \int_{M_1}^M dE_p$$

$$W_{ext}(M_1 \rightarrow M) = E_p(M) - E_p(M_1) = q_1 V(M) - q_1 V(M_1)$$

$$= q_1 (V(M) - V(M_1)) = q_1 \left(\left(\frac{Kq_2}{b/2} + \frac{Kq_3}{b/2} \right) - \left(\frac{Kq_2}{b} + \frac{Kq_3}{b} \right) \right)$$

$$= \frac{Kq^2}{b} (2 + 2 - 1 - 1) = \frac{2Kq^2}{b} \quad : q_1 = q_2 = q_3 = q$$

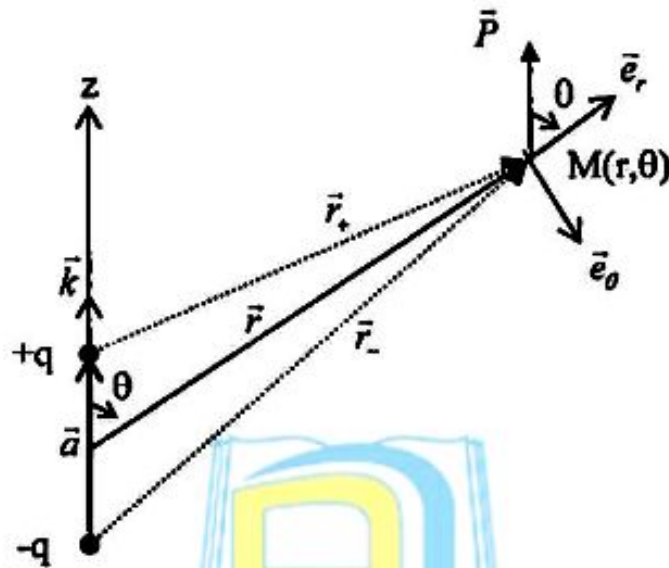
$$= \frac{2 \times 9 \times 10^{-9} (4 \cdot 10^{-6})^2}{0,5 \times 10^{-10}} = 576 \text{ J}$$

حلول الباب الرابع

ثنائي الأقطاب الكهربائي

التمرين 23 :

يكون كمون ثنائي الأقطاب الكهربائي ناشئا عن شحنتيه.



$$V_M = V(r, \theta) = V_+ + V_- = \frac{Kq}{r_+} + \frac{K(-q)}{r_-} = Kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} ; \quad \vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$$

$$\therefore \vec{r}_+ \cdot \vec{r}_+ = \vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} \cdot \frac{\vec{a}}{2}$$

$$r_1^2 = r^2 - r a \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$\therefore r_1 = r \left(1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{1/2}$$

عند المسافات البعيدة جدا، حيث $\frac{a}{r} \ll 1 \Rightarrow a \ll r$ يمكن باستخدام
دستور التقريب التالي: $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ أن يكون:

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} - \frac{a^2}{8r^2} \right) ; \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} - \frac{a^2}{8r^2} \right)$$

$$\therefore V(r, \theta) = Kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{Kq}{r} \cdot \frac{a \cos \theta}{r}$$

$$\therefore V(r, \theta) = Kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx \frac{Kq}{r} \cdot \frac{a \cos \theta}{r}$$

يُعرف $\bar{p} = qa$ بعزم ثنائي الأقطاب الكهربائي.

$$\therefore V(r, \theta) \approx \frac{Kq}{r} \cdot \frac{a \cos \theta}{r} = \frac{Kpr \cos \theta}{r^2 r} = \frac{K\bar{p} \bar{r}}{r^3} \dots\dots\dots (*)$$

ديوان المطبوعات الجامعية

إستنتاج عبارة الحقل الكهربائي: $\vec{E} = -\text{grad } V$

تكتب عبارة التدرج في الإحداثيات القطبية:

$$\overrightarrow{\text{grad } \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \cong \frac{2Kp \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{2Kp \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{Kp}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

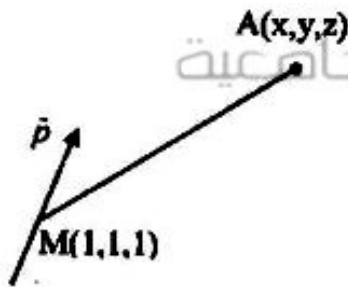
لاحظ أنه يمكن من الرسم التعبير عن الشعاع \vec{p} بشعاعي الوحدة \vec{e}_r و \vec{e}_θ .

$$\begin{aligned}\vec{p} &= p(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \Rightarrow \frac{\vec{p}}{p} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow \sin \theta \vec{e}_\theta &= \cos \theta \vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{p}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{E} \cong \frac{Kp}{r^3} \left(2 \cos \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{p} \right) = \frac{Kp}{r^3} \left(3 \cos \theta \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{p} \right)$$

التمرين 24 :

حسب العبارة (*) في حل التمرين السابق فإن : $V(r, \theta) = \frac{K\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ ، حيث \vec{p} عزم ثنائي الأقطاب الكهربائي، و \vec{r} الشعاع الممتد من موضع الثنائي إلى موضع الكمون.



$$\therefore V(A(x, y, z)) = \frac{K \vec{p} \cdot \vec{MA}}{|\vec{MA}|^3}$$

حيث :

$$\vec{MA} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{MA} = (2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot 10^{-9} \vec{MA}$$

$$= (2(x-1) + 5(y-1) - 3(z-1)) \cdot 10^{-9}$$

$$= (2x + 5y - 3z - 4) \cdot 10^{-9}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(A(x, y, z)) &= 9 \cdot 10^9 \frac{(2x + 5y - 3z - 4) \cdot 10^{-9}}{[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{9(2x + 5y - 3z - 4)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\therefore V(5; 2, -1) = 1.777 \text{ volts}$$

إيجاد المركبة E_x للحقل عند المبدأ 0 :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

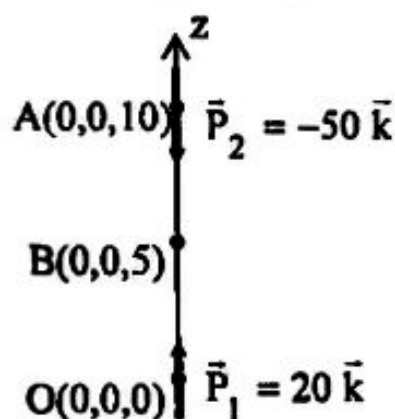
$$\begin{aligned} \therefore E_x(x, y, z) &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -9 \frac{[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] - 3(x-1)(2x + 5y - 3z - 4)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

$$E_x(0, 0, 0) = \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3.464 \text{ v/m}$$

ديوان المطبوعات الجامعية

التمرين 25 :

حساب الكمون:



$$V = V_1 + V_2 = \frac{K \overline{p_1} \overline{OB}}{|\overline{OB}|^3} + \frac{K \overline{p_2} \overline{AB}}{|\overline{AB}|^3} : \overline{OB} = 5\vec{k} ; \overline{AB} = -5\vec{k}$$

$$\therefore V = \frac{9 \cdot 10^9}{5^3} (20 \cdot 10^{-9} \cdot 5 + 50 \cdot 10^{-9} \cdot 5) = 25,2 \text{ volts}$$

حساب الحقل:

$$\vec{E} = \frac{Kp}{r^3} \left(3 \cos \theta \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p}}{p} \right) \text{ عرفنا من التمرين (23) أن:}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

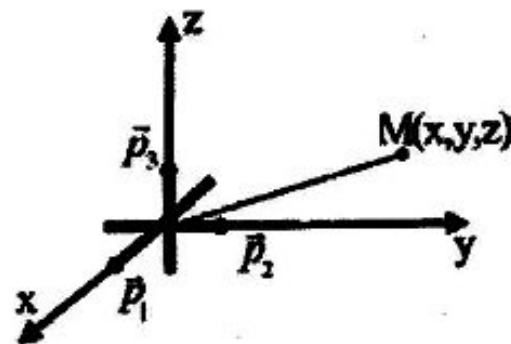
$$\vec{E}_1 = \frac{Kp_1}{|\overline{OB}|^3} \left(3 \cos \theta_1 \frac{\overline{OB}}{|\overline{OB}|} - \frac{\vec{p}_1}{p_1} \right) : \theta_1 = (\overline{OB}, \vec{p}_1)$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-9}}{5^3} (3\vec{k} - \vec{k}) = 2,88 \vec{k} \text{ v/m}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kp_2}{|\overline{AB}|^3} \left(3 \cos \theta_2 \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} - \frac{\vec{p}_2}{p_2} \right) : \theta_2 = (\overline{AB}, \vec{p}_2)$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-9}}{5^3} (3(-\vec{k}) - (-\vec{k})) = -7,2 \vec{k} \text{ v/m}$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -4,32 \vec{k} \text{ v/m}$$



$$\vec{p}_1 = 400\pi\epsilon_0 \vec{i}, \vec{p}_2 = 400\pi\epsilon_0 \vec{j}, \vec{p}_3 = 400\pi\epsilon_0 \vec{k}$$

$$V_A = V_1 + V_2 = K \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{OA}}{|\vec{OA}|^3} + \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{OA}}{|\vec{OA}|^3} + \frac{\vec{p}_3 \cdot \vec{OA}}{|\vec{OA}|^3} \right)$$

$$= K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|^3} ; O(0,0,0), A(0,0,1) \therefore \vec{OA} = \vec{k}$$

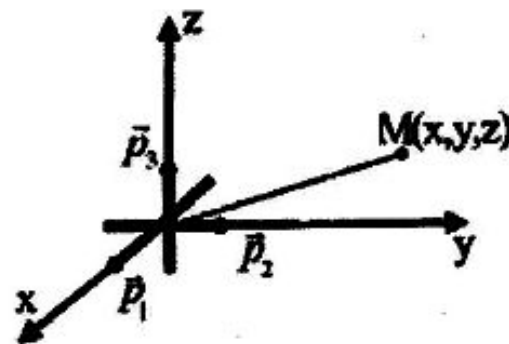
$$\therefore V_A = K (p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}) \cdot \vec{k} = K p_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 400\pi\epsilon_0 = 100 \text{ volt}$$

$$V_B = K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|^3} ; \vec{OB} = \vec{i} ; B(1,0,0)$$

$$= K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \vec{i} = K p_1 = 100 \text{ volt}$$

$$V_C = K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|^3} ; \vec{OC} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$; C \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



$$\vec{p}_1 = 400\pi\epsilon_0 \vec{i}, \vec{p}_2 = 400\pi\epsilon_0 \vec{j}, \vec{p}_3 = 400\pi\epsilon_0 \vec{k}$$

$$V_A = V_1 + V_2 = K \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^3} + \frac{\vec{p}_2 \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^3} + \frac{\vec{p}_3 \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^3} \right)$$

$$= K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^3} ; O(0,0,0), A(0,0,1) \therefore \overrightarrow{OA} = \vec{k}$$

$$\therefore V_A = K (p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}) \cdot \vec{k} = K p_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 400\pi\epsilon_0 = 100 \text{ volt}$$

$$V_B = K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^3} ; \overrightarrow{OB} = \vec{i} ; B(1,0,0)$$

$$= K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \vec{i} = K p_1 = 100 \text{ volt}$$

$$V_C = K (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|^3} ; \overrightarrow{OC} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$; C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= K(p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) : |\overline{OC}| = 1$$

$$= \frac{K}{\sqrt{3}}(p_1 + p_2 + p_3) = 100\sqrt{3} \cong 173,20 \text{ volts}$$

$$V_o = K(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \cdot \frac{\overline{OD}}{|\overline{OD}|^3} : \overline{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} : D(1,2,3)$$

$$= K(p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}} : |\overline{OD}| = \sqrt{14}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{14}}(p_1 + 2p_2 + 3p_3) = \frac{600}{\sqrt{14}} \cong 160,35 \text{ volts}$$

التمرين 27 :

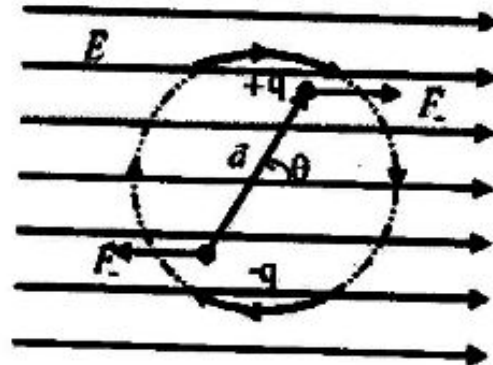
تأثير الحقل الكهربائي على ثنائي الأقطاب الموضوع فيه:

الحقل المنتظم:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} + (-q)\vec{E} = 0$$

فمحصلة القوى المؤثرة عليه معدومة.

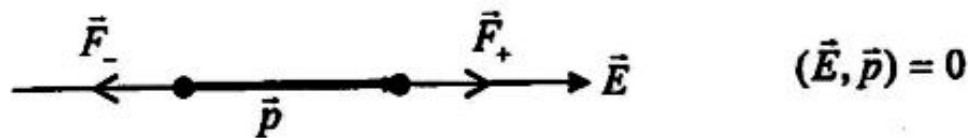
ديوان المطبوعات الجامعية



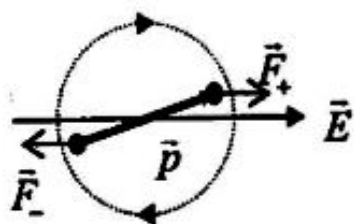
لنحسب محصلة عزوم القوى المؤثرة عليه.

يكون هذا العزم معدوماً عندما يكون \vec{E} و \vec{p} متوازيين، أي:

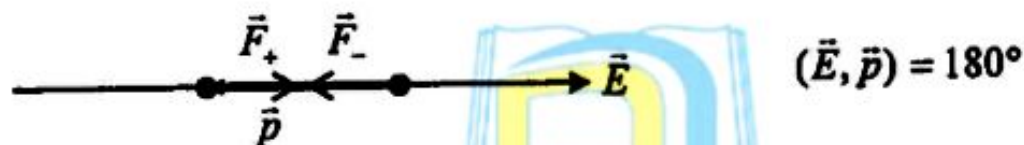
$$(\vec{E}, \vec{p}) = 0 \text{ أو } (\vec{E}, \vec{p}) = 180^\circ$$



فهذا الوضع إذا وضع توازن، طالما أن: $\sum \vec{F} = 0$ ، $\sum \vec{\tau} = 0$



لو أزيح ثنائي الأقطاب قليلاً عن وضع توازنه هذا، فإنه سيحاول العودة إلى هذا الوضع، فهذا الوضع إذا وضع توازن مستقر.



فهذا الوضع أيضاً وضع توازن، حيث أن: $\sum \vec{F} = 0$ ، $\sum \vec{\tau} = 0$



لو أزيح ثنائي الأقطاب قليلاً عن وضع توازنه هذا، فإنه لن يعود إليه، بل

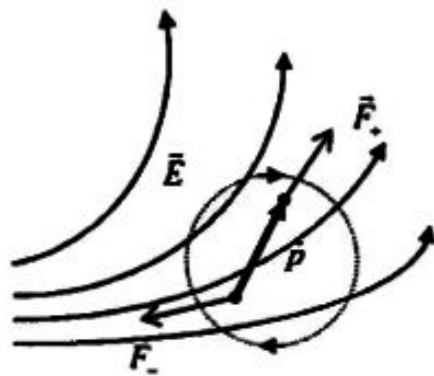
سيسعى إلى العودة إلى وضع الإتزان

السابق. فهذا الوضع إذا وضع توازن حرج.

إذاً تكون محصلة القوى المؤثرة على ثنائي أقطاب كهربائي موضوع في حقل كهربائي خارجي منتظم، معدومة؛ ويخضع إلى عزم مزدوجة قوى تسعى إلى تدوير عزمه الكهربائي كي يكون باتجاه الحقل الكهربائي الخارجي.

الحقل غير المنتظم:

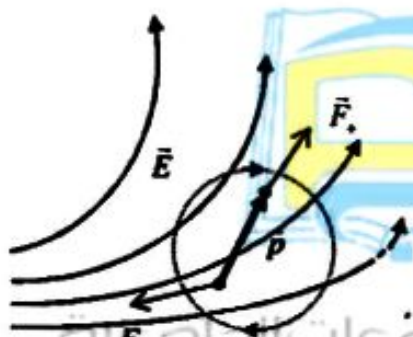
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq 0$$



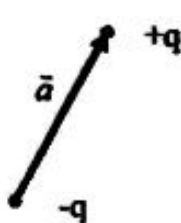
تكون المحصلة باتجاه القوة الأكبر، وحيث أن شحنتي ثنائي الأقطاب متساويتان بمقداراً، فإن القوة الأكبر تكون عند المنطقة التي يكون فيها الحقل أشد.

و وضوحاً فإن مجموع

$$\sum \vec{\tau} \neq 0$$



وعليه فإن ثنائي الأقطاب الكهربائي الموضوع في حقل كهربائي خارجي غير منتظم، يخضع إلى محصلة قوى تسمى إلى جره إلى منطقة الحقل الأشد، وإلى محصلة عزوم قوى تسعى إلى جعل اتجاه عزمه باتجاه الحقل الخارجي.



الطاقة الكامنة التي يمتلكها ثنائي أقطاب كهربائي موضوع في حقل كهربائي خارجي هي الطاقة الكامنة التي يمتلكها شحنتاه:

$$E_p = qV_+ + (-q)V_- = q(V_+ - V_-) = q \Delta V$$

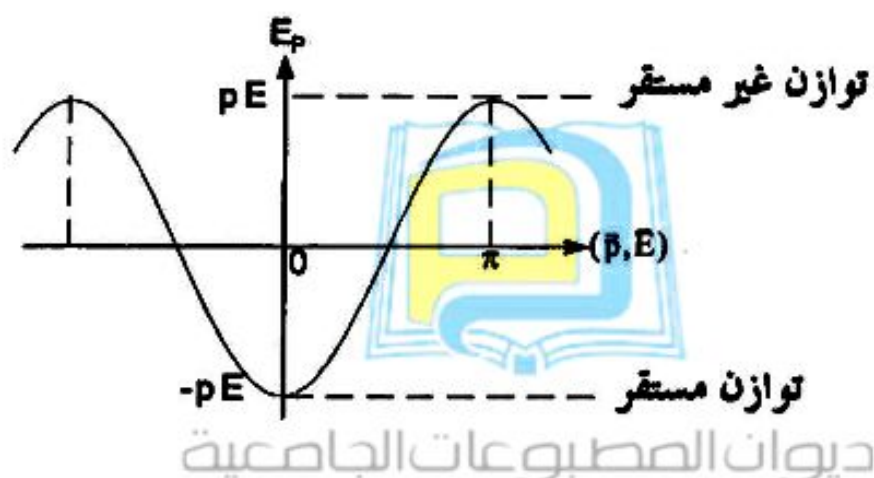
$$\Delta V = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \vec{a}$$

$$\therefore E_p = q(-\vec{E} \cdot \vec{a}) = -q\vec{a} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad : \vec{p} = q\vec{a}$$

$$\therefore E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos(\vec{p}, \vec{E})$$

تكون الطاقة الكامنة أصغر ما يمكن عندما: $(\vec{p}, \vec{E}) = 0$ ، وهي وضعية التوازن المستقر لثنائي الأقطاب.

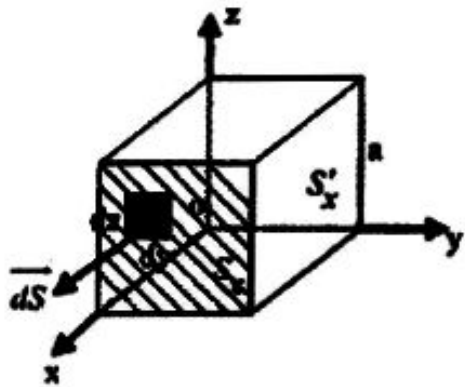
وتكون أكبر ما يمكن عندما: $(\vec{p}, \vec{E}) = \pi$ ، وهي وضعية التوازن غير المستقر له (التوازن الحرج).



حلول الباب الخامس التدفق ونظرية غاوس

التمرين 28 :

١- الحقل $\vec{E} = E_0 \vec{i}$:



$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} : d\vec{S} = dy dz \vec{i} \therefore d\phi = E_0 dy dz$$

$$\begin{aligned} \phi &= \int_S d\phi = E_0 \int_0^a \int_0^a dy dz = E_0 \int_0^a dy \int_0^a dz \\ &= E_0 [y]_0^a [z]_0^a = E_0 a^2 \end{aligned}$$

ب- الحقل $\vec{E} = c y z^2 \vec{i}$:

$$\phi = \int_S d\phi = c \int_0^a \int_0^a y z^2 dy dz = c \int_0^a y dy \int_0^a z^2 dz = c \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^a \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^a = \frac{ca^3}{6}$$

لاحظ أن هذا الحقل غير كهربائي، لأن $\text{rot } \vec{E} \neq 0$

ج- الحقل الكهربائي $\vec{E} = c(y\vec{i} + x\vec{j})$:

$$\phi_{S_x} = \int_{S_x} \vec{E} \cdot d\vec{S} ; \phi_{S_y} = \int_{S_y} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

الحقل عند السطح S_x حيث $x=a$ يكون: $\vec{E} = c(y\vec{i} + a\vec{j})$

الحقل عند السطح S'_x حيث $x=0$ يكون: $\vec{E} = cy\vec{i}$

يمثل السطح بشعاع ناظمي عليه، فإذا كان هذا السطح مغلقا فإن أي عنصر سطحي منه يكون متجهها إلى خارج هذا السطح، وعليه فإن:

$$\vec{dS} = dydz \vec{i} \text{ عند السطح } S_x \text{ و } \vec{dS} = -dydz \vec{i} \text{ عند السطح } S'_x.$$

$$\therefore \phi_{S_x} = \int_{S_x} c(y\vec{i} + a\vec{j}) \cdot dy dz \vec{i} = c \int_0^a y dy \int_0^a dz = \frac{ca^3}{2}$$

$$\phi_{S'_x} = \int_{S'_x} cy\vec{i} \cdot (-dy dz \vec{i}) = -c \int_0^a y dy \int_0^a dz = -\frac{ca^3}{2}$$

$$\phi_{S_y} = \int_{S_y} c(a\vec{i} + x\vec{j}) \cdot dx dz \vec{i} = c \int_0^a x dx \int_0^a dz = \frac{ca^3}{2}$$

$$\phi_{S'_y} = \int_{S'_y} cx\vec{j} \cdot (-dx dz \vec{j}) = -c \int_0^a x dx \int_0^a dz = -\frac{ca^3}{2}$$

$$\phi_{S_z} = \int_{S_z} c(y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot dx dy \vec{k} = 0, \quad \phi_{S'_z} = \int_{S'_z} c(y\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (-dx dy \vec{k}) = 0$$

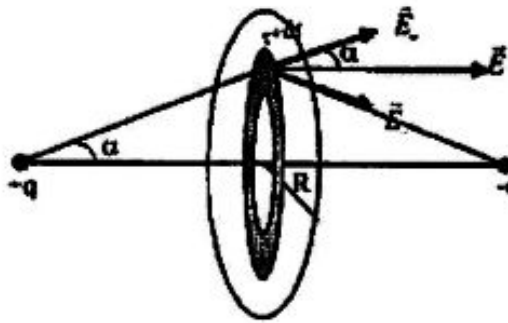
فتدقق هذا الحقل عبر السطح الكلي للعبة هو:

$$\phi = \phi_{S_x} + \phi_{S'_x} + \phi_{S_y} + \phi_{S'_y} + \phi_{S_z} + \phi_{S'_z}$$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sum q_{\text{int}} = 0$$

فالجموع الجبري للشحنة الواقعة داخل هذه اللعبة معدوم.

التمرين 29 :



كل المواضع الواقعة على
الشريط الدائري ذي نصف القطر
 r يكون للحقل فيها قيمة واحدة.

