

**КУРС ДЕ МЕКАНИКЭ ТЕОРЕТИКЭ**





# К УРС ДЕ МЕКАНИКЭ ТЕОРЕТИКЭ

*Азмис де Министерул ынвэцэмынтулуй супериор  
ши медиу спецал ал УРСС  
ын налцате де мануал пентру студений  
школилор супериоре техниче*

*Традучере дин лимба русэ де*  
*Г. Г. Коман ши М. Е. Маринчук*

*В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин,*  
*А. Л. Дворников*

**КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Издание 2-е, стереотипное  
Издательство «Высшая Школа»  
Москва 1968



## ПРЕФАЦЭ

Презентул «Курс де механикэ теоретикэ» есте дестинат пентру студений де ла институцииле де ынвэцэмынт техник супериор, че прегэтеск инжинер де профил ларг. Ел есте алкэтуит ын кореспундере ку програма елаборатэ де Консилиул методико-штиинцифик ла механикэ теоретикэ де пе лынгэ Министерул ынвэцэмынтулуй супериор ши медиу специал ал УРСС, превэзутэ пентру 200—220 де оре де студиу. Ачест мануал лоате фи фолосит де асеменя ла предаря механичий теоретиче ын волум де 140 пынэ ла 250 де оре.

Мануалул пропус есте резултатул уней активитэць педагожиче де мулць ань а ауторилор ын Шкоала техникэ супериорэ «Н. Е. Бауман» дин Москова, каре прегэтеште инжинер-конструкторь ку о сферэ ларгэ де специалитэць ын домениул конструкций де машинь ши апарате.

Редучеря релативэ а курсулуй черя о селекции минуциоасэ а материалулуй теоретик ши а екземпелор, привитоаре ла пэриле принципале але курсулуй. Ын ачест курс сынт инклузе ун шир де capitoле суплиментаре ын компарации ку мануалеле де механикэ теоретикэ екзистенте пентру институцииле де ынвэцэмынт техник супериор, рекомандате де програма ноуэ, ын депенденцэ де профилул институцией де ынвэцэмынт супериор. Де екземплу, есте инклуб капитолул реферитор ла витеза ши акцелерация пунктулуй ын координате курбилийнй. Ын динамикэ есте експусэ дестул де комплет теория жёнералэ а осцилацилор мичь але системелор механиче ку ун град ши доуэ граде де либертате. Есте лэржитэ консидерабил динамика аналитикэ, ын специал, пентру прима датэ се студиязэ базеле механичий системелор неолономе, инклубив екуацииле класиче але луй Апел. Сынт дате ун шир де екземпле де системе ку легэтурь неолономе, екуацииле канониче але динамичий ши принципилул луй Остроградский — Хамилтон.

Есте лэржитэ динамика корпулуй солид: се аминтеште деспре теория ротацилор перманенте але корпулуй солид ку ун пункт фикс ши деспре класа жироскоапелор луй Лагранж. Одатэ ку теория апроксимативэ а жироскопулуй есте експусэ суплиментар теория пречисэ а куплулуй жироскопик ла пречесия регулатэ. Ын capitoле специале сынт експусе де асеменя

элементе де теорие привитоаре ла сателиций артифициаль ши сынт дате куноштинцеле де базэ реферитор ла мишкаря пунктулуй де масэ вариабилэ. Ын теория ку привире ла чокнире есте инкласэ теорема луй Келвин, рар експусэ ын мануалеле екзистенте, ле база кэрея се демонстразэ теорема луй Карно.

Ун шир де партикуларитэць але курсулуй сынт легате ку черинцеле дисциплинелор ынрудите ши ын примул рынд ку резистенца материалелор. Ку ачест скоп ын статикэ есте инклас ун калитол реферитор ла челе май симпле форце репартизате, ши есте черчетатэ ынкастрэря атыт пентру системул план, кыт ши пентру системул де форце ын спациу.