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = 2E_+ \cos \alpha : E_+ = E_-$$

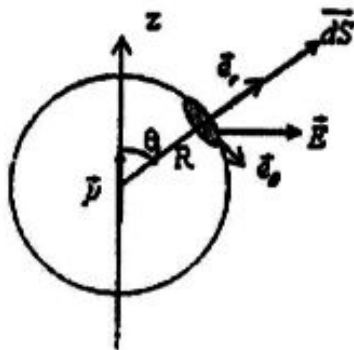
$$E_+ = \frac{Kq}{(r^2 + b^2/4)}, \cos \alpha = \frac{b}{2\sqrt{r^2 + b^2/4}} \therefore E = \frac{Kqb}{(r^2 + b^2/4)^{3/2}}$$

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS = \frac{Kqb}{(r^2 + b^2/4)^{3/2}} \cdot 2\pi r dr$$

$$\therefore \phi = Kqb 2\pi \left[-\frac{1}{(r^2 + b^2/4)^{3/2}} \right]_0^R = \frac{qb}{2\epsilon_0} \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2/4}} \right)$$

التمرين 30 :

أ- عرفنا من التمرين (23) من هذا الفصل، أن الحقل الناشئ عن ثنائي
الأقطاب يُعطى بـ:



$$\vec{E} = \frac{Kp}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$: r \gg a$$

عند سطح الكرة يكون $r=R$

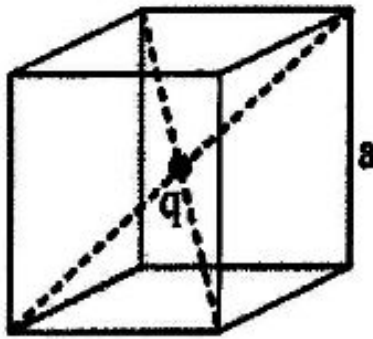
$$\therefore \vec{E} = \frac{Kp}{R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

بـ

$$\begin{aligned}\phi &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{Kp}{R^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot R^2 \sin \theta d\theta \vec{e}_r \\ &= \frac{2Kp}{R} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2Kp}{R} [0,5 \sin^2 \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

كان من الممكن معرفة هذه النتيجة دون إجراء أية حسابات؛ ذلك أن هذا السطح مغلق. وطالما أن المجموع الجبري للشحنات داخله معدوم، فنتيجة التدفق عبره ستكون معدومة حسب نظرية غاوس.

التمرين 31 :



١- الأوجه الستة للمكعب متماثلة

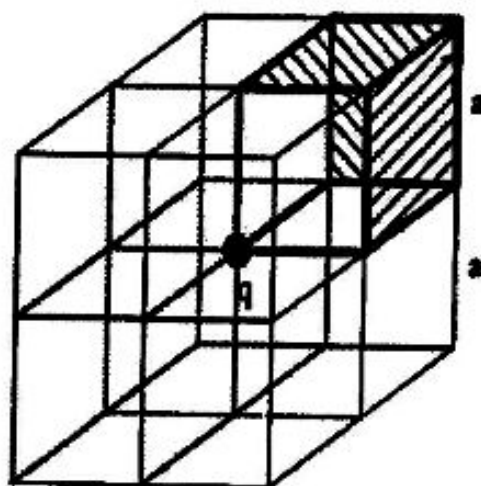
الوضعية بالنسبة للشحنة المركزية، وعليه فإن التدفق عبر كل منها متساو، ويكون التدفق عبر كل وجوه المكعب مساويا ستة أضعاف التدفق عبر أحدها:

$$\phi = 6\phi_0$$

أوجه المكعب معا تشكل سطحاً مغلقاً، إذاً:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = 6\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

ب-

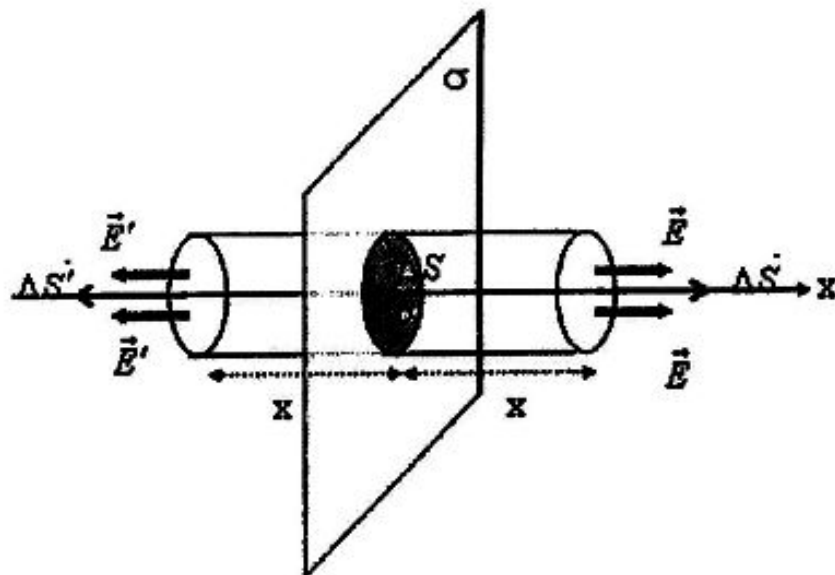


لاحظ أنه لا تدفق إلا عبر الأسطح الثلاثة المواجهة للشحنة، و هي الأسطح المظلمة، أما عبر الثلاثة الباقية فمعدوم، لأن خطوط الحقل واقعة عليها. لاحظ أيضا أنه يمكن إنشاء مكعب أكبر، يكون طول ضلعه ضعف طول ضلع المكعب الأصغر، وتكون الشحنة q في مركزه، كما بالشكل، فالتدفق عبر أحد وجوه المكعب الأكبر يكون كما في الحالة الأولى، أي $\phi_0 = \frac{q}{6\epsilon_0}$ وهذا الوجه مُشكّل من أربعة أوجه للمكعب الأصغر، أي:

$$\frac{q}{6\epsilon_0} = 4\phi' \Rightarrow \phi' = \frac{q}{24\epsilon_0}$$

التمرين 32 :

يكون الحقل عند موضعين متناظرين بالنسبة للمستوي المشحون، متساويًا مقدارًا، ومتعاكسًا اتجاهًا.



وحيث أن المستوي ممتد إلى المالا نهاية على المحور y وعلى المحور z ، فإن جميع المواضع التي لها الإحداثي x نفسه يكون الحقل عندها متماثلاً؛ وعليه سنختار سطح غاوس ما بالشكل.

$$\begin{aligned} \therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{lateral surface}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{right base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{left base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 (\vec{E} \perp d\vec{S}) + E \Delta S (\vec{E} \parallel d\vec{S}) + E' \Delta S' (\vec{E}' \parallel d\vec{S}') \\ &= E \Delta S + E' \Delta S' = 2E \Delta S \quad : E = E', \Delta S = \Delta S' \end{aligned}$$

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \Delta S = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \quad : x > 0 \quad ; \quad \vec{E}' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \quad : x < 0$$

لندرس الكمون كذلك.

$$x \geq 0 : dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + C$$

يحدد الثابت C حسب اختيارنا لمبدأ الكمون.

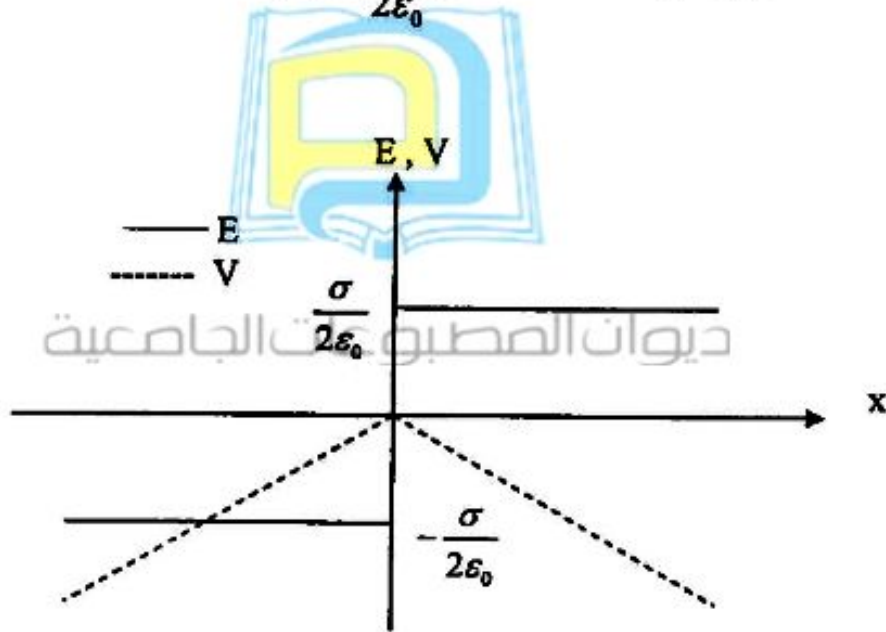
لاحظ أنه من غير المناسب في هذه المسألة اختيار مبدأ الكمون عند المالاهاية، وكذلك الحال لكل التوزيعات الممتدة إلى المالاهاية؛ وسنختاره لتبسيط معدوما عند $x=0$ ، فيكون $C=0$.

$$\therefore V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x \quad : x \geq 0$$

$$x \leq 0 : dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx \Rightarrow V' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x + C'$$

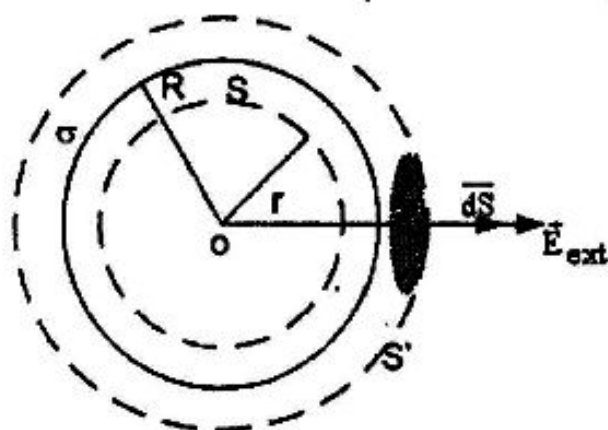
دالة الكمون مستمرة، لذا فإن: $V'(x=0) = V(x=0) \Rightarrow C' = 0$

$$\therefore V'(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x \quad : x \leq 0$$



التمرين 33 :

الكرة المشحونة سطحيا بانتظام:



حساب الحقل:

خارج الكرة: $r > R$

كل المواضع الواقعة على سطح كرة، متماثلة بالنسبة لهذا التوزيع الكروي؛ وعليه فسنختار سطح غاوس كرة متمركزة مع الكرة المشحونة ولها نصف قطر r .

$$\phi' = \oint_{S'} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \oint_{S'} E_{\text{ext}} \cdot dS \quad : (\vec{E}_{\text{ext}}, d\vec{S}) = 0$$

$$= E_{\text{ext}} \oint_{S'} dS = E_{\text{ext}} 4\pi r^2 = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$$\sum q_i = \sigma 4\pi R^2$$

$$\therefore E_{\text{ext}} 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حيث $q = \sigma 4\pi R^2$ الشحنة الكلية التي تحملها الكرة.

$$\therefore \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r : \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

داخل الكرة: $r < R$

$$\phi = \oint_S \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = E_{int} 4\pi r^2 = 0$$

لأن كرة غاوس الداخلية لا تحوي أية شحنة.

$$\therefore E_{int} = 0$$

حساب الكمون:

داخل الكرة: $r > R$

$$dV_{ext} = -\vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + C' : V_{ext}(\infty) = C' = 0$$

$$\therefore V_{ext}(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

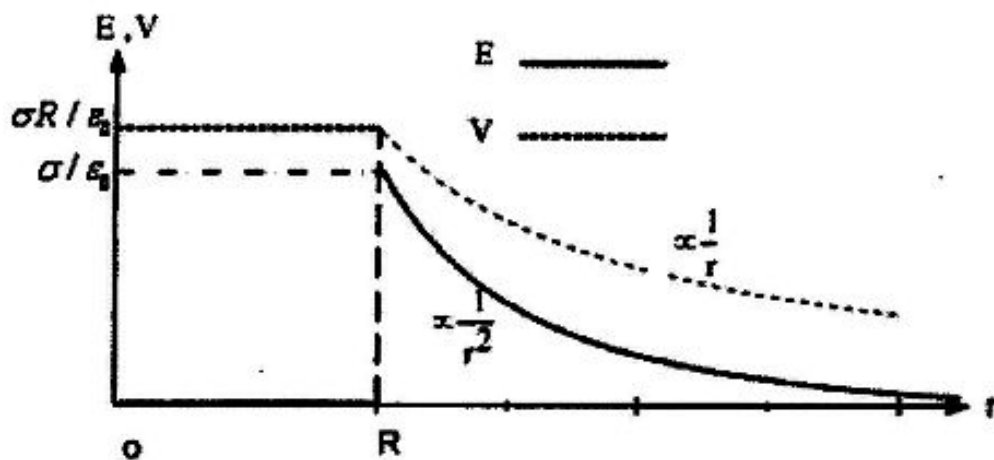
داخل الكرة: $r < R$

$$dV_{int} = -\vec{E}_{int} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_{int} = C$$

$$V_{int}(R) = V_{ext}(R)$$

$$C = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$\therefore V_{int}(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$



الكرة المشحونة حيميا بانتظام:

حساب الحقل:

خارج الكرة: $r > R$

سنختار سطح غاوس كما اخترناه في حالة الكرة المشحونة سطحيا بانتظام.

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\text{ext}} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

حيث $q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ الشحنة الكلية التي تحملها الكرة.

ديوان المطبوعات الجامعية

$$\therefore \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

داخل الكرة: $r < R$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\text{int}} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_{\text{int}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

$$\therefore \vec{E}_m = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

حساب الكمون:

خارج الكرة: $r > R$

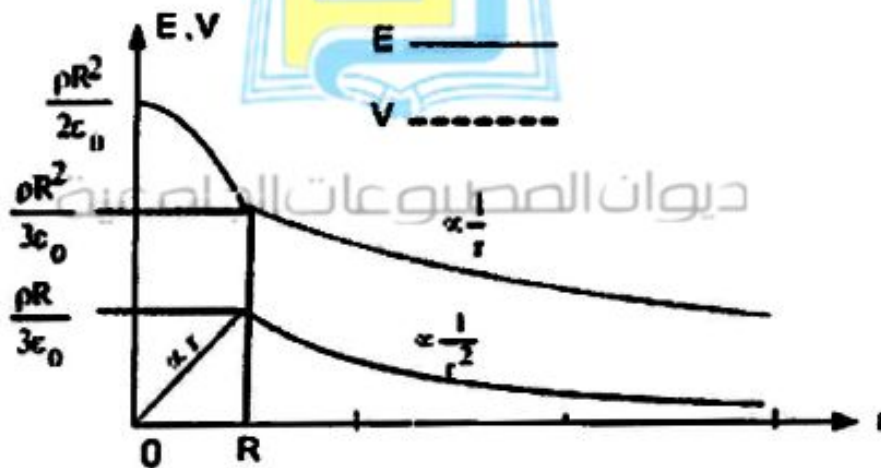
$$dV_m = -\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_m = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C' ; V_m(\infty) = C' = 0$$

$$\therefore V_m(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

داخل الكرة: $r < R$

$$dV_m = -\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr \Rightarrow V_m = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + C ; V_m(R) = V_m(R)$$

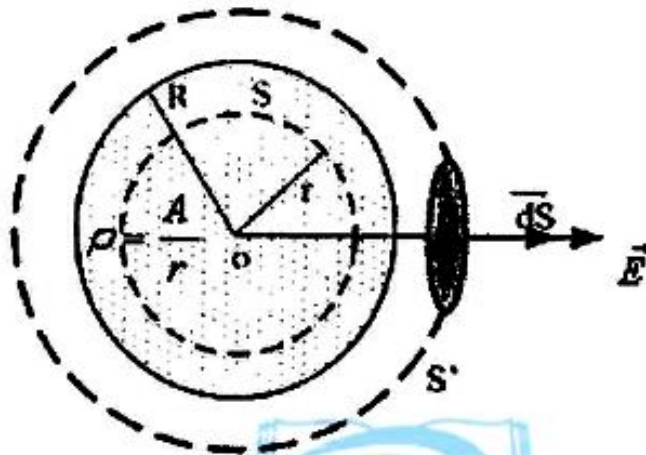
$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \therefore V_m(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$



التمرين 34:

$\rho = \frac{A}{r}$ تابعة لـ r فقط، وعليه فجميع المواضع الواقعة على سطح كرة نصف قطرها r متماثلة؛ وكذلك الحال لكل توزيع كروي ثابت أو تابع لـ r فقط.

إذا سنختار سطح غاوس كرة متركزة مع هذا التوزيع الكروي، سواءً داخله أو خارجه.



$$r < R: \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 \quad \because (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$$

$$= \frac{\int_0^r \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \int_0^r r dr = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \frac{r^2}{2} \Rightarrow E = \frac{A}{2\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{A}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$r > R: \oint_{S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S} = E' 4\pi r^2 = \frac{\int_0^R \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} \frac{R^2}{2} \Rightarrow E' = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore \vec{E}' = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{A}{2\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{لاحظ أنه يمكن كتابة:}$$

$$q = \int_0^r \rho d\tau = \int_0^r \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^r r dr = 2\pi A r^2 \quad \text{حيث:}$$

مقدار الشحنة الواقعة داخل الكرة ذات نصف القطر r .

$$\vec{E}' = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{أيضا:}$$

$$q' = \int_0^R \rho d\tau = \int_0^R \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^R r dr = 2\pi A R^2 \quad \text{حيث:}$$

مقدار الشحنة التي تحملها الكرة كلها.

من خلال هاتين الملاحظتين يمكن الاستنتاج أن الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع كروي منتظم (ثابت)، أو تابع لـ r فقط، عند المواضع الواقعة خارجه، يكافئ حقلا ناشئا عن شحنة نقطية واقعة عند مركز التوزيع، وقيمتها تساوي قيمة الشحنة الكلية لهذا التوزيع. وللمواضع الواقعة داخله تكون لها قيمة الشحنة التي تحملها الكرة التي نصف قطرها يساوي بُعد هذا الموضع عن المركز.

ديوان المطبوعات الجامعية

حساب الكمون:

$$r \geq R: \quad dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V' = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} + C'$$

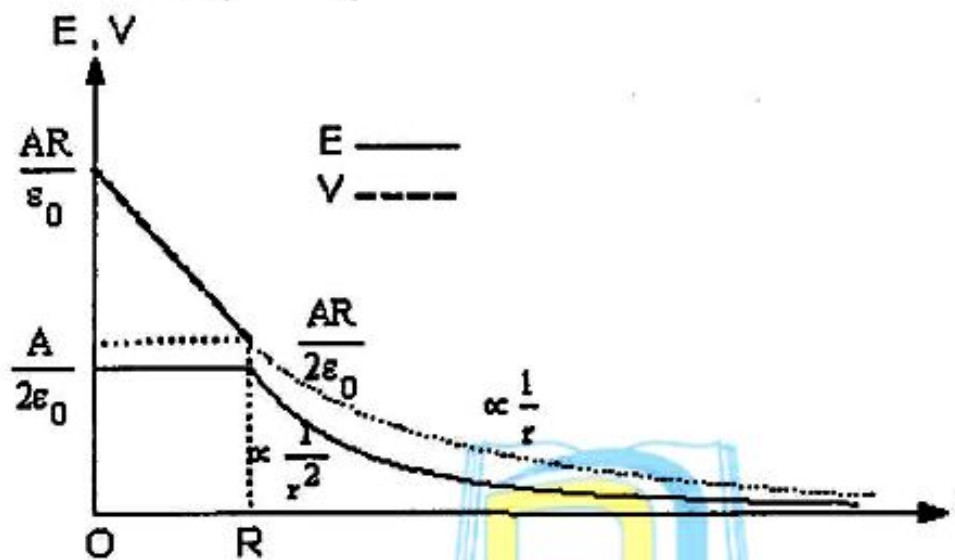
باختيار $V'(\infty) = 0$ يكون: $C' = 0$

$$\therefore V'(r) = \frac{AR^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$r \leq R : \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{A}{2\epsilon_0} dr \Rightarrow V = -\frac{A}{2\epsilon_0} r + C$$

$$V'(R) = V(R) \Rightarrow \frac{AR}{2\epsilon_0} = -\frac{AR}{2\epsilon_0} + C \Rightarrow C = \frac{AR}{\epsilon_0}$$

$$\therefore V = -\frac{A}{2\epsilon_0} r + \frac{AR}{\epsilon_0}$$



التمرين 35 :

التمثيل في هذه المسألة أسطوانة؛ أي أن

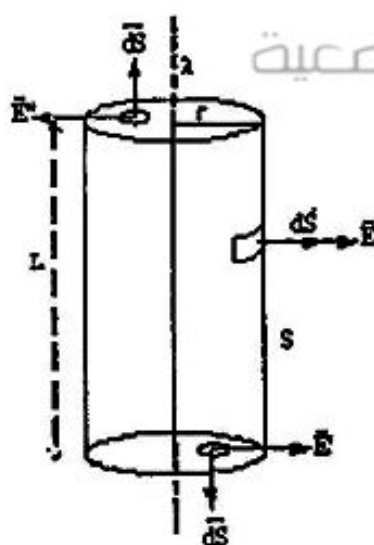
جميع المواضع الواقعة على سطح أسطوانة

محورها الخط المستقيم المشحون، ننظر إلى هذا

التوزيع الشحني بالكيفية نفسها. وعليه فسنختار

سطح غاوس بشكل أسطوانة محورها الخط

المشحون، وطولها L ونصف قطر قاعدتها r .



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{lateral side}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{upper base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lower base}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E 2\pi r L (\vec{E} \parallel d\vec{S}) + 0 (\vec{E} \perp d\vec{S}) + 0 (\vec{E} \perp d\vec{S})$$

$$\phi = E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \therefore \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

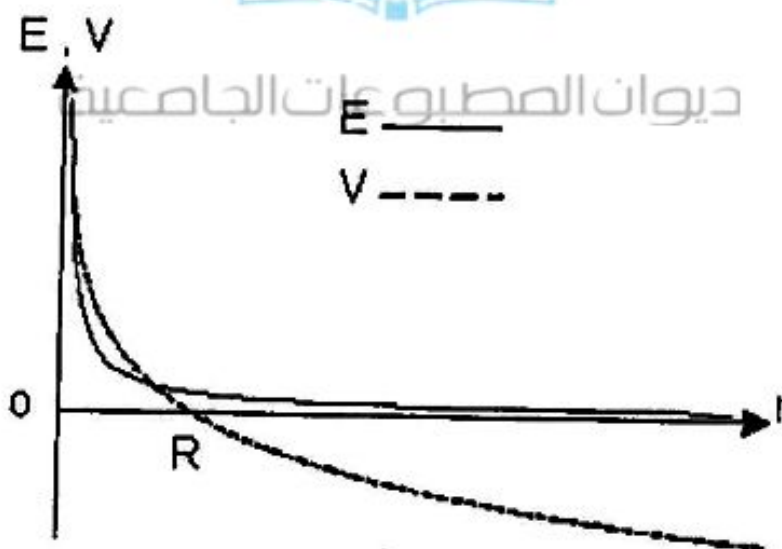
حيث r هنا تعني البعد عن محور الأسطوانة، لا البعد عن مركز الإحداثيات؛ وكذا \vec{e}_r ، تعني متجه الوحدة في اتجاه تزايد الإحداثي r .

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C \quad \text{حساب الكمون:}$$

يحدد الثابت C حسب اختيارنا لمبدأ الكمون.

لو اخترنا مبدأ الكمون عند المالا نهاية، لكانت حالة عدم تعيين، وكذلك لو اخترناه عند $r=0$ ؛ أي على الخط المشحون ذاته. لذا ليس من المناسب اختياره عند ذينك الموضعين، بل سنختار أي مكان آخر، وليكن $r=R_0$. إذا:

$$V(R_0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_0 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R_0 \quad \therefore V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{r}$$



التمرين 36 :

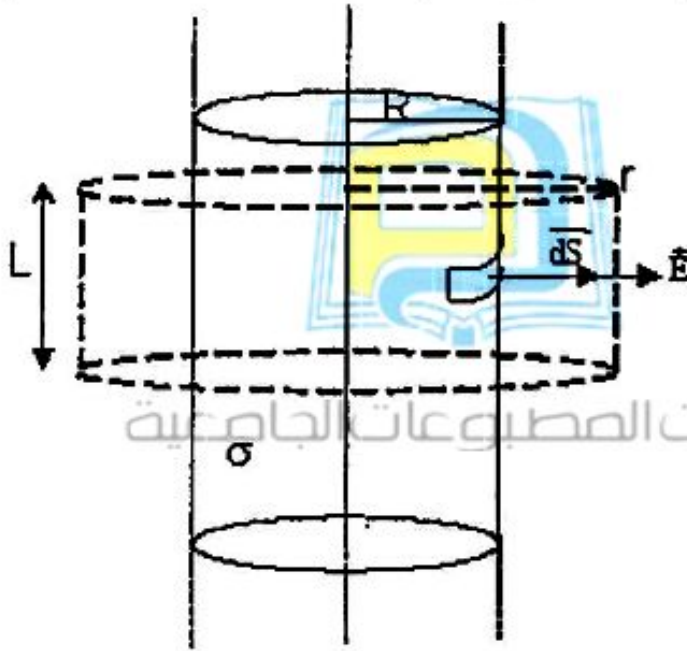
التمائل هنا أسطواناني أيضا، لذا فإن سطح غاوس سيختار بشكل اسطوانة متمحورة مع الاسطوانة المشحونة، سواء داخلها أو خارجها.
الأسطوانة المشحونة سطحيا بانتظام:

خارج الاسطوانة: $r > R$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \cdot 2\pi R L \Rightarrow E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \therefore \vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

داخل الاسطوانة: $r < R$

$$\phi = \oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{S} = E' 2\pi r L = 0 \Rightarrow E' = 0$$



حساب الكمون:

$$r \geq R: \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} dr \Rightarrow V = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + C$$

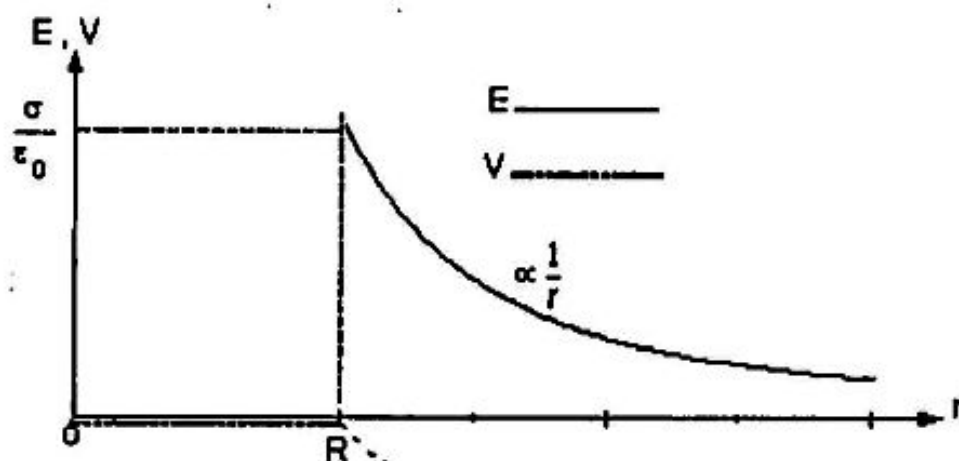
سنختار مبدأ الكمون عند سطح الاسطوانة؛ أي $r = R$. إذا:

$$V(R) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln R$$

$$\therefore V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

$$r \leq R: \quad dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V' = C'; V'(R) = V(R) \Rightarrow C' = 0$$

$$\therefore V'(r) = 0$$



**الأسطوانة المشحونة حجمياً بانتظام:

خارج الأسطوانة: $r > R$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi R^2 L \Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

داخل الأسطوانة: $r < R$

$$\phi = \oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{S} = E' 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 L \Rightarrow E' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

$$\therefore \vec{E}' = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{e}_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}$$

حساب الكمون:

$$r \geq R: \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} dr \Rightarrow V = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C$$

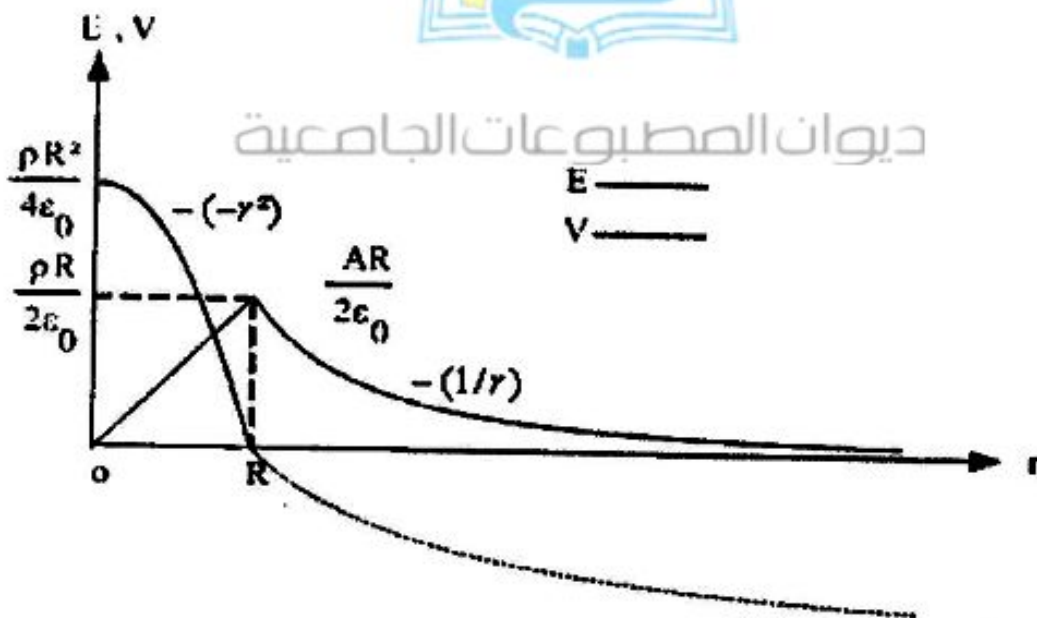
سنختار مبدأ الكمون عند سطح الاسطوانة؛ أي $r = R$ ، إذا:

$$V(R) = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \ln R + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \ln R \therefore V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

$$r \leq R: \quad dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r dr \Rightarrow V' = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C'$$

$$V'(R) = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + C' \Rightarrow C' = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$\therefore V'(r) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$



التمرين 37 :

الأسطوانة مشحونة حجميا بانتظام بكثافة $\rho = A/r$ ، فالمسألة ذات تناظر اسطواني، وتعالج كما في المسألة السابقة تماما، إلا أن ρ تابعة لـ r .

خارج الأسطوانة: $r > R$

$$\begin{aligned}\phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{A}{r} 2\pi r L dr = \frac{A 2\pi L}{\epsilon_0} \int_0^R dr \\ &= \frac{A 2\pi L R}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{A R}{\epsilon_0 r} \quad \therefore \vec{E} = \frac{A R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r\end{aligned}$$

داخل الأسطوانة: $r < R$

$$\begin{aligned}\phi &= E' 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho d\tau = \frac{A 2\pi L}{\epsilon_0} \Rightarrow E' = \frac{A}{\epsilon_0} \quad \therefore \vec{E}' = \frac{A}{\epsilon_0} \vec{e}_r \\ \vec{E} &= \frac{A R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r\end{aligned}$$

لاحظ أنه يمكن كتابة:

$$\lambda = A 2\pi R \quad \text{حيث: } \lambda L = \int_0^R \rho d\tau = A 2\pi R L \quad \text{أي: } \lambda = A 2\pi R$$

وهي تمثل الكثافة الطولية؛ أي مقدار الشحنة التي تحملها وحدة الأطوال من هذه الأسطوانة.

$$\begin{aligned}\text{أيضا: } \lambda' L &= \int_0^r \rho d\tau = A 2\pi r L \quad \text{حيث: } \vec{E} = \frac{A}{\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \\ \lambda' &= A 2\pi r \quad \text{أي: } \lambda' = A 2\pi r\end{aligned}$$

وهي تمثل الكثافة الطولية للأسطوانة الداخلية، ذات نصف القطر r .

من خلال هاتين الملاحظتين يمكن الاستنتاج أن الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع اسطواني منتظم أو تابع فقط لـ r ، البعد عن المحور، عند المواضع

الواقعة خارجه، يكافئ حقلا ناتجا عن مستقيم لانهائي الطول، واقع عند محور هذا التوزيع الأسطواني، وله كثافة طولية كما هو مبين سابقا.

حساب الكمون:

$$r \geq R: \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{AR}{\epsilon_0} \frac{1}{r} dr \Rightarrow V = -\frac{AR}{\epsilon_0} \ln r + C$$

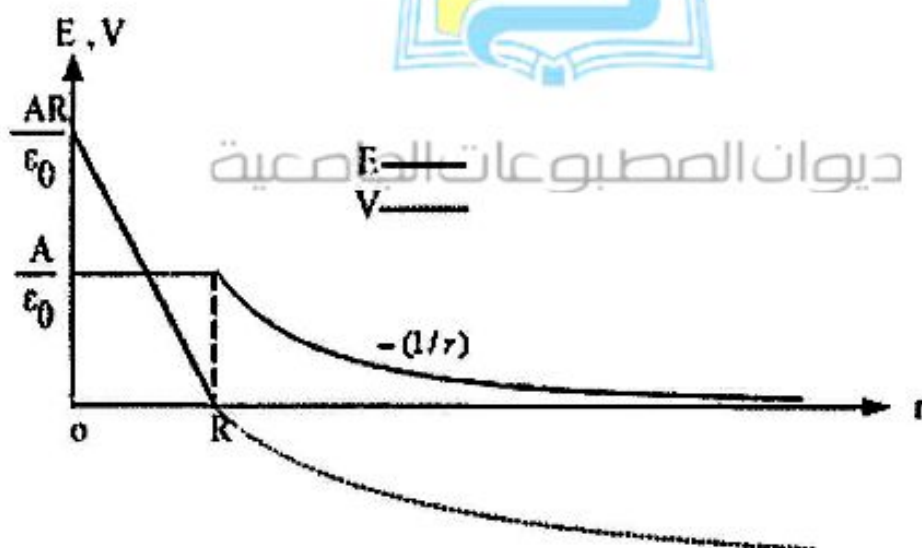
لو اخترنا $V(R) = 0$ يكون: $C = \frac{AR}{\epsilon_0} \ln R$ وبالتالي:

$$V(r) = \frac{AR}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

$$r \leq R: \quad dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{A}{\epsilon_0} dr \Rightarrow V' = -\frac{A}{\epsilon_0} r + C'$$

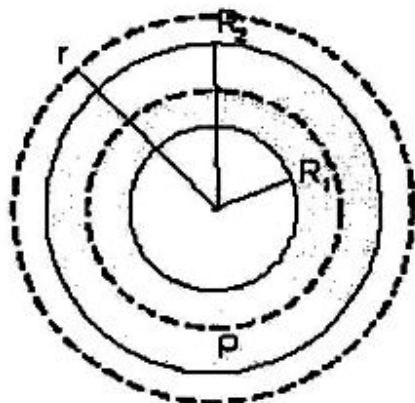
$$V'(R) = -\frac{AR}{\epsilon_0} + C' = V(R) = 0 \Rightarrow C' = \frac{AR}{\epsilon_0}$$

$$\therefore V'(r) = -\frac{A}{\epsilon_0} r + \frac{AR}{\epsilon_0} = \frac{A}{\epsilon_0} (R - r)$$



التمرين 38 :

لحل هذه المسألة يمكن استخدام نظرية غاوس على سطوح نصف قطرها r حيث $r > R_1$ ، $R_2 < r < R_1$ ، $r < R_2$. كما يمكن استخدام النتيجة التي استنتجناها في التمرين 34.



المنطقة الخارجية: $r > R_1$ الشحنة كلها واقعة داخلها:

$$q_i = \int_{R_1}^{R_1} \rho d\tau = \rho \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_2^3) \quad \therefore \vec{E} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

المنطقة الوسطى: $R_1 > r > R_2$ الشحنة الواقعة داخل هذه المنطقة:

$$q' = \int_{R_2}^r \rho d\tau = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_2^3) \quad \therefore \vec{E}' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) \vec{e}_r$$

المنطقة الداخلية: $r < R_2$ الشحنة الواقعة داخل هذه المنطقة معدومة،

$$\vec{E}'' = 0 \quad \text{إذاً:}$$

حساب الكمون:

$$r \geq R_1: \quad V(r) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \quad : V(\infty) = 0$$

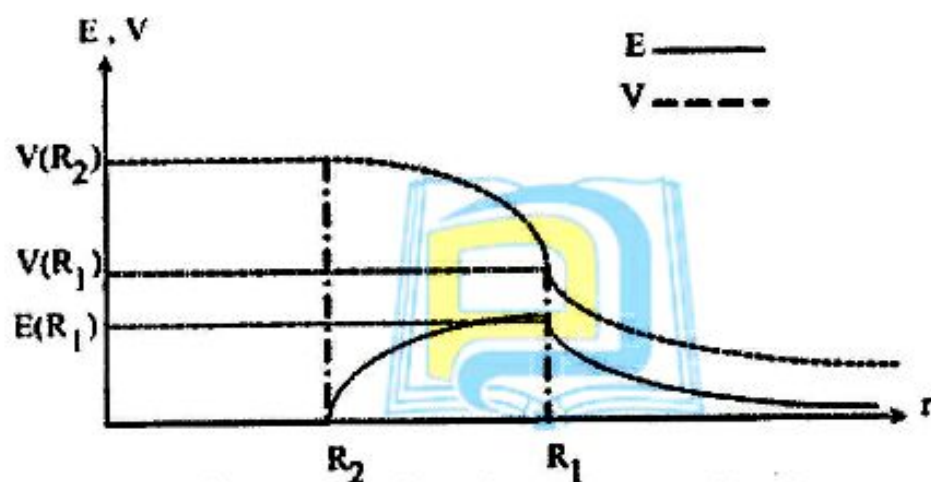
$$R_1 > r > R_2: \quad dV' = -\vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) dr$$

$$\Rightarrow V' = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r} \right) + C'$$

$$V'(R_1) = V(R_1) \Rightarrow C' = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} \quad \therefore V'(r) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r} \right) + \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0}$$

$$r < R_2: \quad dV'' = 0 \Rightarrow V'' = C''$$

$$V''(R_2) = V'(R_2) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2) \quad \therefore V''(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2)$$



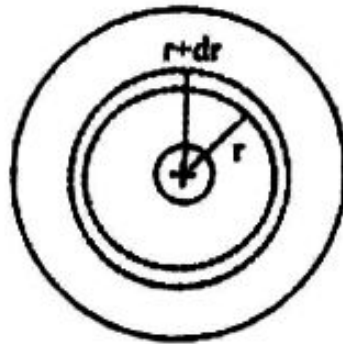
ديوان المطبوعات الجامعية

التمرين 39 :

$$\rho = A e^{-2r/a_0} \text{ C/m}^3; a_0 = 0.53 \text{ \AA}$$

أ- مقدار الشحنة الموجودة بين الكرتين ذواتي نصفي القطرين r و $r+dr$ هو: $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ فالشحنة الإلكترونية الكلية دون شحنة النواة:

$$q_i = \int_{\text{all space}} dq = \int_0^\infty \rho d\tau = \int_0^\infty \rho 4\pi r^2 dr = -|e| = 4\pi A \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr$$



يمكن إنجاز هذا التكامل بالتجزئة، فيكون:

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \left[-\left(\frac{a_0}{2} r^2 + \frac{a_0^2}{2} r + \frac{a_0^3}{4}\right) e^{-2r/a_0} \right]_0^{\infty} = \frac{a_0^3}{4}$$

$$\therefore q_1 = 4\pi A \frac{a_0^3}{4} = A\pi a_0^3 = -|e| \Rightarrow A = -\frac{|e|}{\pi a_0^3} \therefore \rho = -\frac{|e|}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

ب- مقدار الشحنة الإلكترونية داخل الكرة ذات نصف القطر a_0 :

$$q_0 = \int_0^{a_0} \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_0^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

$$= 4\pi A \left[-\left(\frac{a_0}{2} r^2 + \frac{a_0^2}{2} r + \frac{a_0^3}{4}\right) e^{-2r/a_0} \right]_0^{a_0} = -|e| \left(1 - \frac{5}{e^2}\right) \approx -0.3233|e|$$

ج. حيث أن التوزيع تابع لـ r فقط، فإننا سنستخدم نظرية غاوس لحساب الحقل.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\int_0^r \rho d\tau + |e| \right)$$

حيث يمثل المقدار $|e|$ شحنة النواة، وهي واقعة أيضا داخل سطح غاوس.

$$\begin{aligned}
E4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(4\pi A \int_0^r r^2 e^{-2r/a_0} dr + |e| \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \left(4\pi A \left[-\left(\frac{a_0}{2}\right)r^2 + \frac{a_0^2}{2}r + \frac{a_0^3}{4} \right] e^{-2r/a_0} \right)_0^{a_0} + |e| \\
\Rightarrow \vec{E} &= \frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0 r} + \frac{1}{2r^2} \right) e^{-2r/a_0} \vec{e}_r
\end{aligned}$$

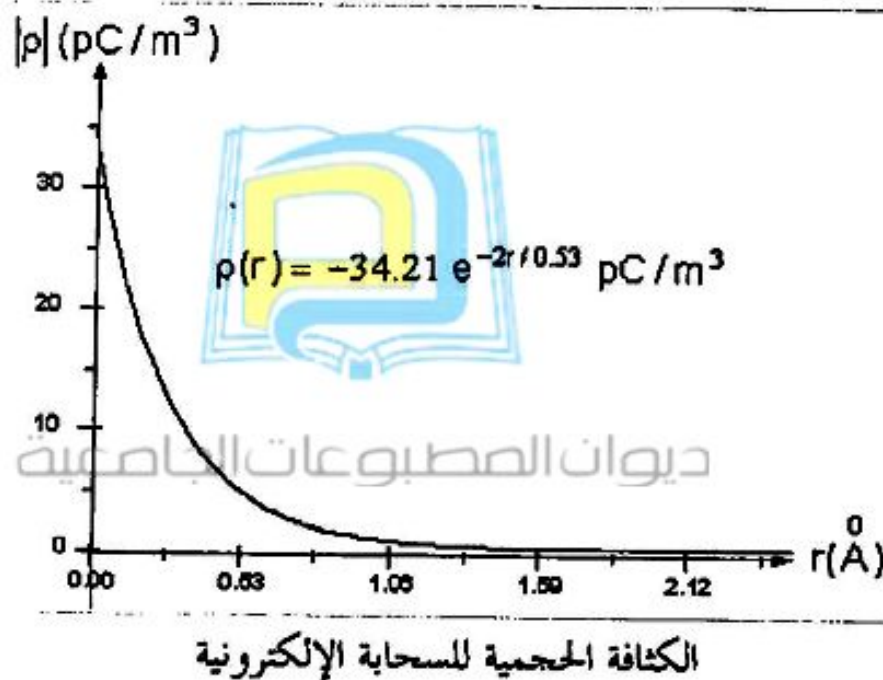
حساب الكمون:

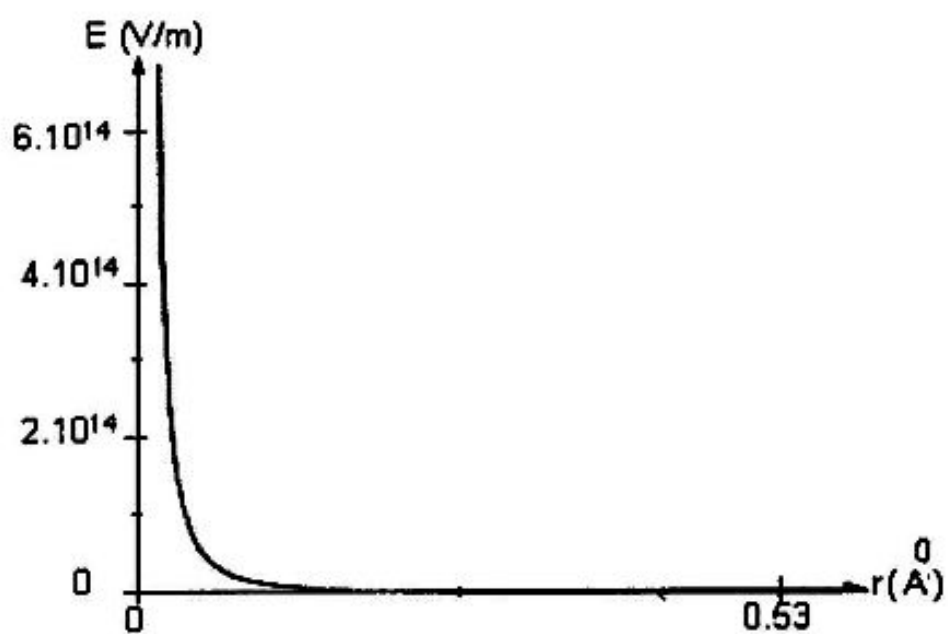
$$\begin{aligned}
dV &= -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0 r} + \frac{1}{2r^2} \right) e^{-2r/a_0} dr \\
\therefore V &= -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a_0^2} \int e^{-2r/a_0} dr + \frac{1}{a_0} \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r} dr + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r^2} dr \right] \\
&= -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} I + \frac{1}{a_0} I' + \frac{1}{2} I'' \right) \\
I &= \int e^{-2r/a_0} dr = -\frac{a_0}{2} e^{-2r/a_0}; I' = \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r} dr; I'' = \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r^2} dr
\end{aligned}$$

لنحسب I' بالتجزئة:

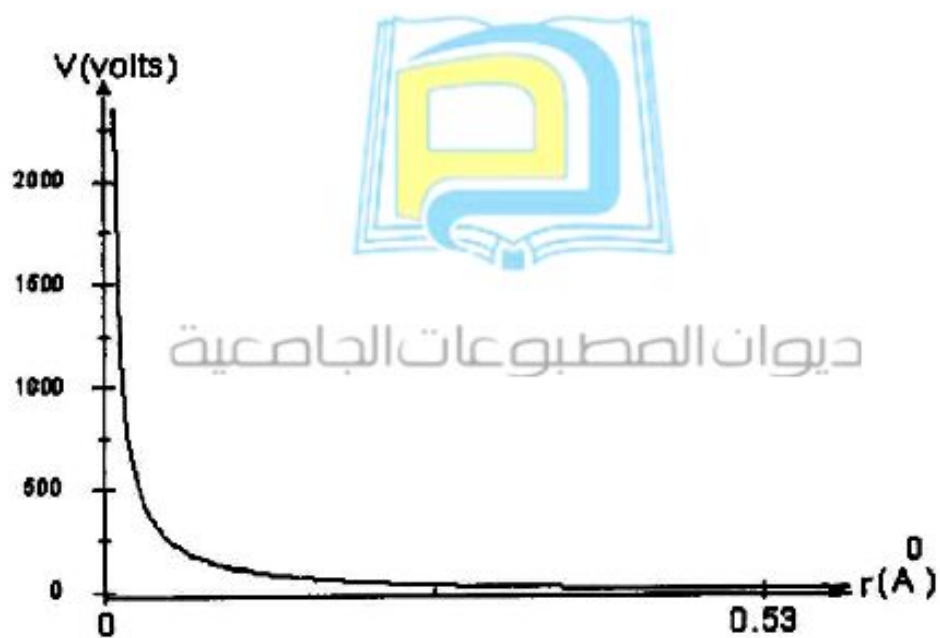
$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{r} \Rightarrow dg = -\frac{1}{r^2} dr, \quad df = e^{-2r/a_0} dr \Rightarrow f = -\frac{a_0}{2} e^{-2r/a_0} \\
\therefore I' &= gf - \int f dg = -\frac{a_0}{2r} e^{-2r/a_0} - \frac{a_0}{2} \int \frac{e^{-2r/a_0}}{r^2} dr = -\frac{a_0}{2r} e^{-2r/a_0} - \frac{a_0}{2} I''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore V &= -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} I + \frac{1}{a_0} \left(-\frac{a_0}{2r} e^{-2r/a_0} - \frac{a_0}{2} I'' \right) + \frac{1}{2} I'' \right) \\
 &= -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0^2} I - \frac{1}{2r} e^{-2r/a_0} \right) = -\frac{|e|}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2a_0} e^{-2r/a_0} - \frac{1}{2r} e^{-2r/a_0} \right) \\
 &= \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2r/a_0} + C \\
 V(\infty) &= 0 \Rightarrow C = 0 \quad \therefore V = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_0} \right) e^{-2r/a_0}
 \end{aligned}$$



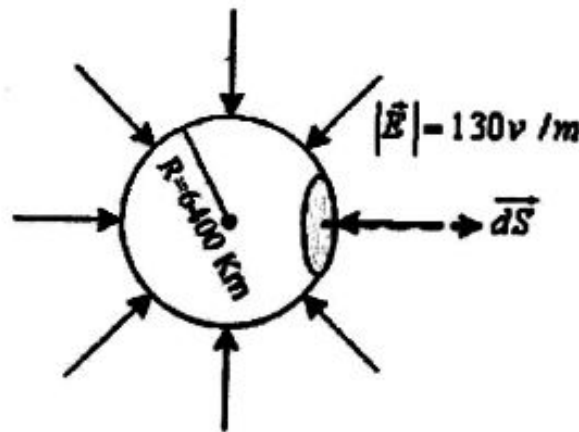


شدة الحقل الكهربائي حول النواة



الكمون الكهربائي حول النواة

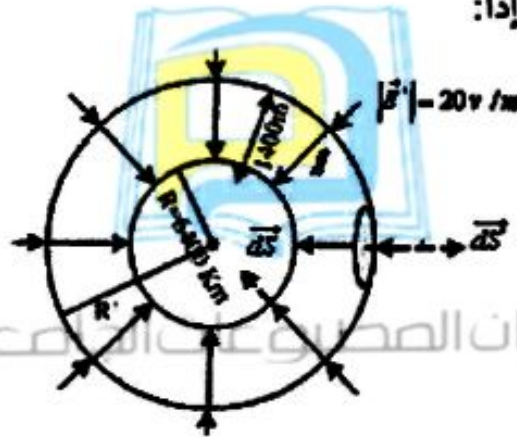
التمرين 40 :



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E 4\pi R^2 = \frac{q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow q_i = -E 4\pi R^2 \epsilon_0 = -592183.68 C .$$

حيث: $(\vec{E}, d\vec{S}) = 180^\circ$

ب. لنعتبر الآن السطح المغلق الذي يحصر ما بين الكرتين ذواتي نصفي القطرين R و R' ، إذا:



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S}'; \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi R^2 : (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$$

$$\int_{S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = -E' \cdot 4\pi R'^2 : (\vec{E}', d\vec{S}') = 180^\circ$$

$$\therefore \phi = 4\pi(ER^2 - E'R'^2) = \frac{q'}{\epsilon_0} \Rightarrow q' = 4\pi\epsilon_0(ER^2 - E'R'^2)$$

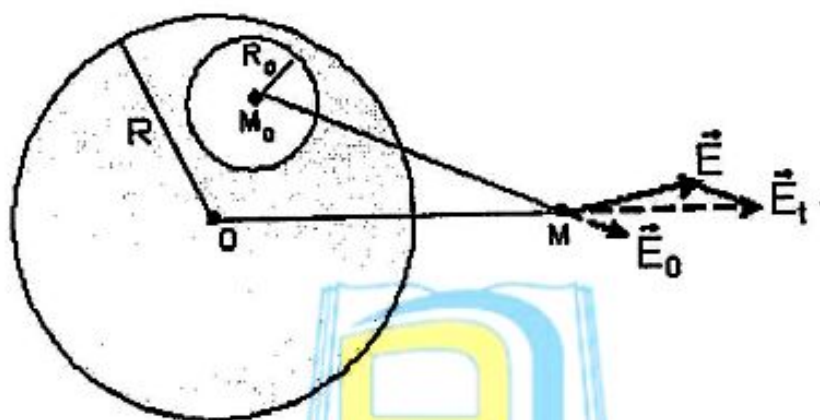
$$R = 6400.10^3 \text{ m} ; R' = R + 1400 = (6400.10^3 + 1400) \text{ m}$$

$$\therefore q' = 500582.39 \text{ C}$$

$$\rho' = \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi(R'^3 - R^3)} \cong 6,94.10^{-13} \text{ C/m}^3$$

التمرين 41 :

لو طرحنا الحقل \vec{E}_0 الناشئ عن الكرة الصغيرة المقتطعة ذات نصف القطر R_0 من الحقل الكلي \vec{E}_1 الناشئ عن كل الكرة ذات نصف القطر R ، طرحاً شعاعياً، حصلنا على الحقل \vec{E} الناشئ عن الجزء المتبقي، وهو المطلوب.



$$\therefore \vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_1 = Kq_1 \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|^3} ; \vec{E}_0 = Kq_0 \frac{\overrightarrow{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|^3}$$

$$\text{حيث: } q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 ; q_0 = \rho \frac{4}{3}\pi R_0^3 ; K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ; \overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

. إحداثيات الموضع M ، و (x_0, y_0, z_0) إحداثيات الموضع M_0 .