*Ауторий*

### **Объектул механикий ши импортанца ей пентру техника модернэ ши штининцеле натурий**

Тоате феноменеле, обсервате ын лумя материалэ, орькыт де компликате ар фи еле, репрезинтэ диферите форме ши проприетэць але материей.

Форма де базэ а екзистенцей материей есте мишкаря. Материя поате сэ трякэ динтр'о формэ ын алта. Ын механикэ се черчетязэ нумай ачеле форме але материей, каре пот фи нумите материалае, спре деосебире де астфел де объекте материалае, де екземплу, сарчина електрикэ, унда електромагнетикэ ши алтеле. Орьче скимбаре а материей се нумеште *мишкаре*. Мишкаря поате авя диферите форме.

Уна дин формеле мишкэрий есте мишкаря механикэ. Се нумеште *мишкаре механикэ* депласаря ын спациу ши ын тимп а формелор материалае але материей.

Се нумеште *механикэ* штинца, каре студиязэ мишкэриле механиче. О импортанцэ деосебитэ капэтэ механика ын презент, кынд, даторитэ стрэлучителор реализэрэ але штинцей ши техникий советиче, с'а ынчепут о ерэ ноуэ, ремаркатэ де ун рынд де викторий ын студияря ши експлораря спациулуй космик. Кучерия космосулуй чере ын примул рынд реализаря мишкэрилор космиче, мэреце дупэ дименсиунэ ши дестул де компликате. Калкулул траекториилор космиче, елабораря методелор де дирижаре а зборулуй, репрезинтэ ниште проблеме механиче ши математиче компликате. Ын прегэтиря ши реализаря зборурилор ын космос ымпреунэ ку саванций-механич партичипэ репрезентанций челор май диферите домений де куноштинце, ын специал радиотехничиений, специализаций ын аутоматикэ ши алций.

Механика теоретикэ с'а креат ымпреунэ ку дезволтаря ынтрэжый цивилизаций а омений. Мулте лежэ дин домениул механикий ерау куноските ынкэ ын антикитате, ку мулт ынаинтя ерей ноастре, де екземплу ренумита леже а луй Архимеде, каре ши пынэ ын презент аре о маре импортанцэ. Ку тоате ачестя, куноштинцеле дин епока чей ну ерау систематизате ши ну алкэтуя ынкэ о штинца дефинитивэ.

Ын секолул XVII ренумидый саванцэ Галилей ши Ньютон ау систематизат ноциуниле елементаре деспре механикэ ши ау дат о формуларе екзактэ а принципиилор ей фундаментале. Ей ау стабилит принципиле механикий, каре кореспунд адевърателор лежитэць ын мишкэриле механиче ши прин ачаста ау креат база пентру дезволтаря ей ултериорэ.

Ын секолул XX А. Айнштайн а констатат о кореспундере ши май маре а лежилор механикий ку феноменеле реале але натурий, креынд механика теорией релативитэций рестрынсе.

О контрибуции инапречиабилэ ын креаря механикий контемпоране апарцине штиинцей ноастре советиче.

Астфел де саванць ка М. В. Остроградский (1801—1862), Н. Е. Жуковский (1847—1921), С. В. Ковалевская (1850—1891), С. А. Чаплыгин (1869—1942), А. М. Ляпунов (1857—1918), К. Е. Циолковский (1857—1935), А. Н. Крылов (1863—1945) ши мулць алций прин черчетэриле ши инвенцииле сале ау контрибуит консидабил ла дезволтаря механикий ши апликация ей ын техникэ ши ын штиинцеле натурий. Ын презент саванций советичь лукрызэ ку сукчес континуунд глаориаселе традиций але корифеилор штиинцей национале.

Механика теоретикэ, ка ши тоате челелалте штиинце деспре лежила дезволтэрий натурий ши сочиетэций, фолосеште метода марксистэ филозофикэ де куноаштере. Рекуноскынд експериенца дрепт сурсэ а куноштинцелор ноастре, материализмул марксист филозофик дэ о маре импортанцэ гындирий теоретиче, каре оперязэ ку ноциуниле жєнерале.