بعد التعويضات يكون:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \times \left[\left(\frac{R x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{R_0(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right) \vec{i} \right. \\ + \left(\frac{R y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{R_0(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right) \vec{j} \\ \left. + \left(\frac{R z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{R_0(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right) \vec{k} \right]$$

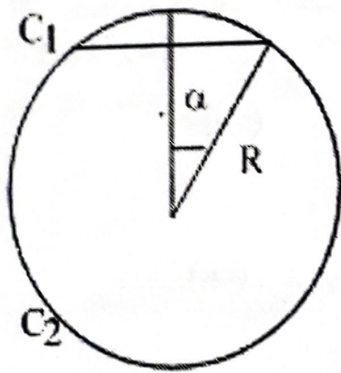


ديوان المطبوعات الجامعية

التعريف 1 :
كرة معدنية نصف قطرها 1 م تحمل شحنة كهربائية قدرها 10-9 كولوم. نوصلها بخيط ناقل نصف بكرة نصف قطرها 0.3 م. تكون هذه الكرة في البداية غير مشحونة، وموضوعة على مسافة كبيرة من الكرة الأولى؛ لإهمال التأثير المتبادل بينهما.

- كم ستصبح شحنة كل كرة بعد التوصيل والاتزان؟
ما طاقة الكرة المشحونة قبل التوصيل؟ - ما طاقة الجملة بعد التوصيل؟

التعريف 2 :



تشكل كرة ناقلة ناقلة نصف قطرها R من تجمع قبعتين كرويتين C_1 و C_2 ، كما بالشكل. أكتسبت هذه الكرة شحنة q .

أ- أوجد الحقل والكمون الكهربائيين خارج الكرة وداخلها، معتبرا الكمون معدوما في المالا نهاية.

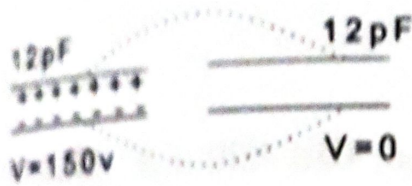
ب- ما مقدار الحقل الكهربائي عند الجوار الخارجي المباشر لسطح الكرة، والجوار الداخلي المباشر له؟ إستنتج قيمة الحقل الكهربائي عند السطح تماما.

ج- أوجد القوة التي يتعرض لها عنصر سطحي من سطح هذه الكرة. أوجد القوة الكلية التي تتعرض لها القبة C_1 . إستنتج القوة الكلية التي تتعرض لها القبة C_2 .

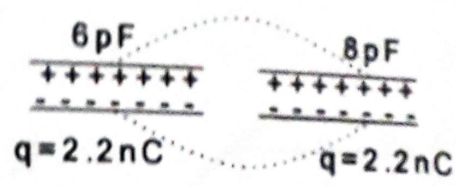
د- لنفترض الآن أن $\alpha = 90^\circ$ ، وأنا أدخلنا في الحسابات قوى التجاذب الكلي، فإذا كانت m كتلة الكرة، فما مقدار كثافة الشحنة السطحية σ الكافية لفصل نصف الكرة عن بعضهما؟

التمرين 3 :
فقاعة صابون كروية الشكل ومتوازنة. اكتسبت شحنة q فازداد نصف قطرها. ما مقدار الشحنة التي إذا وضعت في مركز الفقاعة عادت إلى وضع توازنها الأول؟

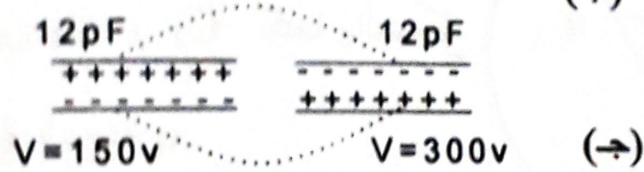
التمرين 4 :
توضح الأشكالُ المقابلةُ الحالاتَ الابتدائيةَ لكل مكثف، ومثل الخطوط المتقطعة كيفية التوصيل بينها.



(أ)



(ب)



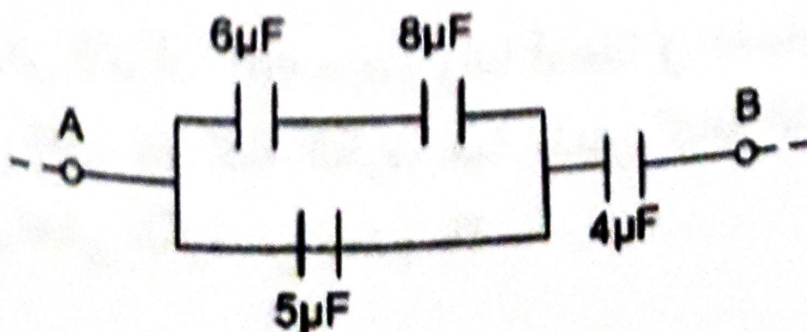
(ج)

أحسب لكل حالة:

- شحنة كل مكثفة، وفرق الكمون بين لبوسيهما، بعد التوصيل.
- الطاقة الداخلية للمجموعة قبل التوصيل وبعده. قارن واطرح.

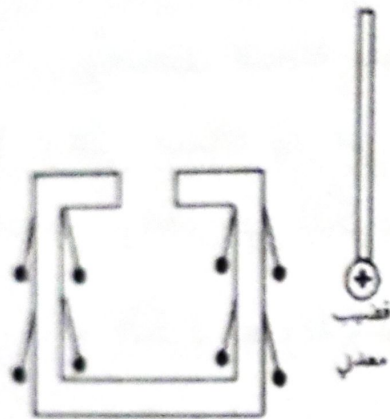
التمرين 5 :

أوجد المكثف المكافئ بين النقطتين A و B للشكل المقابل.



توصّل النقطتان A و B بطرفي مولد فرق الكمون بين طرفيه 1000 V .
 يوصل للمولد وتوصّل النقطتان ببعضهما بسلك ناقل.
 احسب كمية الشحنة المنتقلة، والطاقة المتحررة.

التمرين 6 :



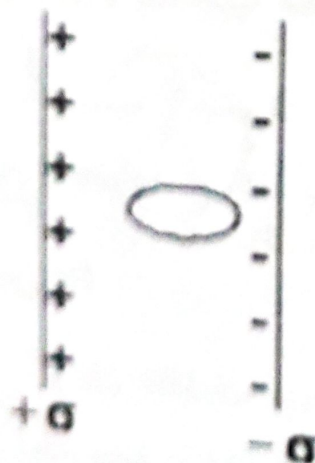
تعلق نواصات معدنية صغيرة على الجدارين،
 الداخلي والخارجي لصندوق معدني أجوف متعاد
 كهربائياً، كما بالشكل.

بعد شحن القضيب، ندخله داخل الصندوق
 بامساكه بمقبض عازل، ثم نجعله يلامس الجدار الداخلي للصندوق.

- مثل الأوضاع الجديدة التي تأخذها النواصات.

- أعد الإجابة عن هذا الطلب، فيما إذا جعل القضيب المشحون ملامساً
 للجدار الخارجي للصندوق.

التمرين 7 :



مستويان ناقلان ومتوازيان، مشحونان

بأنظام بكثافتين سطحيّتين $+\sigma$ و $-\sigma$ ،
 حيث $\sigma > 0$.

- أرسم خطوط الحقل، وسطوح تساوي
 الكمون، بين المستويين.

- * لنضع بين المستويين ناقلًا متعادلاً، كما بالشكل السابق.
- مثل التوزيع الجديد للشحنات على المستويين، والتاقل الثالث.
- ارسم خطوط الحقل و سطوح تساوي الكمون، من جديد.

التصريح 8 :

وُضعت شحنة نقطية q داخل كرة ناقلية رقيقة الجدران، نصف قطرها R ، وعلى مسافة R_1 من مركزها. أوجد الشحنات المتحيزة على السطح الداخلي والخارجي للكرة، في الحالات:

- الكرة معزولة وغير مشحونة.
- الكرة معزولة ومشحونة بشحنة Q .
- الكرة موصولة بالأرض.

التصريح 9 :

كرتان ناقلتان متحيزتان المركز، نصف قطرهما R_1 و R_2 حيث $R_1 < R_2$. تحمل الكرة الداخلية شحنة q .

ما قيمة الشحنة Q التي ينبغي وضعها على الكرة الخارجية، حتى يكون كمون الكرة الداخلية معلوماً؟

أحسب الكمون الكهربائي تابعاً للبعد عن مركز الكرتين 1، 2، لجميع مواضع الفضاء، ثم مثله بيانياً.

التصريح 10 :

كرتان ناقلتان متحيزتان المركز نصف قطرهما R_1 و R_2 حيث $R_1 < R_2$. الكرة الخارجية طبقة رقيقة الجدران.

أ. إذا كانت الكرة الخارجية غير مشحونة وموصولة بالأرض، أما الكرة الداخلية فواقعة عند كمون ثابت V_0 ، نتيجة ربطها بمولد، فاحسب الشحنات التي تحملها كل من الكرتين.

ب. لنفزل الآن الكرة الخارجية عن المولد، ولنصل الكرة الداخلية بالأرض. احسب شحنة الكرة الداخلية، وكمون الكرة الخارجية، والشحنة المتوضعة على سطحيهما.

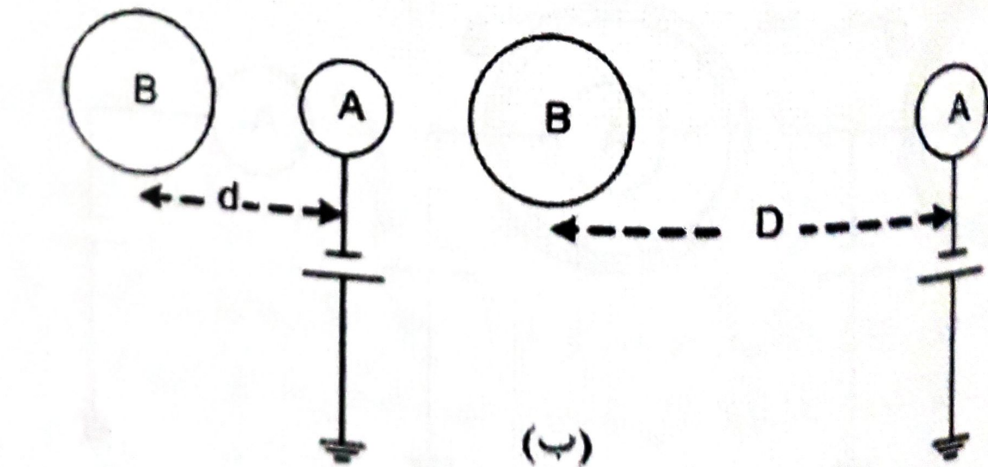
ج. نضع الكرتان عند كمونيين ثابتين $V_1 > 0$ و $V_2 < 0$. أحسب الشحنة التي تحملها كل كرة.

المعبرين 11 :

(أ) وُضعت كرة ناقلة A عند كمون ثابت بالنسبة للأرض، باستخدام مولد، الشكل أ.

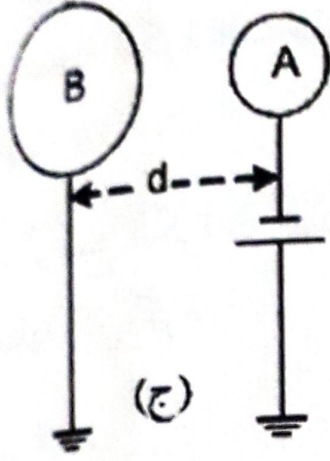
أ. ما الذي يجب أن نفترضه حتى نقبل أن الشحنة موزعة بانتظام على الكرة؟ مثل هذه الشحنة على الشكل.

ب. تقرب إلى الكرة A ناقلا B متعادلا ومعزولا، الشكل ب.



صف بطريقة كيفية ما يحدث على A وعلى B، ودخل المولد، كقريب B. مثل توزيع الشحنات على كل من A و B، من أجل مسافات مختلفة، المالاهاية، d، D.

ج- لنعتبر الآن الناقلين A و B على بعد d من بعضهما. نوصل الناقل B بالأرض، الشكل ج.

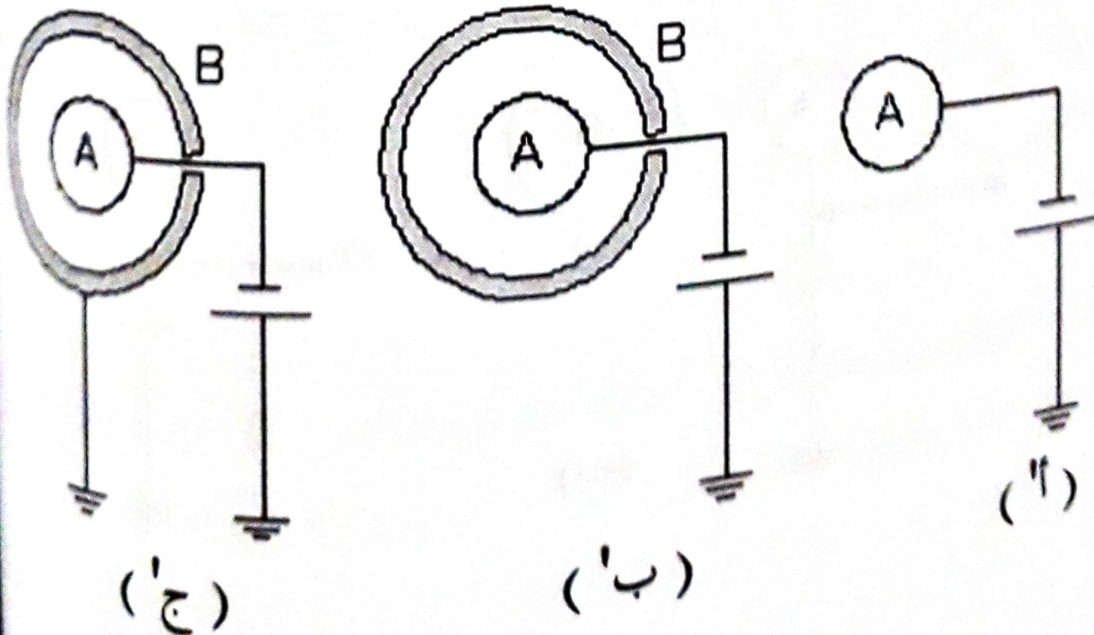


i. صف كيفية ما يحدث.

ii. مثل التوزيعات الجديدة للشحنات على الناقلين.

د- قارن الشحنات التي يحملها A في الأشكال أ، ب، ج. ماذا تستنتج؟

II سنعتبر الآن المسألة السابقة حالة خاصة تسمح بالوصول بعد الحسابات، إلى نتائج كمية. كرة ناقلة نصف قطرها R_1 ، وواقعة عند كبر V_A . كرة ناقلة جوفاء نصف قطرها الداخلي R_2 ، والخارجي R_3 ، متصلة مع الكرة A. $V_A=1000v$; $R_3=20cm$; $R_2=11cm$; $R_1=10cm$



أحسب q_0 شحنة الكرة A في حالة الشكل أ'.

ب- أحسب q_B شحنة الكرة B في حالة الشكل ب'. باعتبار q_1 الشحنة الموزعة على الكرة A، أوجد q_2 و q_3 المحمولتين على وجهي الكرة B، الداخلي والخارجي على الترتيب. عبّر نسبة إلى q ، عن الحقلين E_1 و E_2 لـ: $R_1 < r < R_2$ و $R_2 < r < R_3$ على الترتيب. إستنتج قيمة q_1 بإجراء تحوال لحقل الكهربائي بين الموضعين المعرف عندهما E_1 و E_2 .

ج- أحسب q'_1 ، شحنة الكرة A في حالة الشكل ج'.

د- قارن عدديا بين الشحنات q_0 و q_1 و q'_1 . على أيّ وسيط، وفي أيّ اتجاه ينبغي التغيير لرفع قيمة q'_1 ، مع إبقاء V_A و R_1 ثابتين؟

هـ- صف بطريقة كافية، ما يحدث لحالة الشكل ب' إذا فصلنا المولد، ثم وصلنا بين A و B بسلك ناقل.

- أجرِ الحساب العددي لشحنتي الناقلين A و B النهائيتين، وكذا كونيتهما.

- أحسب كذلك الطاقة المتحررة.

التمرين 12 :

كرة ناقلة نصف قطرها R وشحنتها Q.

- أحسب طاقتها الداخلية.

- نقرغ هذه الكرة بتوصيلها بالأرض. كم ستصبح الطاقة المخزنة فيها؟

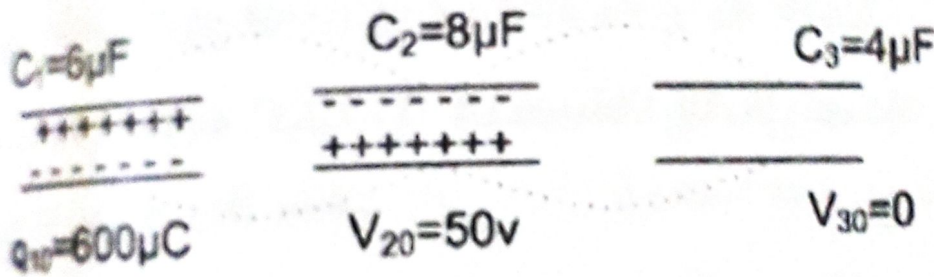
- نشحن هذه الكرة بمولد قوته الدافعة الكهربائية \mathcal{E} ثابتة، ما مقدار الطاقة التي يولدها المولد لذلك؟ هل نجدها كلها بشكل طاقة كامنة؟

التمرين 13 :

أحسب الطاقة U اللازمة لتوليد توزيع كروي منتظم للشحنات، حجم الكرة كله. لإجراء هذا الحساب تصوّر أن هذا التوزيع يتم تركيزه في حبة البصل، وذلك بإضافة طبقات كروية، إلى أن يُبلغ نصف القطر المطلوب. أوجد $U=f(Q,R)$. إستنتج الطاقة الكهربائية الكولومية لنواة ذرة عددها الذري Z ، ونصف نظرها R .

التمرين 14 :

بوضح الشكل المقابل الحالة الابتدائية للمكثفات.



أ- أوجد الطاقة الكلية المخزنة في هذه الجملة.

ب- وُصِّلت المكثفات كما بالخطوط المتقطعة. الجملة الآن مترنة.

أوجد شحنة كل مكثفة، وفرق الكمون بين لبوسيهما. أوجد كذلك الطاقة الكلية المخزنة في هذه الجملة، في وضعها الجديد.

ج- لنربط مقاومة كهربائية على التوازي مع جملة المكثفات. ما الشحنة الكلية التي ستسري في المقاومة؟

التمرين 15 :

مساحة سطح كل من لبوسيّ مكثفة مستوية $S=50cm^2$ ، والبعد بينهما $d=0,1mm$. يفصل بين اللبوسين هواء.

أ- أحسب شحنة هذه المكثفة إذا كان فرق الكمون بين لبوسيهما $100V$.

ب- كيف تتغير شدة الحقل الكهربائي بين لبوسي مكثفة مستوية فيما إذا
رُبِطت شحنة كل من لبوسيهما إلى الضعف؟

ج- كيف تتغير سعة المكثفة المستوية الموصوفة أعلاه، فيما إذا أدخلنا بين
لبوسيهما صفيحة معدنية موازية لها، سُمكها $d_0 = 0,05 \text{ mm}$ ؟ هل تتعلق سعة هذه
المكثفة بموضع الصفيحة؟

التعريف 16 :

أ- شُحنت مكثفة اسطوانية نصف قطر أحد لبوسيهما ضعف نصف قطر
البوس الآخر، حتى فرق كمون بين لبوسيهما مقداره V . أحسب شدة الحقل
الكهربائي عند موضع يبعد مسافة r عن محور المكثفة ($R_1 < r < R_2$).

ب- تتألف مكثفة اسطوانية هوائية من سلك نصف قطره $R_1 = 2,5 \text{ mm}$
واسطوانة نصف قطرها $R_2 = 2,5 \text{ cm}$ ، ينطبق محورها على السلك. حتى أي
نوع في الكمون يمكن شحن هذه المكثفة، إذا علمت أن المتانة العازلية للهواء
(الشدة الحدية القصوى للحقل الكهربائي، التي يتحملها الهواء)، تساوي
 $E_C = 3.10^4 \text{ V/cm}$ ؟

التعريف 17 :

لقياس شحنة ناقل، يمكننا استخدام مقياس الكهرباء (كهرومتر)، وهو
يشير إلى فرق الكمون. لذلك نؤم في البداية بقياس فرق الكمون بين الناقل
والأرض، وليكن V_1 . بعدها نصل الناقل بأحد لبوسي مكثفة سعتها معلومة
 C_0 ، أما لبوسها الآخر فيوصل بالأرض، ثم نقيس فرق الكمون ثانية، وليكن
 V_2 . كيف يمكننا باستخدام هذين القياسين تعيين قيمة الشحنة q لهذا الناقل؟

التعريف 18 :

رُبطت مكثفتان مستويتان سعة كل منهما C على التسلسل إلى منبع
قوته الحركة الكهربائية \mathcal{E} ، ثم ملئت إحدى المكثفتين بعازل نفاذيته النسبية ϵ_r .

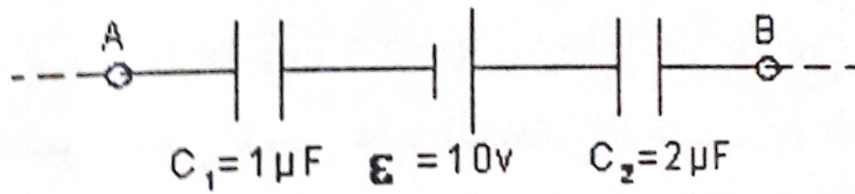
- أ- أوجد النسبة بين شدتي الحقل الكهربائي في المكثفة، قبل وجود العازل وبعده.
- ب- أحسب الشحنة التي تعبّر المنبع.

التمرين 19 :

تتحمّل مكثفتان سعاتهما $C_1 = 1\mu F$ و $C_2 = 2\mu F$ ، توترين حدّيين $V_1 = 4.10^3$ v و $V_2 = 4.10^3$ v على الترتيب. لنربط هاتين المكثفتين على التسلسل. أحسب التوتر الحدي الذي تتحمّله الجملة عندئذ.

التمرين 20 :

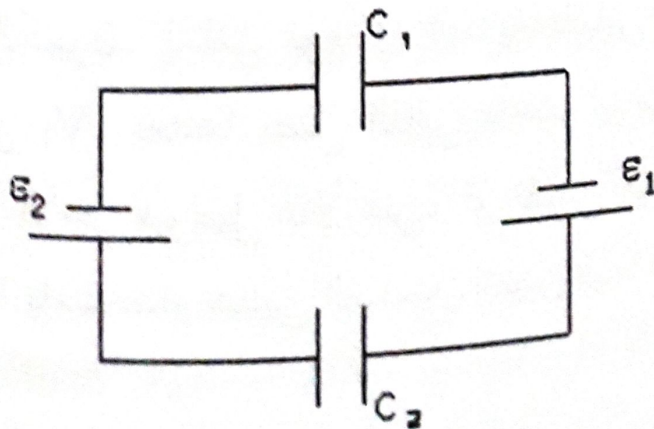
يمثل الشكل المقابل جزءاً من دائرة، حيث $V_A - V_B = 5$ v.

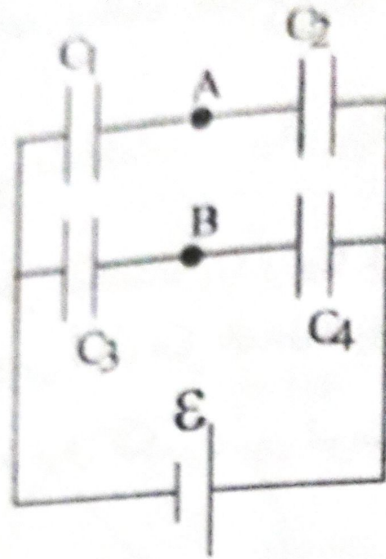


أوجد فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة.

التمرين 21 :

أوجد للمخطط المقابل فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة، وشحنتها.

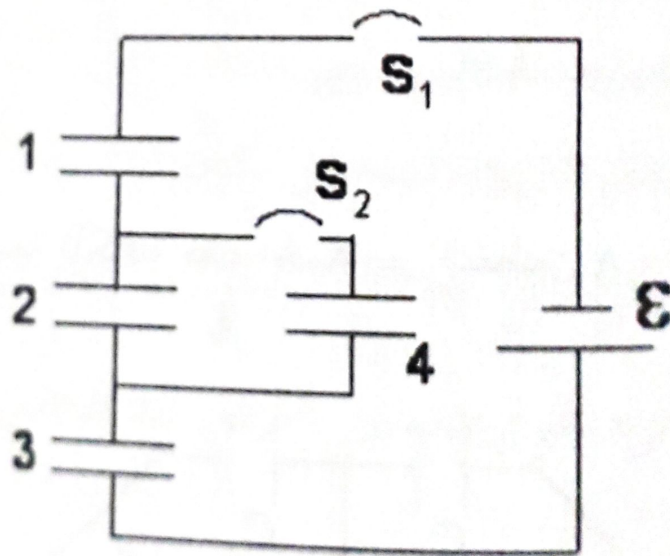




المسألة 22 :
أوجد فرق الكمون بين النقطتين
A و B في الشكل المقابل.
" متى يتعدم هذا الفرق؟ "

المسألة 23 :

1- رُبطت أربع مكثفات متماثلة كما بالشكل المقابل، إلى مولد قوته
كهربائية $\mathcal{E} = 9 \text{ v}$.

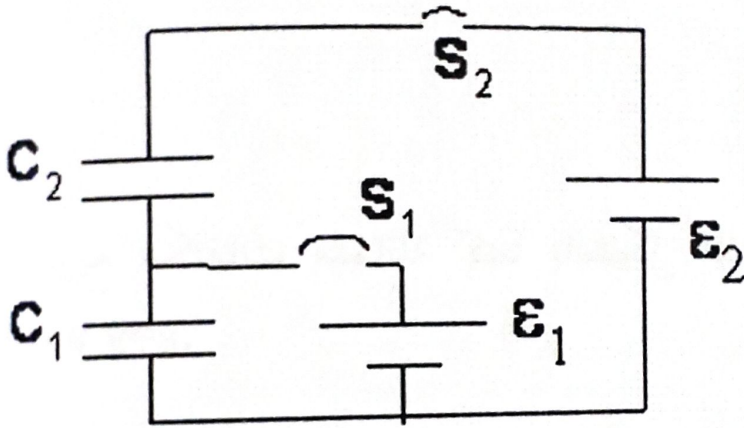


كانت القاطعة S_2 في البداية مفصومة، أما القاطعة S_1 فموصولة، ثم
فُصلت S_1 وُضِلت S_2 . كم سيكون فرق الكمون بين لبوس كل مكثفة؟

ب- أعد مناقشة المسألة فيما إذا وُصِّلت S_1 ثم فُصِّمت، مع بقاء S_2 موصولة.

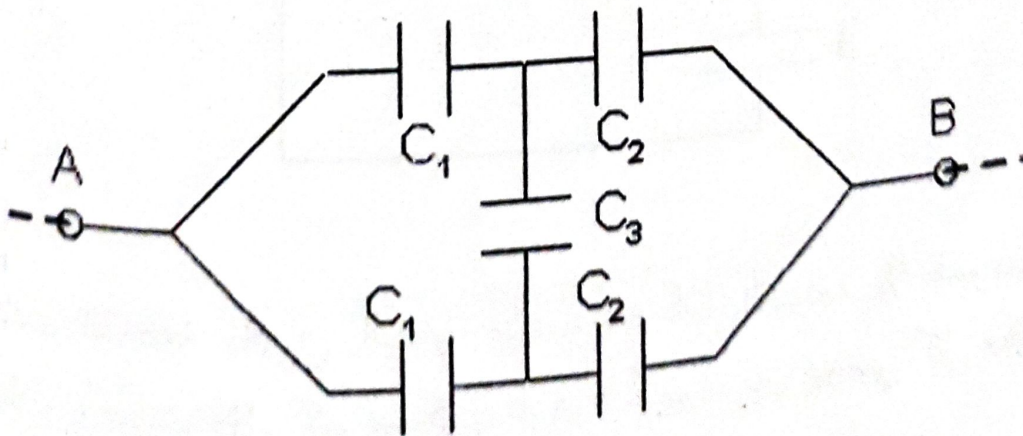
التمرين 24 :

تُشحن المكثفتان C_1 و C_2 في الشكل المرفق، كالآتي: تُوصَل القاطعة S_1 ثم تُفصم، ومن ثم تُوصَل القاطعة S_2 .
أوجد فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة، بمعلومية ϵ_1 و ϵ_2 .



التمرين 25 :

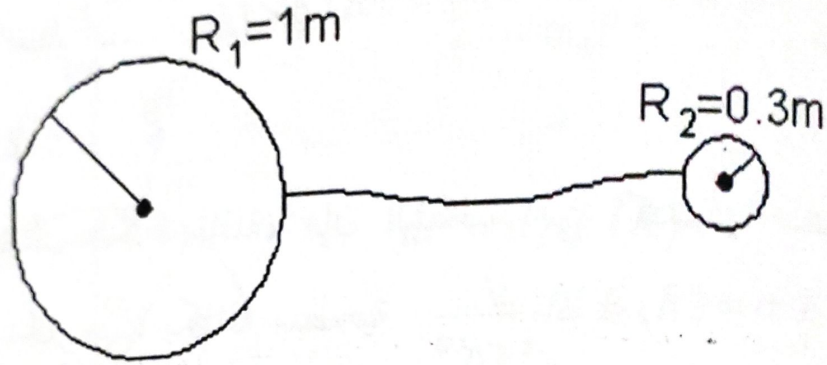
أوجد السعة المكافئة لهذه الجملة بين النقطتين A و B.



حلول الفصل الثالث

النواقل الكهربائية المتزنة كهربائيا - المكثفات

التمرين 1 :



شحنة الكرة الأولى قبل التلامس $q_{10} = 10^{-9} \text{C}$

شحنة الكرة الثانية قبل التلامس $q_{20} = 0$

شحنة الكرة الأولى بعد التلامس q_1

شحنة الكرة الثانية بعد التلامس q_2

بعد التلامس تتبادل الكرتان الشحنة و يكون:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Kq_1}{R_1} = \frac{Kq_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

وحيث أن المجموع الجبري لشحنتي الكرتين بعد التلامس مساوٍ لمجموعها قبل التلامس فإن:

$$q_1 + q_2 = q_{10} + q_{20} = 10^{-9} + 0 = 10^{-9} \text{C}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{1} = \frac{q_2}{0.3} &\Rightarrow 0.3q_1 - q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 &= 10^{-9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{1}{1.3} \cdot 10^{-9} \text{C} \\ q_2 = \frac{0.3}{1.3} \cdot 10^{-9} \text{C} \end{cases}$$

إذاً:

طاقة الجحلة قبل التوصيل:

$$U_0 = \frac{1}{2} q_{10} V_{10} = \frac{1}{2} q_{10} \frac{K q_{10}}{R_1} = \frac{9 \cdot 10^9 q_{10}^2}{2 R_1} = 4,5 \cdot 10^{-9} J$$

$$U = \frac{K q_{10}^2}{2 R_1} + \frac{K q_{20}^2}{2 R_2} = 3,46 \cdot 10^{-9} J \quad \text{طاقة الجحلة بعد التوصيل:}$$

$$U < U_0 \quad \text{لاحظ أن:}$$

لتمرين 2 :

بما أن الكرة ناقلة، فإن الشحنة التي اكتسبتها ستوزع بانتظام على سطحها الخارجي، بكثافة سطحية

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

أ- باستخدام نظرية غاوس يمكن إيجاد:

$$r > R: \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad ; \quad r < R: E_2 = 0$$

إيجاد الكمون:

$$r \geq R: dV_1 = -\vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = -E_1 dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

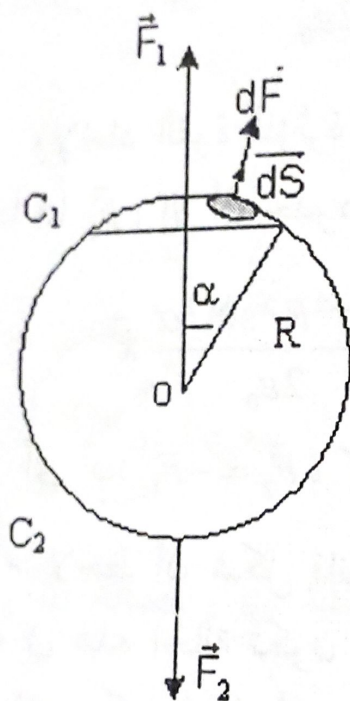
$$V_1(\infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \therefore V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r \leq R: dV_2 = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_2(r) = C_2; V_2(R) = V_1(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\therefore V_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

عند الجوار المباشر لسطح الكرة فإن r تتحول إلى R ، أي:
 أما عند الجوار الداخلي لسطح الكرة فإن: $E = 0$ ،
 عند الجوار عند السطح تماماً، تكون مساوية للمتوسط الحسابي
 فإن قيمة الحقل عند السطح تماماً، تكون مساوية للمتوسط الحسابي
 عند الجوار؛ أي:

$$E(R) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + 0 \right) = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dq \vec{E}(R) \\ &= \sigma dS \vec{E}(R) = \sigma E(R) dS \vec{e}_r \\ &= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r \end{aligned}$$

فالقوة المؤثرة على القبة C_1 :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \int d\vec{F} = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r \\ &= \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi (\sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) \\ &= \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \left[\int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \vec{i} + \int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \vec{k} \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0 ; \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0 ;$$

$$\int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha ; \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

$$\therefore \vec{F}_1 = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cdot 2\pi \vec{k} = \frac{\pi \sigma^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

ولإيجاد القوة المؤثرة على القبة C_2 ، فإننا سنعالج بالكيفية نفسها التي حسبنا بها \vec{F}_1 ، إلا أن حدود التكامل للمتغير θ تكون من α إلى π ، وعليه فإن:

$$\therefore \vec{F}_2 = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_\alpha^\pi \cdot 2\pi \vec{k} = -\frac{\pi \sigma^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

أي أن: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ، كما بالشكل.

د- لاحظ أن شكل قانون نيوتن للجذب العام يشبه شكل قانون كولوم، إلا أنه في هذه الحالة تكون القوى الكهربائية المتبادلة بين نضفي الكرة تنافراً، وعليه فإنه يمكن القول أنه بالمماثلة تكون القوة الثقالية التي تؤثر بها قبة على أخرى كما في القوة الكهربائية المحسوبة آنفاً، إذ أن الشحنة و الكتلة موزعان على سطح الكرة.

$$(القوة الكهربائية) \quad F_e = \frac{\pi \sigma_e^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = K 2\pi^2 \sigma_e^2 R^2 \sin^2 \alpha$$

حيث $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9$ الثابت الكهربائي، σ_e الكثافة السطحية للشحنة الكهربائية.

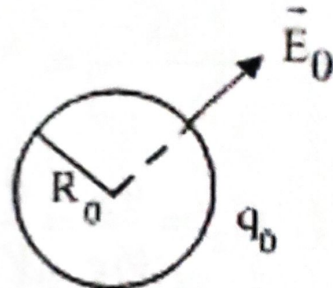
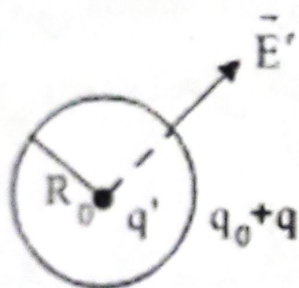
$$(القوة الثقالية) \quad F_g = \gamma 2\pi^2 \sigma_g^2 R^2 \sin^2 \alpha$$

حيث $\gamma = 6,67.10^{-11}$ الثابت الثقالي، σ_g الكثافة السطحية للكتلة.

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = 1 \quad \therefore F_r = K 2\pi^2 \sigma_g^2 R^2$; $F_g = \gamma 2\pi^2 \sigma_g^2 R^2$
 حتى يمكن فصل نصفي الكرة عن بعضهما فإنه ينبغي أن يكون على

$$\therefore K \sigma_g^2 = \gamma \sigma_g^2 \Rightarrow \sigma_g = \sigma_g \sqrt{\frac{\gamma}{K}} = \frac{m}{4\pi R^2} \sqrt{\frac{\gamma}{K}} = 6,85 \cdot 10^{-12} \frac{m}{R^2}$$

جث m كتلة الكرة، و R نصف قطرها.



في وضع التوازن
 أن يكون الحقل ناتجا
 الشحنة q_0 ، أما عند
 مع التوازن الثاني فإن

أن يكون ناتجا عن الشحنتين السطحيتين، الأصلية q_0 والمضافة q ، وعن
 كرية q' المراد إيجاد مقدارها.

حتى نعود الفقاعة إلى وضع توازنها الأول، ينبغي أن يكون مقدار القوة
 المؤثرة بها الشحنة المركزية q' مساويا مقدار القوة التي جعلتها تنتفخ؛ أي
 التي سببتها الشحنة السطحية q ، وأن تكونا متعاكستين تماما في الاتجاه.

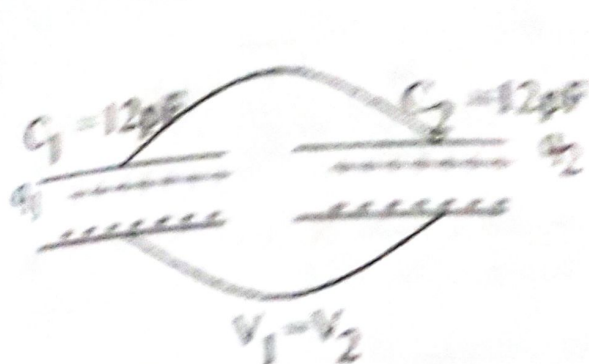
E الناتج عن الشحنة المركزية q' $E = q'$ الناتج عن الشحنة السطحية q

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Kq'}{R_0^2} ; \quad \frac{q}{4\pi R_0^2 2\epsilon_0} = \frac{q'}{4\pi R_0^2 \epsilon_0} \Rightarrow \frac{q}{2} = q' \Rightarrow q' = \frac{q}{2}$$

وطالما أن الحقلين مختلفان في الاتجاه، فإنه ينبغي أن يكون: $q' = -\frac{q}{2}$

المسألة 4 :

أ- عند توصيل المكثرتين ببعضهما تبادلتان الشحنات إلى أن تتركز على
ويساوي فرق الكمون بين لبوس كل مكثفة V_1 و V_2 .



q_0 و q_1 شحنتا المكثفة
الأولى قبل التوصيل وبعد
على الترتيب.

V_0 و V_1 فرق الكمون
بين لبوس المكثفة الأولى، قبل
التوصيل وبعد، على الترتيب.

$$C_1 = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_0}{V_0} ; C_2 = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_2}{V_1} \quad V_2 = V_1$$

$$q_1 + q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 = V_1 (C_1 + C_2) = q_0 = C_1 V_0$$

(لأن الشحنة محفوظة)

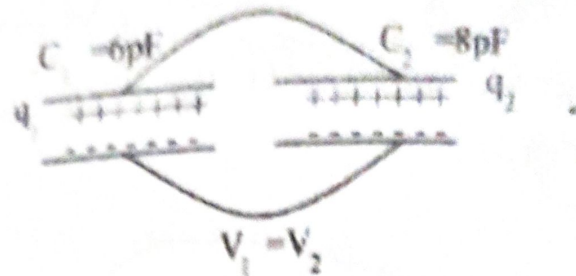
$$\Rightarrow V_1 = \frac{q_0}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2} = \frac{12 \times 150}{12 + 12} = 75 \text{ v}$$

$$\therefore q_1 = C_1 V_1 = \frac{C_1 q_0}{C_1 + C_2} = 900 \text{ pC} ; q_2 = C_2 V_1 = \frac{C_2 q_0}{C_1 + C_2} = 900 \text{ pC}$$

$$(قبل التوصيل) \quad U_0 = \frac{1}{2} q_0 V_0 = \frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = 135 \text{ nJ}$$

$$(بعد التوصيل) \quad U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = \frac{V_1^2}{2} (C_1 + C_2) = 67,5 \text{ nJ}$$

بعد التوصيل والاتزان يكون:



$$V_1 = V_2 \quad ; \quad q_1 + q_2 = 2q$$

$$C_1 + C_2 = \frac{q_1}{V_1} + \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_1 + q_2}{V} \quad ; \quad V_1 = V_2 = V$$

$$= \frac{2q}{V} \Rightarrow V = \frac{2q}{C_1 + C_2}$$

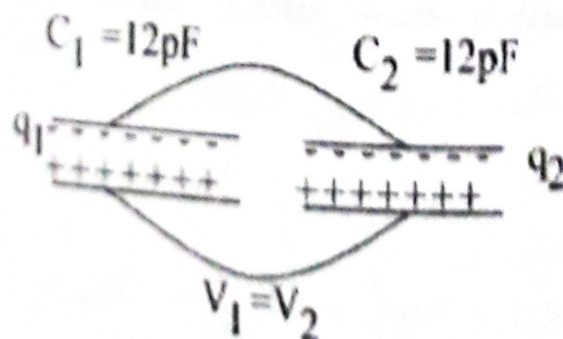
$$\therefore V_1 = V_2 = V = \frac{2q}{C_1 + C_2} = 314,286\text{v}$$

$$q_1 = C_1 V = \frac{2C_1 q}{C_1 + C_2} = 1,885\text{nC} \quad ; \quad q_2 = C_2 V = \frac{2C_2 q}{C_1 + C_2} = 2,514\text{nC}$$

$$\text{(قبل التوصيل)} \quad U_0 = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{q^2(C_1 + C_2)}{2C_1 C_2} = 705\text{nJ}$$

$$\text{(بعد التوصيل)} \quad U = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = 691\text{nJ}$$

بعد التوصيل والاتزان يكون:



$$V_1 = V_2 = V$$

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= |q_{10} - q_{20}| \\ &= |C_1 V_{10} - C_2 V_{20}| = |12 \times (150 - 300)| \\ &= 1800 \text{ pC} \end{aligned}$$

$$q_1 + q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V = 1800 \text{ pC} \Rightarrow V = \frac{1800}{C_1 + C_2} = 75 \text{ v}$$

$$q_1 = C_1 V = 12 \times 75 = 900 \text{ pC} \quad ; \quad q_2 = C_2 V = 900 \text{ pC}$$

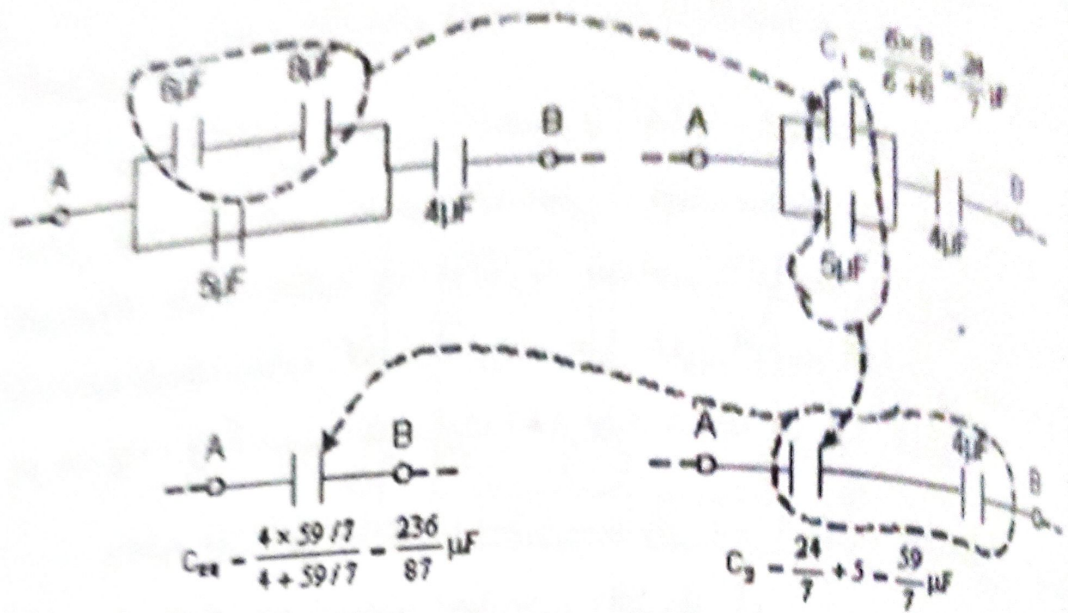
$$\text{(قبل التوصيل)} \quad U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_{10}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{20}^2 = 675 \text{ nJ}$$

$$\text{(بعد التوصيل)} \quad U = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = 67,5 \text{ nJ}$$

بالمقارنة بين طاقة الجزمة قبل التوصيل وبعده، نلاحظ انخفاض مقدارها. قد يظن الملاحظ للوهلة الأولى أن قانون انحفاظ الطاقة قد انتهك، وهو مخالف للحقيقة؛ ذلك أنه أثناء عملية تبادل الشحنة تحدث شرارة كهربائية، تبث في الفضاء المحيط بها أمواجاً كهرومغناطيسية، تحمل معها جزءاً من طاقة الجزمة. هذا وفي الحالات العملية، فإن جزءاً من الطاقة يضيع حرارة في أسلاك التوصيل.

التمرين 5 :

يمكن إيجاد المكثفة المكافئة لجزمة المكثفات هذه على مراحل، كما بالمخطط التالي.



إذا طبقنا فرق كمون $V_A - V_B = V_{AB} = 1000V$ بين طرفي الجملة، فإن شحنة المكثفة هي:

$$q = C_{eq} V_{AB} = \frac{236}{87} \times 1000 \approx 2713 \mu C$$

أي أن اللبوس المتصل بالطرف A سيكون مشحونا بـ $+2713 \mu C$ ، واللبوس المتصل بالطرف B سيكون مشحونا بشحنة $-2713 \mu C$.