Студиинд мишкэриле механиче, каре ау лок ын спациу ши ын тимп, механика теоретикэ фолосеште пе ларг методеле математиче де студиу, методеле абстракцией, жєнерализэрий, методеле ложичий формале.

Ла база фиекэрей пэрць а механикий стау ун шир де ноциунь ши дефиниций; есте адоптат ун систем де аксиоме, адикэ челе май импортанте принципий, верификате прин експериенце, ши ку ажуторул рационаментелор формал ложиче сынт трасе конклузий респективе. Ачесте конклузий-теореме сынт ниште регулентру диферите калкуле, нечесаре ла студиеря кантитативэ а мишкэрилор механиче.

Механика теоретикэ се ымпарте ын трей пэрць: статика, чинематика ши динамика. Статика ши динамика сынт ниште пэрць динтр'ун компартимент май маре ал механикий — чинетика.

Статика ын механикэ се нумеште де обичей ачя парте а ей, каре се окупэ ку студиул лежилор де екилибру ал корпурилор материале.

Статика ла рындул ей се ымпарте ын май мулте пэрць: статика корпулуй солид ши статика системелор материале (ликиде, газоасе, еластиче ш. а. м. д.).

Чинематика студиязэ нумай формеле жеометриче але мишкэрилор механиче а материей, фэрэ а черчета кондицииле ши каузеле, че проваокэ ачесте мишкэрь.

Динамика репрезинтэ чя май маре парте а механикий ши студиязэ мишкаря ын функции де факторий физичь, че о кондициязэ.

I

**СТАТИКА**



## НОЦИУНЬ, ДЕФИНИЦИИ ШИ АКСИОМЕ ДЕ БАЗЭ АЛЕ СТАТИЧИЙ КОРПУЛУЙ СОЛИД

### § 1. НОЦИУНЬ ШИ ДЕФИНИЦИИ ДЕ БАЗЭ

Ын статика корпулуй солид се студиязэ интеракциуня механикэ динтре рижиде ши кондицилие де екилибру але ачестор корпурь.

Се нумеште *корп материал* орьче кантитате де материе (субстанцэ), каре окупэ ун оарекаре волум ын спациу. Сынт посибиле казурь, кынд ун корп ын унеле дирекций аре дименсиунь екстрем де мичь ын компарацие ку дименсиуниле ын алте дирекций. Ын асемения казурь корпул репрезинтэ о супрафацэ материалэ сау о линии материалэ.

Се нумеште *акциуне механикэ* а унуй корп асупра алтуя о астфел де акциуне, ла каре се неглижазэ скимбэриле ын структура кимикэ а корпулуй ши ын старя луй физикэ (ла ынкэлзире, рэчире ш. а. м. д.). Дакэ корпул суферэ о акциуне механикэ дин партя алтор корпурь материалэ, атунч ел ышь поате скимба мишкаря са ын спациу сау ышь пэстриязэ старя де репаус. Акциуня механикэ поате авя лок атыт прин контактул корпурилор, кыт ши ла дистанцэ (атракцие, респинжере).

Де екземплу, атракция Пэмынтулуй, екзерчитатэ асупра фиекэруй корп, креазэ греутатя корпулуй сау форца де греутате.

Се нумеште *корп рижид* ун астфел де корп материал, форма жеометрикэ ши дименсиуниле кэруя ну се скимбэ нич ла ун фел де акциунь механиче дин партя алтор корпурь.

Се нумеште рижид корпул, ла каре, ын урма орькэро акциунь механиче, дистанца динтре доуэ пункте арбитраре але луй рэмыне константэ.

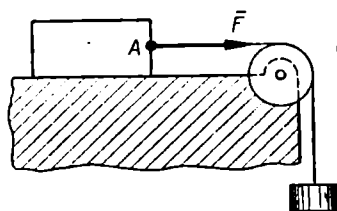
Ын натурэ ну се ынтылнеск асемения корпурь. Фиекаре корп, фиинд супус акциунилор механиче се деформязэ ынтр'о мэсурэ оарекаре. Ынсэ ачесте деформаций пот фи атыт де мичь, ынкыт пентру обсерваря лор сынт нечесаре апарате контемпоране деосебит де компликате. Де мулте орь астфел де деформаций мичь ну инфлуенциязэ асупра мишкэрий корпурилор солиде.