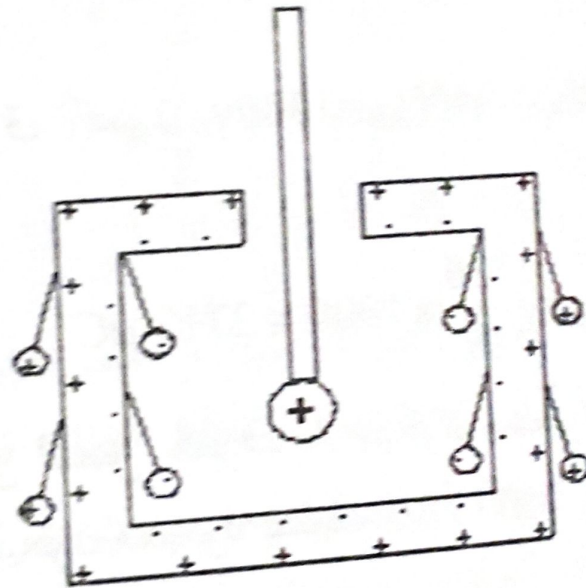
إذا عزلنا الجملة عن مصدر الجهد الخارجي، ووصلنا النقطتين A و B بهما بسلك ناقل، فإن الجملة ستسعى للاتزان الكهروستاتيكي من جديد، أي أن يصبح كمون A مساويا لكمون B؛ أي أن فرق الكمون بين لبوسَي المكثف سيصبح معدوماً، وبالتالي فشحنتها معدومة؛ أي أن الشحنة التي ستظل $q = 2713 \mu C$.

أما الطاقة المتحررة أثناء ذلك فهي الطاقة التي كانت مخزنة في المكثف،

$$U = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} qV = 1,356 J$$

عندما يُدخَل القضيب المشحون إيجابياً بشحنة q ، إلى حواف الصندوق الناقل دون أن يمس جداره الداخلي، فإنه مستعرض على الوجه الداخلي للصندوق شحنة سالبة $-q$ (نظرية العناصر المتوافقة)، وتكتسب النواصير الداخلية شحنة سالبة كذلك، وتعرض على الوجه الخارجي للصندوق شحنة موجبة $+q$ ، وتكتسب النواصير الخارجية شحنة موجبة كذلك.

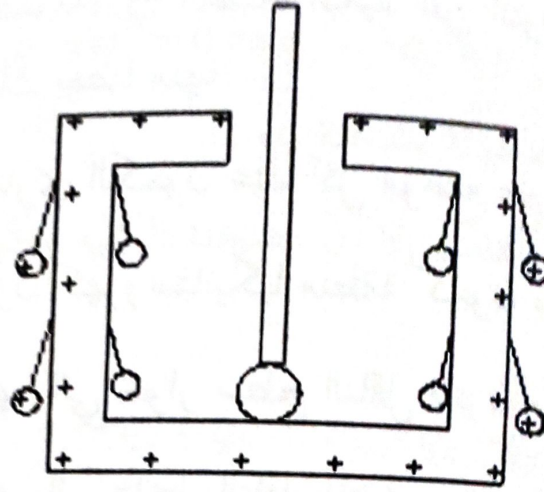
وعليه فإن النواصير الداخلية ستتأفر مع السطح الداخلي، والنواصير الخارجية ستتأفر مع السطح الخارجي (الشكل أ).



(الشكل أ)

أما إذا مَسَّ القضيب المشحون الجدار الداخلي للصندوق، فإن شحنة الصندوق والقضيب ستصبح ناقلاً واحداً، وتنتقل شحنة القضيب إلى السطح الخارجي للناقل الجديد؛ أي أن كل شحنة القضيب تنتقل إلى السطح الخارجي وتوزع عليه، وبالتالي فإن النواصير الخارجية ستكتسب شحنة موجبة، وعليه فستتأفر مع السطح الخارجي.

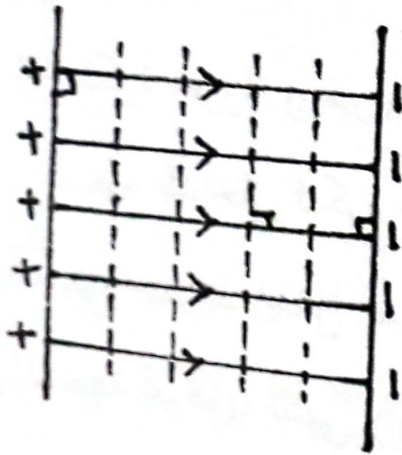
أما التواسات الداخلية فستكون غير مشحونة (الشكل ب).



الشكل (ب)

وبحدث الشيء نفسه فيما لو تم تماس القضيب المشحون مع الجدار
أرجي للصندوق (الحالة الأخيرة)، إلا أن القضيب لن يعطي كل شحنته، بل
يحفظ ببعض منها، لأنه في هذه الحالة يشكل جزءاً من السطح الخارجي
أقل الجديد.

مرين 7 :

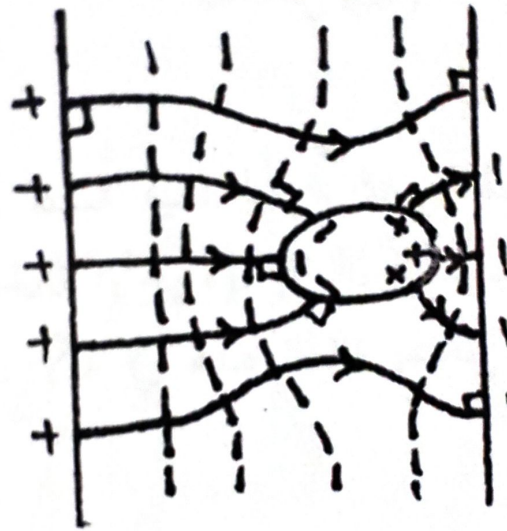


- يكون الحقل بين المستويين منتظماً،
أما سطوح تساوي الكمون فهي مستويات
موازية للمستويين، الشكل المقابل.

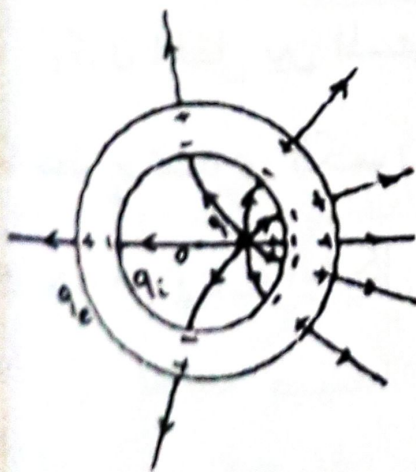
- يتأثر الناقل الموضوع في المجال الكهربائي بين المستويين، فتظهر على
طرفيه شحنات متحيزة، ويتغير توزيع شحنتي المستويين، ويصبح الحقل
الكللي ناشئاً عن التوزيعات الجديدة لشحنتي المستويين والناقل، وتتشوه

خطوط الحقل وسطوح تساوي الكمون، محتفظة بكل الخصائص التي تربط الحقل الكهربائي بكمونه، في الفضاء البعيد عن النواقل أو القريب منها أو على سطوحها، وإليك بعضا منها:

- يتعامد سطح تساوي الكمون عند كل موضع مع شعاع الحقل عند
- يُشكّل الناقل المتزن كهروستاتيكية منطقة كمون ثابتة.
- يكون الحقل الكهربائي بجوار سطح الناقل المتزن متعامدا معه.
- يكون الحقل الكهربائي داخل الناقل المتزن معدوما.



التمرين 8 :



أ- الكرة معزولة و غير مشحونة:

السطح الداخلي للكرة محيط تماما بالشحنة

q ؛ فجميع خطوط الحقل الصادرة عن q

(أو المتجهة نحوها)، تنتهي (أو تبدأ) على

(أو من) السطح الداخلي للكرة، بالتالي فإن الشحنة المتحرضة على لوجها الداخلي هي $q_i = -q$.

ولما كانت الشحنة الكلية للكرة معدومة فإن:

$$q_i + q_e = 0 \Rightarrow q_e = -q_i = q$$

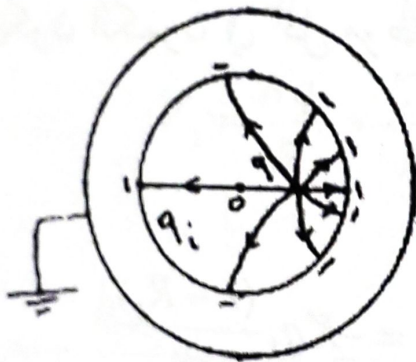
الكرة معزولة ومشحونة بشحنة q_0 :

كما في الحالة الأولى تماماً، إلا أن الشحنة الكلية للكرة في هذه الحالة q_0 ،

فإن:

$$q_i = -q ; q_i + q_e = q_0 \Rightarrow q_e = q_0 - q_i = q_0 + q$$

ج الكرة موصولة بالأرض:



عند توصيل الكرة بالأرض تتسرب

الشحنة الموجبة إلى الأرض، ويصبح السطح

الخارجي للكرة غير مشحون، وتبقى شحنة

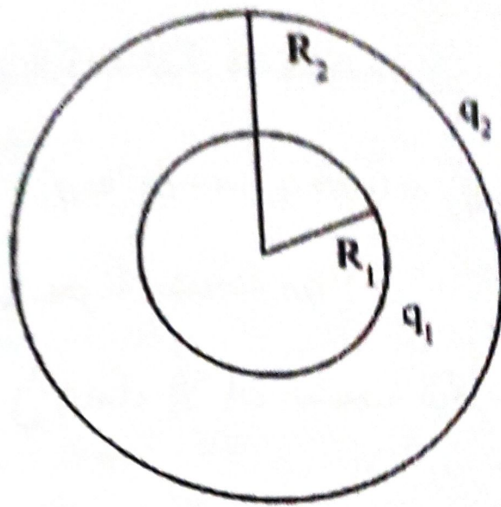
السطح الداخلي كما هي مشدودة بقوة الحقل

الناشئ عن الشحنة الجوفية q .

$$\therefore q_i = -q ; q_e = 0$$

التمرين 9 :

يكون كمون الكرة الداخلية مساويا الكمون الناشئ عن شحنة الكرة الداخلية q_1 ، والكمون الناشئ عن شحنة الكرة الخارجية q_2 ؛ أي:



$$V = V_1 + V_2 = \frac{Kq_1}{R_1} + \frac{Kq_2}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} = 0$$

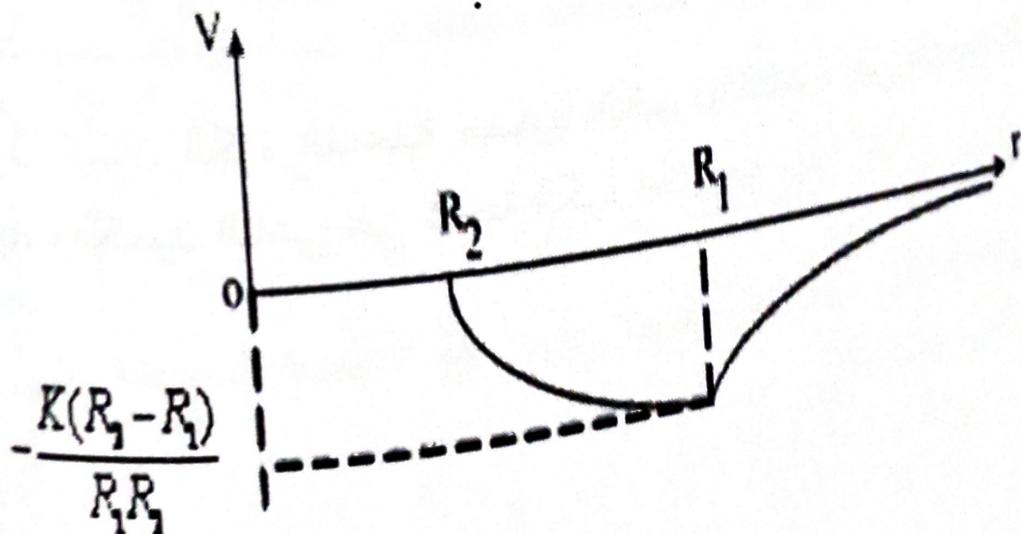
$$\Rightarrow q_2 = -\frac{R_2}{R_1} q_1$$

يكون الكمون في كل موضع ناشئا عن الشحنتين q_1 و q_2 .

$$r \leq R_1: V_{i1} = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} = 0$$

$$R_1 \leq r \leq R_2: V_{i2} = \frac{Kq_1}{r} + \frac{Kq_2}{R_2} = -Kq_1 \frac{(r - R_1)}{rR_1}$$

$$r \geq R_2: V_e = \frac{Kq_1}{r} + \frac{Kq_2}{r} = -\frac{Kq_1 (R_2 - R_1)}{r R_1}$$



شحنة الكرة

شحنة الكرة

q_1

q_2

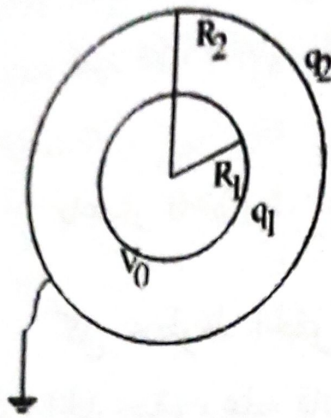
10

لنسم

ولنسم

الداخلية

الخارجية، إذا:



$$V_1 = \frac{Kq_1}{R_1} + \frac{Kq_2}{R_2} = V_0$$

$$V_2 = \frac{Kq_1}{R_2} + \frac{Kq_2}{R_2} = 0 \Rightarrow q_1 + q_2 = 0$$

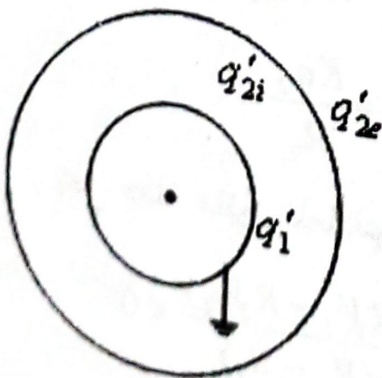
بحل جملة هاتين المعادلتين نجد:

$$q_1 = \frac{R_1 R_2 V_0}{K(R_2 - R_1)}; q_2 = -q_1 = -\frac{R_1 R_2 V_0}{K(R_2 - R_1)} : K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$$

q_1 تكون موزعة على السطح الخارجي للكرة الداخلية.

q_2 تكون موزعة على السطح الداخلي للكرة الخارجية، أما على سطحها

الخارجي فالشحنة معدومة.



ب- بعد عزل الكرة الخارجية عن الأرض

تظل محتفظة بشحنتها q_2 ، أما بعد توصيل

الكرة الداخلية بالأرض، فستتبادل معها

الشحنة، مكتسبةً كمونا معدوماً. لنعتبر كل

ذلك ممثلاً بالشكل المقابل.

$$q'_{2i} + q'_{2e} = q_2 = -\frac{R_1 R_2 V_0}{K(R_2 - R_1)}$$

$$V_1 = K \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q'_{2i} + q'_{2e}}{R_2} \right) = K \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right) = 0 \quad \text{كمون الكرة الداخلية}$$

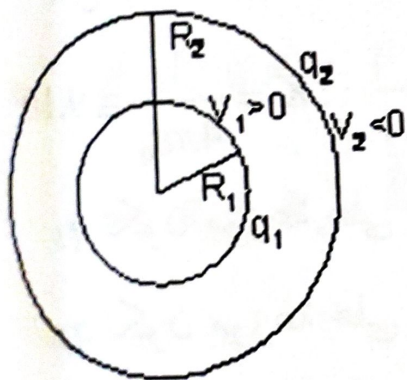
$$\Rightarrow q'_1 = -\frac{R_1}{R_2} q'_2 = \frac{R_1^2 V_0}{K(R_2 - R_1)} > 0 \quad : V_0 > 0 \text{ باعتبار}$$

كل خطوط الحقل الصادرة عن الشحنة q'_1 تقع على الوجه الداخلي للكرة الخارجية، وعليه فإن:

$$q'_{2i} = -q'_1 = -\frac{R_1^2 V_0}{K(R_2 - R_1)} < 0 \quad ; \quad q'_{2e} = q_2 - q'_{2i} = -\frac{R_1 V_0}{K} < 0$$

$$V_2 = \frac{Kq'_1}{R_2} + \frac{Kq_2}{R_2} = -\frac{R_1}{R_2} V_0 \quad \text{كمون الكرة الخارجية}$$

ج- الكرتان مثبتتان عند V_1 و V_2 ،
كما بالشكل المقابل.



، $V_1 < V_2$ أي $V_2 < 0$ و $V_1 > 0$
وعليه فخطوط الحقل تتجه من الكرة
الداخلية إلى الكرة الخارجية.

لنسم q_1 شحنة الكرة الداخلية و q_2
شحنة الكرة الخارجية، إذا:

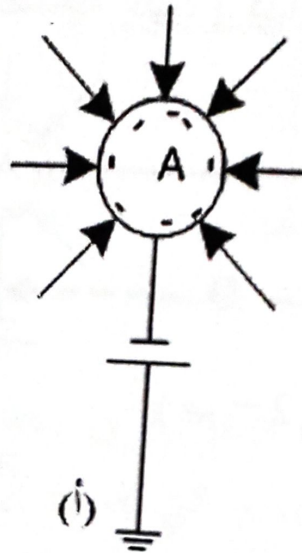
$$V_1 = \frac{Kq_1}{R_1} + \frac{Kq_2}{R_2} \quad ; \quad V_2 = \frac{Kq_1}{R_2} + \frac{Kq_2}{R_2}$$

نحل جملة هاتين المعادلتين نجد:

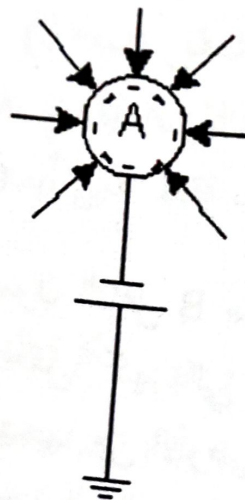
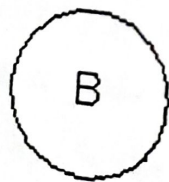
$$q_1 = \frac{R_1 R_2 (V_1 - V_2)}{K(R_2 - R_1)} > 0 \quad ; \quad q_2 = -\frac{R_1 (R_1 V_1 - R_2 V_2)}{K(R_2 - R_1)} < 0$$

التمرين 11 :

(أ) حتى نقبل أن الشحنة موزعة بانتظام على سطح الكرة، ينبغي أن نغيرها غير واقعة تحت تأثير أي حقل كهربائي خارجي، وكذا لا وجود لأي ناقل بجوارها، حتى لا تتبادل التأثير معه، وبالتالي تغير توزيع الشحنة على سطحها، ويكون توزيع الشحنة عليها كما بالشكل (أ).

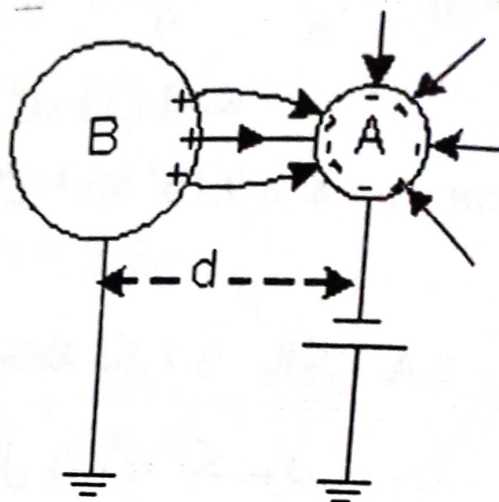


كلما اقترب الناقل B من الناقل A ازداد التأثير المتبادل بينهما؛ فعندما يكون الناقل B بعيدا جدا عن الناقل A، أي يمكن اعتبار المسافة بينهما لانهائية، فإنه لن يتأثر به، وعليه يكون الناقل A كما بالشكل (ب-1).



(ب-1)

الناتج عن الشحنة السالبة، ويكون التوزيع الجديد كما بالشكل

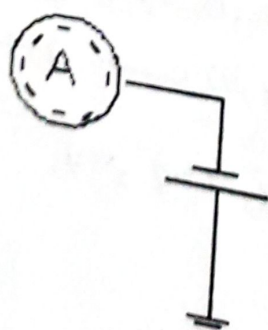


(جـ)

د- قيمة الشحنة التي يحملها الناقل A في حالة الشكل (أ) أقل من التي يحملها في حالة الشكل (ب-1)، و التي يحملها في هذه الحالة أقل من التي يحملها في حالة الشكل (ب-3). أمّا التي يحملها في حالة الشكل (جـ) فهي نفسها التي يحملها في حالة الشكل (ب-3).

نستنتج من ذلك أنه رغم بقاء كمون الناقل A ثابتاً، إلا أن شحنته تزداد كلما ازداد اقتراب الناقل B منه، أي كلما ازداد التأثير المتبادل بينهما. ونستنتج من مقارنة حالتي الشكل (ب-3) والشكل (جـ)، أنه رغم تغير كمون الناقل B، إلا أن شحنة الناقل A بقيت نفسها، وعليه فإن مقدار شحنة الناقل A عند كمون ثابت، يعتمد فقط على أبعاد الناقل A ووضعيته بالنسبة للناقل B.

(II)



(أ')

أ- حالة وجود الكرة الداخلية A بدون الخارجية B، كما بالشكل (أ').

$$V_A = -1000 \text{ v} < 0$$

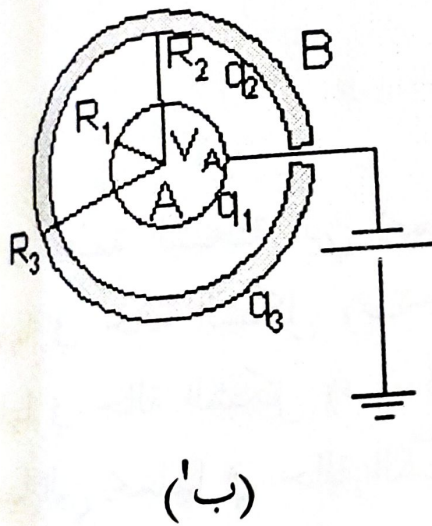
$$V_A = \frac{Kq_0}{R_1} \Rightarrow q_0 = \frac{R_1 V_A}{K} = -\frac{1}{9} \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$= -11,11 \text{ nC}$$

$$R_1 = 10 \text{ cm} ; K \cong 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

ب- حالة إحاطة الكرة B بالكرة A :

كما بالشكل (ب')، تكون الكرتان في حالة تأثير متبادل كلي بينهما.



لنعتبر q_1 الشحنة التي تحملها الكرة A، و q_2 و q_3 الشحنتين اللتين يحملهما على الترتيب الوجهان الداخلي والخارجي للكرة B.

- حيث أن الكرة B متعادلة كهربائياً في الأصل، ولم توصل بناقل آخر، فإن مجموع شحناتها معدوم؛ أي: $q_B = 0$.

- حيث أن جميع خطوط الحقل الصادرة عن الناقل A تحط على الوجه الداخلي للكرة B، فإن شحناتهما متساويتان مقداراً ومختلفتان إشارة؛ أي: $q_2 = -q_1$ حسب نظرية العناصر المتوافقة.

$$q_B = q_2 + q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = -q_2 = q_1$$

(مجموع شحنات الكرة B)

حساب الحقل الكهربائي:
 اختر سطح غاوس كروي الشكل، متمركزا مع الكرتين A و B،
 ونطبق نظرية غاوس:

$$r > R_3 :$$

$$\oint_S \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + q_3) = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_e 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Kq_1}{r^2} \quad \therefore \vec{E}_e = \frac{Kq_1}{r^2} \vec{e}_r$$

بالكيفية نفسها عند:

$$R_1 < r < R_2 :$$

$$\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} = E_i 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_i = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Kq_1}{r^2} \quad \therefore \vec{E}_i = \frac{Kq_1}{r^2} \vec{e}_r$$

• إستنتاج قيمة q_1 :

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Kq_1}{r^2} dr = Kq_1 \left[\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\therefore V_B - V_A = Kq_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = Kq_1 \frac{(R_1 - R_2)}{R_2 R_1}$$

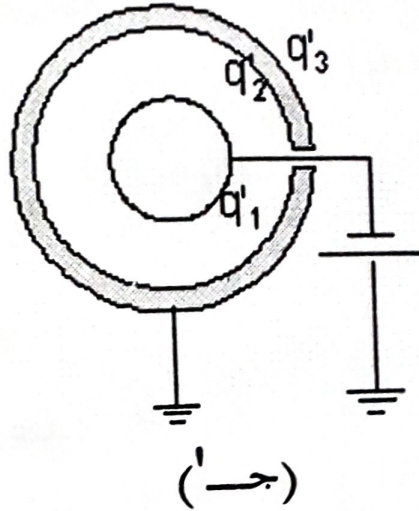
$$V_B = V(R_2) = V(R_3) = K \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{R_3} = \frac{Kq_1}{R_3} \quad : q_2 + q_3 = 0$$

$$\therefore V_A - V_B = V_A - \frac{Kq_1}{R_3} = Kq_1 \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{R_1 R_2 R_3 V_A}{K(R_1 R_2 - R_1 R_3 + R_2 R_3)}$$

بالتعويض نجد: $q_1 = -18.8 \text{ nC}$ ، ونستنتج أن: $V_B = -846.15 \text{ v}$.