Корпул материал, дименсиуниле кэруя пот фи неглижате, се нумеште *пункт материал*.

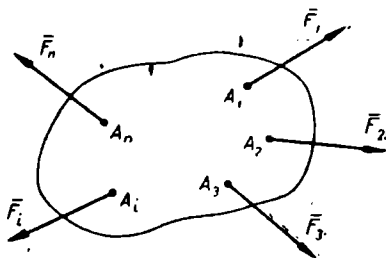
Уна дин ноциуниле де базэ але механичий есте форца. *Форца есте о мэриме физикэ векториалэ, каре експримэ валоаря, дирекция ши сенсул акциуний екзерчитате асупра корпулуй дат дин партя унуй алт корп материал*.

Форца се характеризязэ прин пунктул де апликацие, валоаре нумерикэ, дирекцие ши сенс. Пентру а стабилитэ унитэциле, че експримэ мэримя форцей апликате унуй корп, еа се компарэ де обичей ку форца де атракцие, екзерчитатэ де Пэмынт асупра корпурилор. Астфел, форцелe се мэсоарэ ын ньютонь ( $n$ ). Форца, егалэ ку  $9,8 \text{ n c'au } 1 \text{ кгф}$  (кг-форцэ), експримэ акциуня механикэ, каре о екзерчитэ прин атракция са Пэмынтул асупра уней кантитэць де апэ де ун дечиметру куб ла  $4^\circ\text{C}$ , ла нивелул мэрий ши ла о пресигуне атмосферикэ нормалэ. О асемения акциуне поате фи реализатэ тотдяуна ну нумай ын дирекцие вертикалэ, чи ши ын алтэ дирекцие, де екземплу, оризонталэ (фиг. 1).

Ын фигура 1 векторул  $\vec{F}$  есте форца;  $A$ —пунктул ей де апликацие. Пентру мэсураря акциунилор есте конвенабил сэ се фолосяскэ ниште корпурь деформабиле, ын спечиял динамометре ку арк. Екземплу де чел май симплу динамометру есте баланца ку арк.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Се нумеште *систем де форце* о тоталитате де форце апликате ын диферите пункте але унуй корп. Форцелe унуй систем експримэ диферите акциунь асупра корпулуй дат дин партя алтор корпурь материалe.

Системул де форце, апликате унуй корп солид дат (фиг. 2) се нотязэ астфел:  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n)$ .

Доуэ системе де форце се нумеск *еквиваленте*, дакэ фиекаре дин еле, акционынд сепарат, пот комуника унуй корп, че се гэсеште ын репаус, уна ши ачеш мишкаре.

Еквиваленца системелор де форце се нотязэ астфел:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_e).$$

Ун систем де форце се нумеште *еквивалент ку zero*, сау *екилибрат*, дакэ, финнд апликате унуй корп, че се гэсеште ын репаус, ну скимбэ страя луй де репаус. Ун асемения систем де форце се нотязэ астфел:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$



Ун систем де форце, екивалент ку zero, фиинд апликат унуй корп ын мишкаре, ну скимбэ де асемения нич карактерул мишкэрий корпулуй.

Форца *результантэ* а унуй систем де форце дат се нумеште форца екивалентэ ачестуй систем. Форца результатэ а унуй систем де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n)$  се ва нота прин  $\bar{R}^*$ . Атунч

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \in \bar{R}^*.$$

Требуе сэ менционэм, кэ ну орѣче систем де форце аре резултантэ. Де екземплу, доуэ форце, каре акцияээ асупра унуй корп дупэ доуэ дрепте неконкуренте, адикэ каре ну се афлэ ын ачелаш план, н'ау резултантэ.