ج- لنوصل الكرة B بالأرض، كما بالشكل (ج-أ')



$$V_A = \frac{Kq_1'}{R_1} + \frac{Kq_2'}{R_2} + \frac{Kq_3'}{R_3} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$(\text{عند السطح } R_2) \quad V_B = \frac{Kq_1'}{R_2} + \frac{Kq_2'}{R_2} + \frac{Kq_3'}{R_3} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$V_B = \frac{Kq_1'}{R_3} + \frac{Kq_2'}{R_3} + \frac{Kq_3'}{R_3} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$(\text{عند السطح } R_3) \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$= 0 \quad \dots \dots \dots$$

لأن $q_2' = -q_1'$ على السطح الداخلي للكرة B. ويمكن استنتاج ذلك من مقارنة المعادلتين (2) و (3) ببعضهما:

$$(2) = (3) \Rightarrow \frac{1}{R_2}(q'_1 + q'_2) = \frac{1}{R_3}(q'_1 + q'_2) \left\{ \begin{array}{l} R_2 \neq R_3 \\ \Rightarrow q'_1 + q'_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow q'_2 = -q'_1$$

$$((3) = (4) ; q'_1 + q'_2 = 0) \Rightarrow q'_3 = 0$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$V_A = \frac{Kq'_1}{R_1} + \frac{K(-q'_1)}{R_2} \Rightarrow q'_1 = \frac{R_1 R_2 V_A}{K(R_2 - R_1)} = -1,22 \cdot 10^{-7} C$$

$$= -122,22 \text{ nC}$$

د- مقارنة الشحن q_0 و q_1 و q'_1 :

$q_0 = -11,11 \text{ nC}$ شحنة الكرة A معزولة (أي أن الكرة B غير محيطة بها، ولا قريبة منها)، عند كمون قدره 1000 v .

$q_1 = -18,88 \text{ nC}$ شحنة الكرة A واقعة في حالة تأثير متبادل مع الكرة B المحيطة بها، فهو تأثير متبادل كلي، ومحمولة على كمون قدره 1000 v - أيضا.

ما يمكن ملاحظته هنا أنه رغم ثبات كمون الكرة A، إلا أن مقدار الشحنة التي تحملها مختلف من حالة لأخرى، إذ يكون أكبر كلما كانت الكرة A متأثرة أكثر.

$q'_1 = -122,22 \text{ nC}$ شحنة الكرة A واقعة تحت تأثير الكرة B، ومحمولة على الكمون 1000 v ، والكرة B على الكمون الصفري.

لنحسب كمون الكرة B في حالة الشكل (ب):

$$\int dV = - \int_{R_1}^{R_2} E_r \cdot d\vec{l} = - \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Kq_1}{r^2} dr$$

$$= Kq_1 \left[\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = Kq_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = Kq_1 \frac{(R_1 - R_2)}{R_2 R_1}$$

$$V_A - V_B = 154 \text{ v} \quad ; q_1 = -18,88 \text{ nC}$$

و لنحسب النسبة $\frac{|q_1|}{|V_A - V_B|}$ حالة الشكل (ب):

$$\frac{|q_1|}{|V_A - V_B|} = \frac{18,88 \text{ nC}}{154 \text{ v}} \cong 0,122 \frac{\text{nC}}{\text{v}} = 0,122 \text{ nF}$$

و لنحسب النسبة $\frac{|q'_1|}{|V_A - V_B|}$ لحالة الشكل (ج):

$$\frac{|q'_1|}{|V_A - V_B|} = \frac{122,22 \text{ nC}}{1000 \text{ v}} \cong 0,122 \text{ nF}$$

بمقارنة النسبتين نجدهما متساويتين، وهما تمثلان ما يسمى سعة الجملعة.

المولفة من الكرتين A و B؛ فالكرة A واقعة في حالة تأثير متبادل كلي مع الوجه الداخلي للكرة B. وتسمى هذه الجملعة مكثفة، ويدعى السطح الخارجي للكرة A والوجه الداخلي للكرة B لبوساها. فسعة المكثفة هي النسبة بين القيمة المطلقة لشحنة أحد لبوسيهما والقيمة المطلقة لفرق الكمون بينهما.

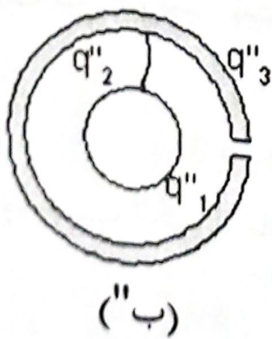
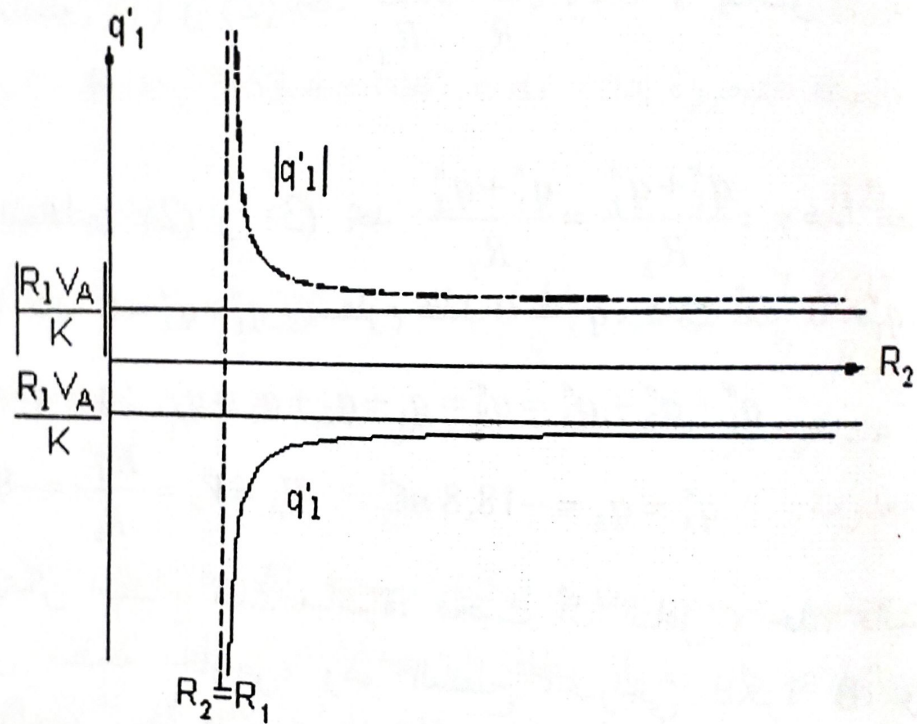
$C = \frac{q}{V}$ ، وهي مواصف هندسي لا يعتمد إلا على شكل الناقلين وكيفية توضعها بالنسبة لبعضهما، وعلى طبيعة الوسط الفاصل بينهما، إذ لو كان هذا الوسط عازلا له نفاذية كهربائية نسبية ϵ_r لتضاعفت السعة بالمعامل ϵ_r أي $C = \epsilon_r C_0$ ، حيث:

C السعة بوجود العازل، و C_0 السعة بعدم وجوده.

لرفع قيمة الشحنة q'_1 (الشكل جـ')، مع إبقاء V_A و R_1 ثابتين،
 ينظر إلى $q'_1 = \frac{R_1 R_2 V_A}{K(R_2 - R_1)}$ المتحصل عليها سابقا. سنلاحظ أنه لزيادة قيمة
 q'_1 ينبغي تصغير المقدار $(R_2 - R_1)$ ؛ أي جعل R_2 تقترب من R_1 ؛ أي تقترب
 الوجه الداخلي للكرة B من الكرة A.

$$\lim_{R_2 \rightarrow R_1} q'_1 = -\infty : V_A < 0$$

عندما كانت وحدها؛ أي في غياب الكرة B. $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} q'_1 = \frac{R_1 V_A}{K} = q_0$ ، وهي الشحنة التي كانت تمتلكها الكرة A



(ب')

هـ - لنأخذ الشكل (ب'). إذا فصلنا المولد، ثم
 وصلنا الكرة A بالكرة B بسلك ناقل، كما
 بالشكل (ب'')، فإن الكرتين تصبحان ناقلا واحدا،
 له كمون واحد، وتحتل شحنته سطحه الخارجي؛
 أي السطح الخارجي للكرة B.

حساب شحنتي الناقلين:

$$V_A = \frac{Kq_1''}{R_1} + \frac{Kq_2''}{R_2} + \frac{Kq_3''}{R_3} \quad (1)$$

$$V_B = V_A = \frac{Kq_1''}{R_2} + \frac{Kq_2''}{R_2} + \frac{Kq_3''}{R_3} \quad (2)$$

$$= \frac{Kq_1''}{R_3} + \frac{Kq_2''}{R_3} + \frac{Kq_3''}{R_3} \quad (3)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد $\frac{q_1''}{R_1} + \frac{q_1''}{R_2}$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $q_1'' = 0$.

ومن المعادلتين (2) و (3) نجد $\frac{q_1'' + q_2''}{R_2} = \frac{q_1'' + q_2''}{R_3}$ ، وهذا أيضا لا يتحقق إلا إذا كان $q_1'' + q_2'' = 0$ ويستلزم هذا $q_2'' = 0$ ، ذلك أن $q_1'' = 0$.

$$q_1'' + q_2'' + q_3'' = q_3'' = q_1 + q_2 + q_3 = q_3 \quad : q_1 + q_2 = 0$$

$$\therefore q_3'' = q_3 = -18,8 \text{ nC} \quad \therefore V_A = V_B = \frac{Kq_3''}{R_3} = -846 \text{ v}$$

كان يمكن استنتاج ذلك مباشرة، فحيث أن الناقل واحد، فالشحنة ستوزع على سطحه الخارجي، وهو السطح الخارجي للكرة B، وكل الشحنات الداخلية معدومة، وعليه فإن: $q_1'' = q_2'' = 0$ والمجموع الجبري للشحنات قبل التوصيل يساوي مجموعها الجبري بعده، وعليه فإن:

$$q_1'' + q_2'' + q_3'' = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\therefore q_3'' = q_3 \quad : q_1'' = q_2'' = 0 \quad ; \quad q_1 + q_2 = 0$$

ويُحسب الكمون بالطريقة السابقة نفسها.

حساب الطاقة المتحررة:

لحسب طاقة الجحلة الموصوفة بالشكل (ب):

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} (q_1 V_A + q_2 V_B + q_3 V_B) = \frac{1}{2} q_1 V_A : q_2 + q_3 = 0$$
$$= \frac{1}{2} (-18,8) \times (-1000) = 9400 \text{ nJ}$$

وللجحلة الموصوفة بالشكل (ب):

$$U = \frac{1}{2} q_3 V_B = \frac{1}{2} (-18,8) \times (-846) = 7952,4 \text{ nJ}$$

$$U_0 - U = 9400 - 7952,4 = 1447,6 \text{ nJ} \quad \text{إذا: فالطاقة المتحررة}$$

التمرين 12 :

$$U = \frac{1}{2} QV, \quad V = \frac{KQ}{R} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{KQ^2}{R}$$

- عند توصيل هذه الكرة بالأرض تنعدم شحنتها، وتصبح الطاقة المختزنة فيها معدومة.

- عندما تشحن هذه الكرة بشحنة Q ، بواسطة مولد قوته المحركة الكهربائية \mathcal{E} ، فإن مقدار الطاقة التي يبذلها المولد $Q\mathcal{E}$. أمّا مقدار الطاقة الكامنة التي تحتزنها الكرة فهو $Q\mathcal{E}/2$. وعليه فإننا لا نجد كل الطاقة التي يبذلها المولد بشكل طاقة كامنة.

التمرين 13 :

لنفترض R نصف قطر هذه الكرة، و Q شحنتها.

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{4\pi R^3}$$

بما أن التوزيع منتظم فإن كثافتها

لنأخذ من هذه الكرة كرة
نصف قطرها $r < R$ ، فتكون شحنتها:

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

يكون الكمون الكهربائي على
سطح هذه الكرة:

$$V = \frac{Kq}{r} = \frac{KQr^2}{R^3}$$

إذا أضفنا لهذه الكرة طبقة كروية سمكها dr وشحنتها dq ، فإن الطاقة
اللازمة لذلك $dU = Vdq$.

وحيث أن $dq = \rho d\tau = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$ فإن:

$$dU = \frac{KQ}{R^3} r^2 \cdot \frac{3Q}{R^3} r^2 dr = \frac{3KQ^2}{R^6} r^4 dr$$

بمكاملة العبارة الأخيرة من $r=0$ إلى $r=R$ يمكننا الحصول على الطاقة
اللازمة لتوليد التوزيع الشحني الكروي ذي نصف القطر R ؛ أي:

$$U(Q, R) = \int dU = \frac{3KQ^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{3KQ^2}{R^6} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$= \frac{3KQ^2}{R^6} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3KQ^2}{5R}$$

- تتكون نواة ذرة عددها الذري Z وعددها الكتلي A ، من Z بروتونات،
شحنة كل منها $|e|$ ، ومن $A-Z$ نيوترونات متعادلة الشحنة. فإذا كان نصف
قطرها R ، وأمكن اعتبار توزيع شحنة البروتونات $Z|e|$ منتظما، فإن الطاقة
الكهربائية الكولومية لهذه النواة هي

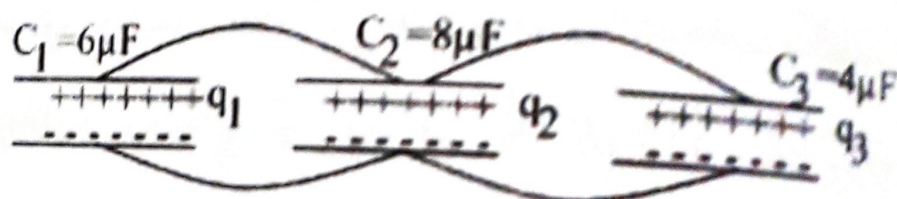
$$U = -\frac{3KZ^2e^2}{5R}$$

الطاقة الابتدائية المختزنة في هذه الجملة هي:

$$U_0 = U_{10} + U_{20} + U_{30} = \frac{1}{2} \frac{q_{10}^2}{C_1} + \frac{1}{2} C_2 V_{20}^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(600 \cdot 10^{-6})^2}{6 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2} (8 \cdot 10^{-6}) \cdot (50)^2 = 0.04 \text{ ج}$$

عندما توصل المكثفات كما بالشكل المقابل:



فإن اللبوسات المتصلة ببعضها البعض ستبادل الشحنات فيما بينها، إلى أن يتزن الجمل، ويصبح فرق الكمون بين لبوسي كل مكثفة واحداً. إذاً:

$$V_1 = V_2 = V_3 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \Rightarrow \begin{cases} C_2 q_1 - C_1 q_2 = 0 \\ C_3 q_1 - C_1 q_3 = 0 \\ C_3 q_2 - C_2 q_3 = 0 \end{cases} \dots (*)$$

حسب مبدأ انحفاظ الشحنة، وطالما أن اللبوس الموجب للمكثفة الأولى حصل باللبوس السالب للمكثفة الثانية فإن:

$$q_{10} - q_{20} + q_{30} = q_1 + q_2 + q_3$$

$$600 \cdot 10^{-6} - C_2 V_{20} + 0 = 2 \cdot 10^{-4} C = 200 \mu C$$

$$\therefore q_1 + q_2 + q_3 = 200 \mu C \dots (**)$$

بأخذ معادلتين من جملة المعادلات (*)، والمعادلة (**) يكون:

$$[8q_1 - 6q_2 = 0 ; 4q_1 - 6q_3 = 0 ; q_1 + q_2 + q_3 = 200 \mu C]$$

بحل هذه الجملة نحصل على:

$$q_1 = 66,666 \mu C ; q_2 = 88,888 \mu C ; q_3 = 44,444 \mu C$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = V = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 11,11 \text{ v} \quad \text{إذا:}$$

. لاحظ أنه يمكن حل هذه المسألة بالمنطق الآتي:

بعد التوصيل والاتزان يكون فرق الكمون بين طرفي كل مكثفة واحداً، وحيث أن سعة مكثفة تميز مدى استيعابها للشحنة عند فرق كمون معين، فإن الشحنة المتبادلة، وهي المجموع الجبري لشحنات اللبوسات الثلاثة المتصلة ببعضها، ستتوزع فيما بينها، كل حسب مدى استيعاب مكثفته للشحنة. إذا:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 18 \mu F \quad ; \quad q = q_{10} - q_{20} + q_{30} = 200 \mu C$$

$$\therefore q_1 = \frac{q}{C} \cdot C_1 = 66,666 \mu C , \quad q_2 = \frac{q}{C} \cdot C_2 = 88,888 \mu C ,$$

$$q_3 = \frac{q}{C} \cdot C_3 = 44,444 \mu C$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 + \frac{1}{2} C_3 V_3^2$$

$$= \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + C_3) V^2 \quad : V_1 = V_2 = V_3 = V$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot (11,111)^2 = 0.0011 \text{ J}$$

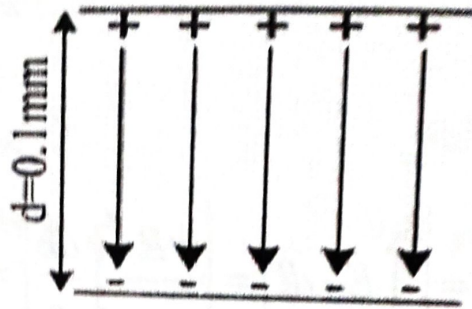
ج- عندما تُربط مقاومة على التوازي مع جملة المكثفات فإنها ستفرغ تماماً وبالتالي فمقدار الشحنة التي ستسري في المقاومة هو:

$$q = q_1 - q_2 + q_3 = 200 \mu C$$

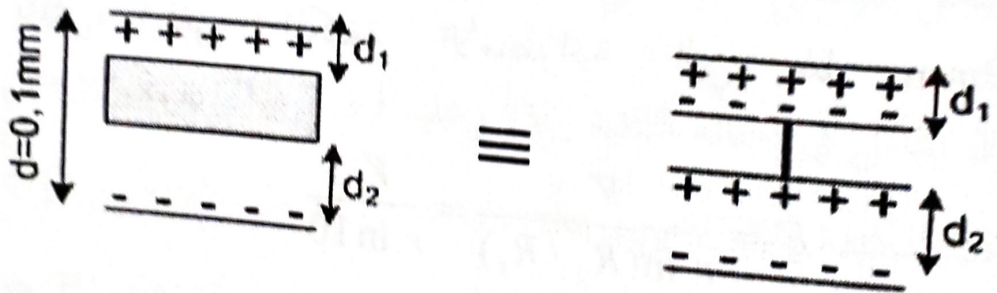
15
يكتب الحقل الكهربائي بين لبوسي مكثفة هوائية بـ:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \frac{\epsilon_0 V}{d} = \frac{q}{S}$$

$$\therefore q = \frac{\epsilon_0 S V}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 44,25 \cdot 10^{-9} C = 44,25 nC$$

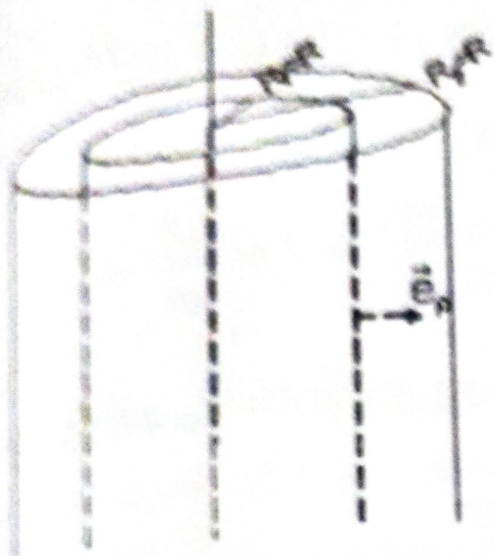


ب- حيث أن عبارة الحقل هي $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ ، فإنه إذا زادت الشحنة إلى الضعف فإن الحقل كذلك سيشهد إلى الضعف.
ج- عندما تُدخل الصفيحة المعدنية فإن الوضع سيصبح كما بالشكل المقابل.



فهو يكافئ مكثفتين مربوطتين على التسلسل.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{d - d_0}{\epsilon_0 S} \\ &= \frac{(0,1 - 0,05) \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (50 \cdot 10^{-4})} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-10}} \Rightarrow C = 8,85 \cdot 10^{-10} F \\ &= 0,885 nF = 885 pF \end{aligned}$$



واضح أن هذه السعة غير متعلقة بموضع الصفيحة.

التصميم 16 :

١- مثلما عرفنا في موضوع حساب الحقول الكهربائية باستخدام نظرية غاوس، فإن الحقل يكون:

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$\therefore dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow |V| = \left| \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \left| \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \right| = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{V}{\ln(R_2 / R_1)}$$

$$\therefore E = \frac{V}{r \ln(R_2 / R_1)} = \frac{V}{r \ln 2} \quad : R_1 = R \quad ; \quad R_2 = 2R$$

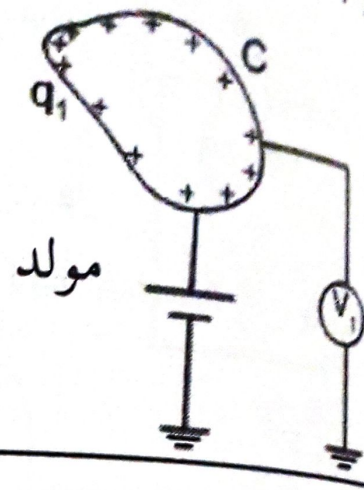
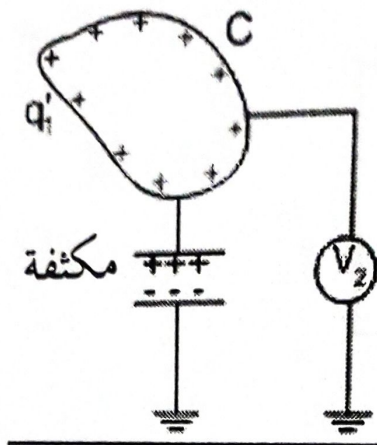
ب- بالمثل، ففي المكثفة الأسطوانية التي لها $R_1 = 2,5 \text{ mm}$ $R_2 = 2,5 \text{ cm}$ يكون:

$$E = \frac{V}{r \ln(R_2 / R_1)} = \frac{V}{r \ln 10}$$

$$E = \frac{V}{R_1 \ln(R_2 / R_1)} \quad \text{أشد قيمة لهذا الحقل تكون عند } r=R_1 \text{ أي:}$$

$$E_{\max} = \frac{V_{\max}}{R_1 \ln(R_2 / R_1)} = E_C \quad \text{وعليه فإن:}$$

$$\therefore V_{\max} = R_1 \cdot E_C \cdot \ln(R_2 / R_1) = 0,25 \cdot (3 \cdot 10^4) \cdot \ln(25/2,5) \\ = 17269,3882 \text{ v} \approx 17,27 \text{ Kv}$$



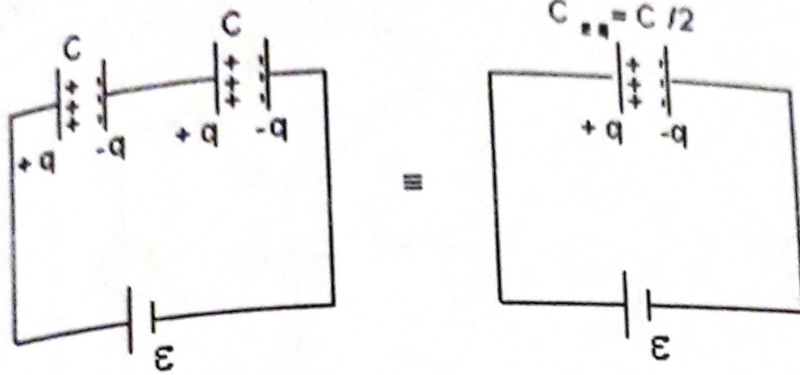
(2) يتبادل الناقل الشحنة
مع اللبوس المتصل به فقط

(1) الشحن: يتبادل الناقل
الشحنة مع الأرض عبر المولد

في الخطوة الأولى فرق الكمون بين الناقل والأرض هو V_1 ؛ أي أن
كمون الناقل هو V_1 ، لأن كمون الأرض صفر.
يملك الناقل سعة ذاتية C ، وعليه فمقدار الشحنة التي يحملها $q_1 = CV_1$.
في الخطوة الثانية يتم تبادل للشحنة بين الناقل ولبوس المكثفة المتصل به،
وعليه فإن الناقل سيعطي جزءاً من شحنته له، ويبقى المجموع الجبري ثابتاً؛ أي:
 $q_1 = q'_1 + q_0$

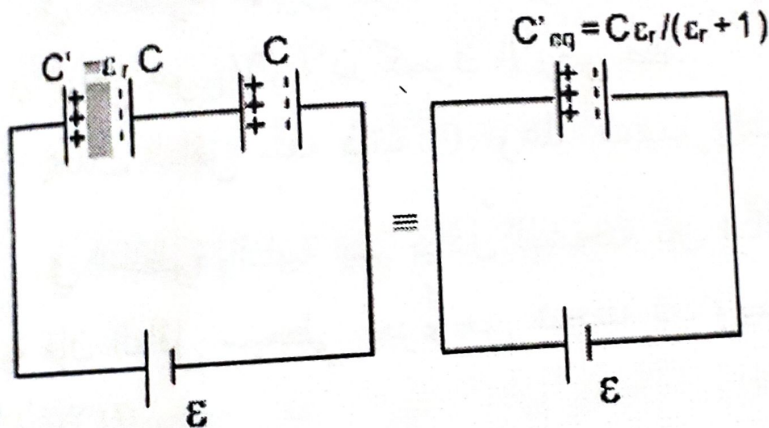
كمون الناقل في الحالة الثانية V_2 ، وعليه فإن: $q'_1 = CV_2$
وشحنة المكثفة $q_0 = C_0 V_2$ ، إذاً:

$$CV_1 = CV_2 + C_0 V_2 \Rightarrow C = C_0 \frac{V_2}{V_1 - V_2} \therefore q_1 = CV_1 = C_0 \frac{V_2 V_1}{V_1 - V_2}$$



$$q = C_{eq} \varepsilon = \frac{C \varepsilon}{2} ; E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q/S}{\varepsilon_0} = \frac{C \varepsilon}{2 \varepsilon_0 S}$$

وجود عازل له ε_r بين لبوسي المكثفة يجعل سعتها تتضاعف بالمعامل ε_r ، وعليه فإن: $C' = \varepsilon_r C$.



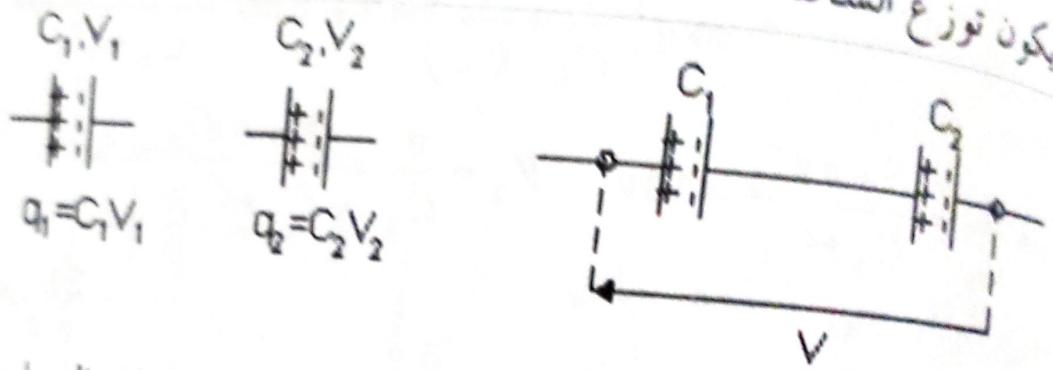
$$\frac{1}{C'_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{\varepsilon_r C} \Rightarrow C'_{eq} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} C ; q' = C'_{eq} \varepsilon = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} C \varepsilon$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q'/S}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{C \varepsilon}{(\varepsilon_r + 1) \varepsilon_0 S} \therefore \frac{E}{E'} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} \Rightarrow E' = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} E$$

ضعفُ بالمعامل $\frac{2}{\varepsilon_r + 1}$ أي أن الحقل بوجود العازل $\varepsilon_r > 1 \Rightarrow \varepsilon_r + 1 > 2 \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon_r + 1} < 1$

الشحنة التي تعبر المنبع هي الفرق في شحنة المكثفة، قبل وجود العازل
 إبدأ: $\Delta q = |q' - q| = \frac{C \epsilon}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}$

19 : يكون توزيع الشحنة كما بالشكل الموالي.



ينبغي للتوتر الحدي الذي تتحمله الجملة وهي مربوطة على التسلسل، أن
 نق عدم زيادة توتر كل من المكثفتين عن التوتر الحدي الذي تتحمله؛ لذا
 يعني أن يكون: $(q \leq q_1 ; q \leq q_2) \Rightarrow q \leq \min(q_1, q_2)$

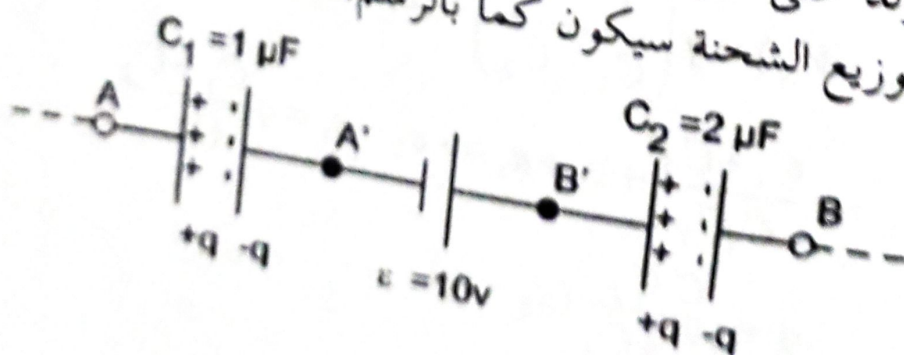
$$q_1 = C_1 V_1 = 6 \cdot 10^3 \mu C ; q_2 = C_2 V_2 = 8 \cdot 10^3 \mu C$$

$$\therefore q \leq 6 \cdot 10^3 \mu C , V \leq \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = 9 \cdot 10^3 v$$

فالتوتر الحدي للجملة هو $9 \cdot 10^3 v = 9 \text{ kv}$

التصميم 20 :

يعمل المولد على تحريك الشحنة، بحيث يحقق فرق كمون ثابت بين
 طرفيه؛ وعليه فتوزيع الشحنة سيكون كما بالرسم.



$$(V_A - V_A) + (V_A - V_B) + (V_B - V_B) = 5$$

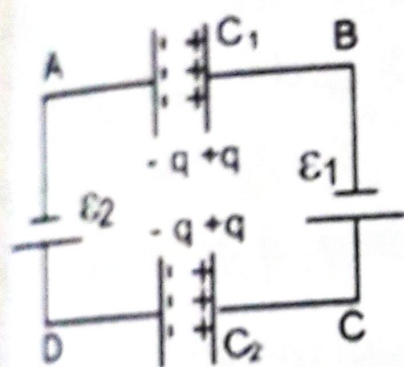
$$V_A - \epsilon + V_B = 5$$

$$\frac{q}{C_1} - \epsilon + \frac{q}{C_2} = 5$$

$$\Rightarrow q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 5 + \epsilon \Rightarrow \frac{(5 + \epsilon)C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{(5 + \epsilon)C_2}{C_1 + C_2} = 10 \text{ v} , V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{(5 + \epsilon)C_1}{C_1 + C_2} = 5 \text{ v}$$

التمرين 21 :



يحدث المولد ϵ_1 تبادلاً للشحنة بين اللبوسين الأيمنين لكل من المكثفتين، ويحدث المولد ϵ_2 تبادلاً للشحنة بين اللبوسين الأيسرين لهما. وعليه فإن توزيع الشحنة سيكون كما بالشكل المقابل.

$$V_B - V_A = \frac{q}{C_1} ; V_D - V_C = \frac{q}{C_2} ; V_C - V_B = \epsilon_1 ; V_D - V_A = \epsilon_2$$

نجمع جملة هذه المعادلات، طرفاً إلى طرف، نجد:

$$2(V_D - V_A) = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

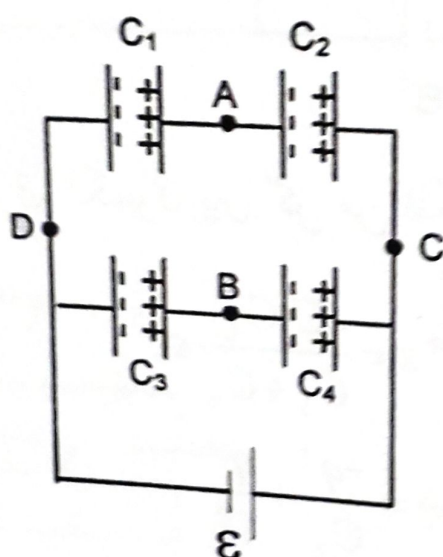
$$2\epsilon_2 = q \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + \epsilon_1 + \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_2 - \epsilon_1 = q \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$$\therefore q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

وحدات المكثفة هي القيمة المطلقة لهذا المقدار.

$$V_B - V_A = V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$$V_D - V_C = V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

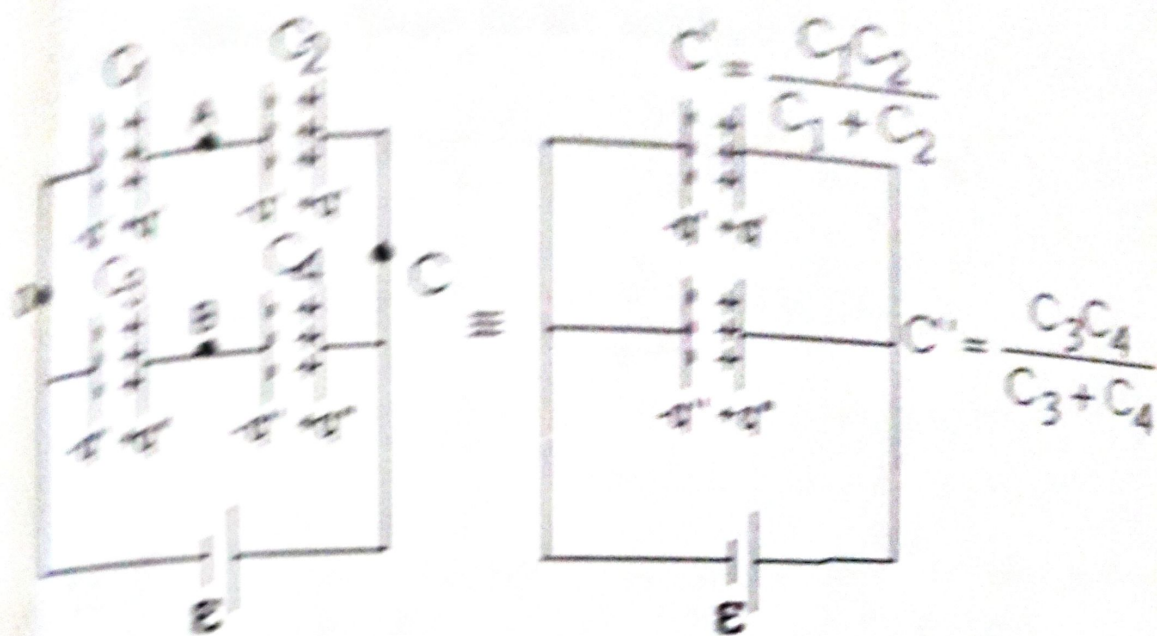


المعيار 22 :

بمعل للولد على إحداث تبادل
الشحنات بين اللبوسين الأيمنين
للمكثفين C_2 و C_4 من جهة، واللبوسين
الأيسرين للمكثفين C_1 و C_3 من جهة
أخرى، وعليه يكون توزيع الشحنات
كما بالشكل المقابل.

اللبوس الأيسر للمكثفة C_2 يتبادل الشحنة مع اللبوس الأيمن للمكثفة
 C_1 ، وحيث أن هذه الجملة من اللبوسين معزولة، أي غير متصلة بنواقل أخرى،
فإن المجموع الجبري لشحنتها يظل ثابتاً، وهو الصفر، لأنهما في الأصل متعادلان
كهربائياً، وعليه فإن: $q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = q'$

وبالمثل يكون: $q_3 = q_4 = q'$



فرق الكمون بين كل من المكثفتين هو ϵ ، وعليه فإن:

$$q' = C' \epsilon = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \epsilon \quad ; \quad q'' = C'' \epsilon = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \epsilon$$

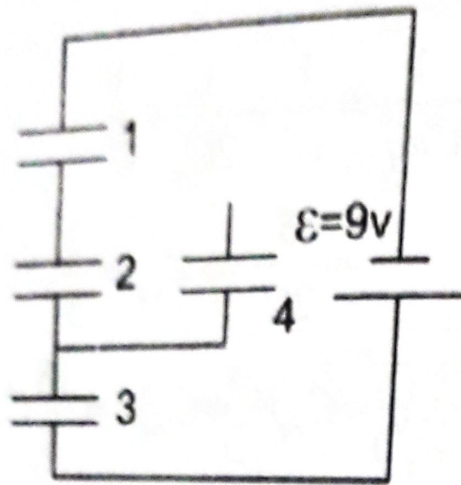
$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = \frac{-q'}{C_2} + \frac{q''}{C_4}$$

$$= -\frac{C_1}{C_1 + C_2} \epsilon + \frac{C_3}{C_3 + C_4} \epsilon = \frac{(C_3 C_2 - C_1 C_4)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \epsilon$$

$$= (V_A - V_D) + (V_D - V_B) = \frac{q'}{C_1} + \frac{(-q'')}{C_3}$$

$$= \frac{C_2}{C_1 + C_2} \epsilon - \frac{C_4}{C_3 + C_4} \epsilon = \frac{(C_2 C_3 - C_4 C_1)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \epsilon$$

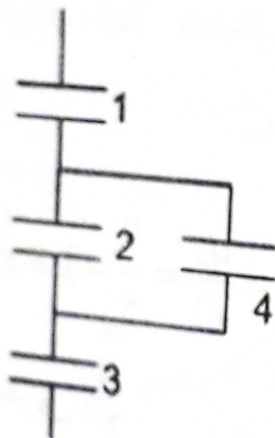
$$V_A - V_B = 0 \Rightarrow C_3 C_2 - C_1 C_4 = 0 \Rightarrow \frac{C_3}{C_4} = \frac{C_1}{C_2} \quad *$$



الوضع في البداية كالآتي:

حيث أن كل المكثفات متماثلة، فإن الكمون بين لبوسي كل منها $\frac{\epsilon}{3} = \frac{9}{3} = 3V$ ، أما المكثفة (4) فلن

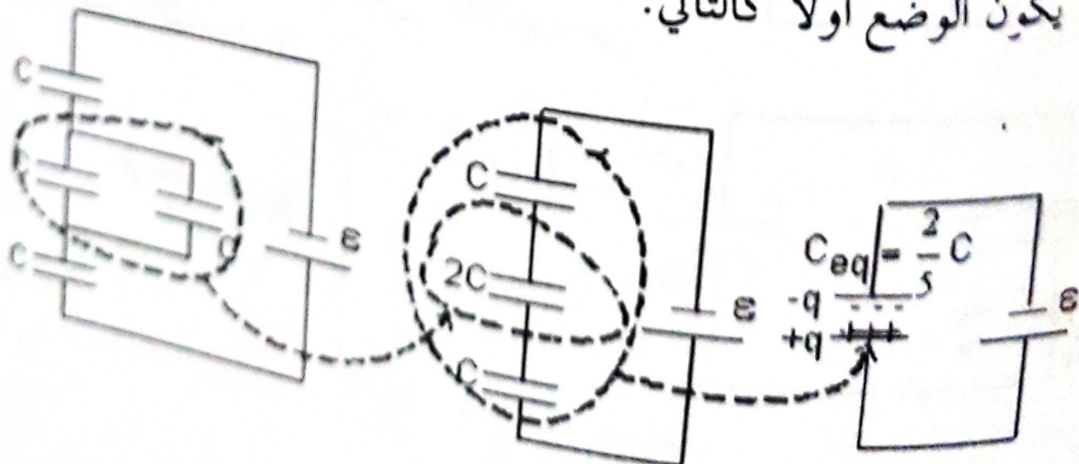
الوضع الموالي كالآتي:



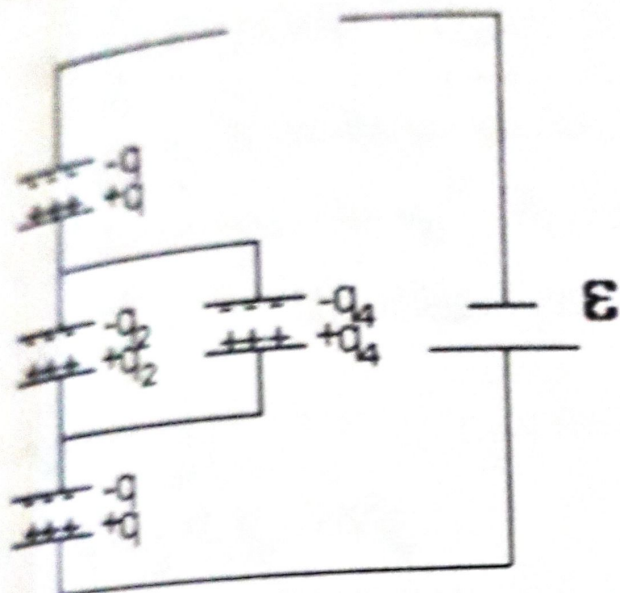
يبقى فرق الكمون بين لبوسي كفتين (1) و (3) كما هو؛ أي $V_1 = V_3 = 3V$ ، أما بين المكثفتين (2) (4) فسيحدث تبادل للشحنات التي كانت تمتلكها المكثفة (2) فقط. وحيث أنهما متماثلتان، فإن هذه الشحنة ستتوزع بينهما بالسوية؛ أي:

$$q_2 = q_4 = \frac{q_{20}}{2} = \frac{CV}{2} \therefore V_2 = V_4 = \frac{q_2}{C} = \frac{q_4}{C} = \frac{V}{2} = \frac{3}{2} = 1,5V$$

ب- يكون الوضع أولاً كالتالي:



بعد فصل القاطعة S_1 يظل الوضع كما هو:



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{C}$$

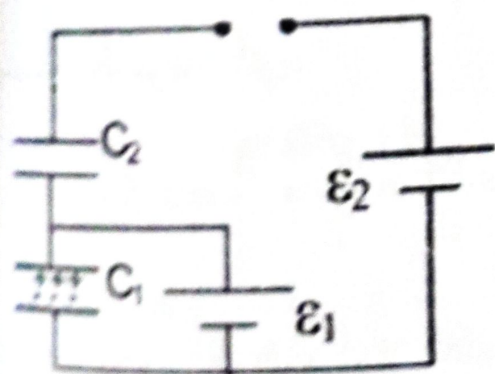
$$= \frac{5}{2C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{2}{5}C$$

$$\therefore q = C_{eq}V = C_{eq}\varepsilon = \frac{18}{5}C$$

$$\left. \begin{array}{l} q_2 = q_4 \text{ (لأنهما متماثلتان)} \\ q_2 + q_4 = q \end{array} \right\} \Rightarrow q_2 = q_4 = \frac{q}{2} = \frac{9}{5}C$$

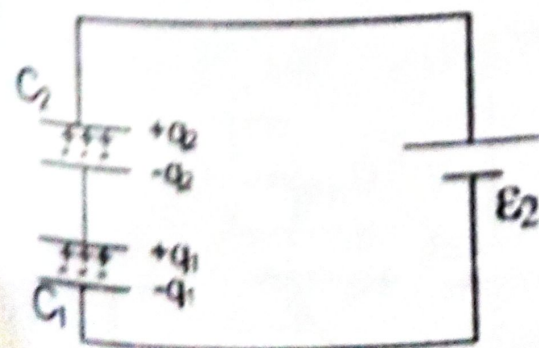
$$\therefore V_1 = V_3 = \frac{q}{C} = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ v} ; V_2 = V_4 = \frac{q_2}{C} = \frac{q_4}{C} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ v}$$

التمرين 24 :



المرحلة الأولى:

بعد غلق القاطعة S_1 تُشحن المكثفة C_1 بالمولد ε_1 ، ويكون مقدار شحنتها $q_1 = C_1 \varepsilon_1$ ، وتظل كذلك حتى بعد فصل القاطعة S_1 .



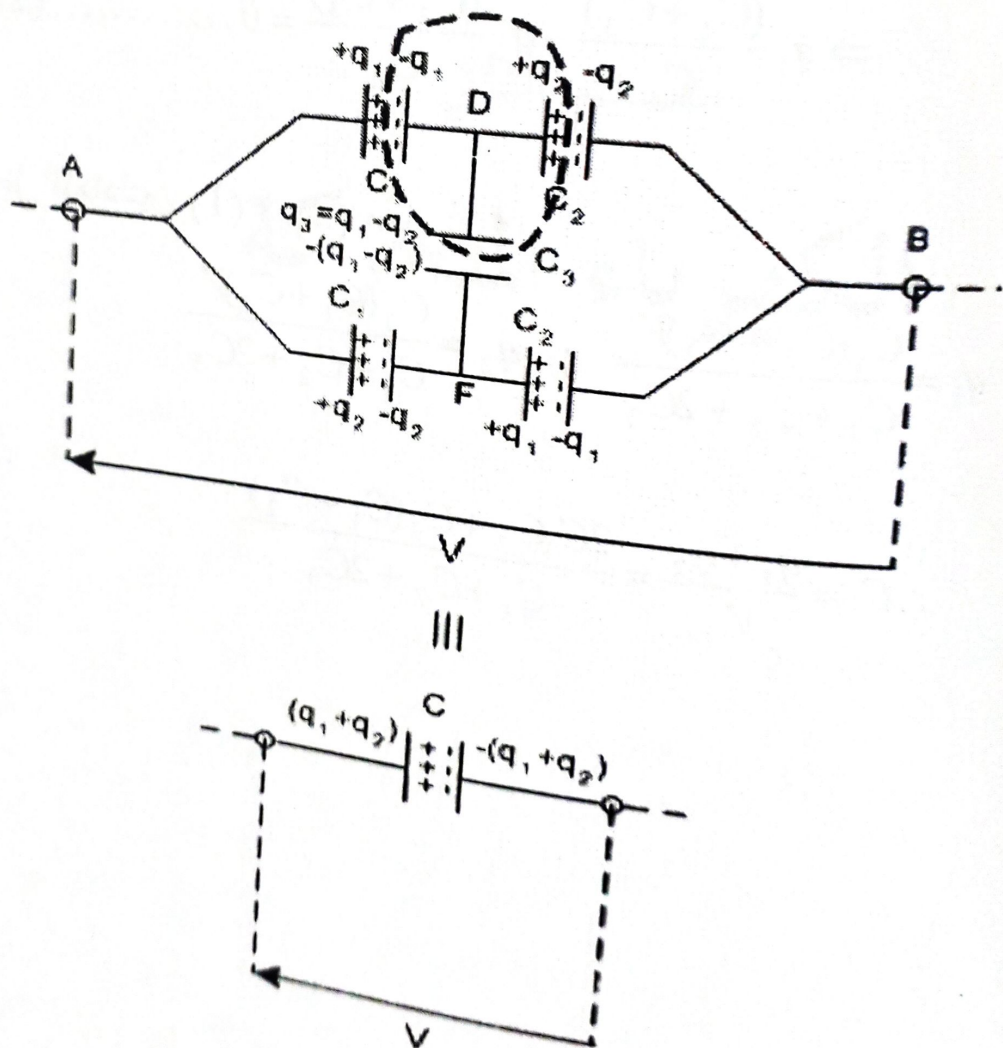
المرحلة الثانية:

$$\left[\begin{array}{l} q_1 - q_2 = q_{10} = C_1 \varepsilon_1 \\ \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon_2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q_1 = \frac{(C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2) C_1}{C_1 + C_2} \\ q_2 = \frac{C_1 C_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{C_1 + C_2} \end{array} \right]$$

$$\therefore V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{(C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2)}{C_1 + C_2} ; V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{C_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{C_1 + C_2}$$

بين 25 :

من تناظر المسألة يمكن توزيع الشحنات على المكثفات كما بالشكل



الجملة الموضوعة في حيز جملة معزولة، وعليه فإن:

$$-q_1 + q_2 + q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = q_1 - q_2$$

$$V = V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B) = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = V \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$V = V_A - V_B = (V_A - V_F) + (V_F - V_B) = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1}{C_1} = V \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$V_A - V_A = (V_A - V_D) + (V_D - V_F) + (V_F - V_A) = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_3} = 0$$

$$= q_1 \frac{(C_1 + C_3)}{C_1 C_3} - q_2 \frac{(C_2 + C_3)}{C_2 C_3} = 0$$

$$\Rightarrow q_1 \frac{(C_1 + C_3)}{C_1} - q_2 \frac{(C_2 + C_3)}{C_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

لحل المعادلتين (1) و (2) معا، نجد:

$$q_1 = \frac{C_1(C_2 + C_3)V}{C_1 + C_2 + 2C_3} \quad ; \quad q_2 = \frac{C_2(C_1 + C_3)V}{C_1 + C_2 + 2C_3}$$

$$\therefore C = \frac{q_1 + q_2}{V} = \frac{2C_1 C_2 + C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + 2C_3}$$