*Форца де екилибраре а системулуй де форце*  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  се нумеште о астфел де форцэ, каре, фиинд адэугатэ ла ачест систем, формязэ ымпреунэ ку ел ун систем ноу, екивалент ку zero.

Вом нота форца де екилибраре прин  $\bar{R}^{**}$ , атунч

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}^{**}) \in 0.$$

Форцэ де екилибраре поате авя нумай унастфел де систем, каре аре о форцэ резултантэ. Атунч форца де екилибраре се репрезентэ принтр'ун вектор, опус векторулуй форцей резултанте, адикэ  $\bar{R}^{**} = -\bar{R}^*$ . Форца де екилибраре акцияээ асупра корпулуй пе дряпта, ын лунгул кэрея акцияээ форца резултантэ, ынсэ ын сенс контрар.

## § 2. АКСИОМЕЛЕ СТАТИЧИЙ

Ын механикэ сынт стабилите методеле де студиере а мишкэрилор корпурилор материале, реешинд дин принципиале фундаментале, нумите *аксиоме*. Ла база аксиомелор механикий, ши ын спечиял, а статций стэ експериментул, акумулат де омире.

**Аксиома ынтыя:** *Ун систем де доуэ форце, апликате унуй корп солид, че акцияээ пе о дряптэ ын ачест корп, егале ка мэриме, ынсэ опусе ка сенс, есте екивалент ку zero.* Сау, алтфел, асемения доуэ форце се екилибрызэ речипрок.

Ачастэ аксиомэ есте адевэратэ нумай пентру корпуриле рижиде. Ын фигура 3

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 \text{ ши } (\bar{F}_1, \bar{F}_2) \in 0.$$

**Аксиома а доуа:** *Старя механикэ а унуй корп ну се скимбэ, дакэ ла ун систем де форце адэугэм сау супримэм ун алт систем де форце, екивалент ку zero.*

Адмитем, кэ унуй корп и се апликэ май ынтый ун систем

де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ . Фие системул де форце  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_e) \in 0$ , адикэ ел есте екилибрат. Атунч системул де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  ва фи еквивалент ку системул де форце компус дин  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  ши  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_e) \in 0$ , адикэ

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \in \{(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n); (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_e)\}.$$

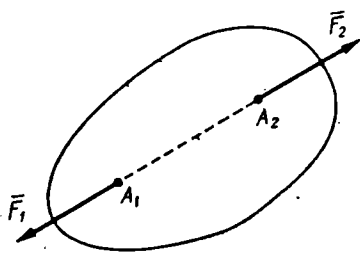
Консечинце. 1. Пе баз аксиомелор де май сус се дедуче теорема, кэ орьче форцэ поате фи депласатэ ын лунгул линии де акциуне, фэрэ а скимба акциуня ей асупра корпулуй.

Сэ консидерэм ун корп рижид, ынтр'ун пункт  $A$  ал кэруя акционязэ форца  $\bar{F}$ . Сэ луэм ун систем екилибрат де форце  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  егале ка мэриме ку форца  $\bar{F}$  ши ориентате пе линия де акциуне а форцей  $\bar{F}$ . Апликэм амбеле форце але ачестуй систем ын пунктул  $B$ , ситуат пе линия де акциуне а форцей  $\bar{F}$  (фиг. 4). Авам

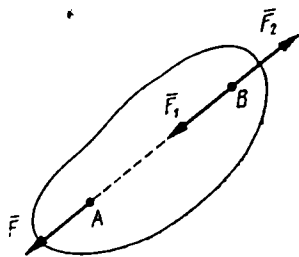
$$\bar{F} \in \{\bar{F}; (\bar{F}_1, \bar{F}_2)\},$$

унде

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 = -\bar{F}.$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Ынсэ конформ аксиомей ынтыя форцеле  $\bar{F}$  ши  $\bar{F}_2$  формязэ ун систем екилибрат, адикэ  $(\bar{F}, \bar{F}_2) \in 0$ , яр пе база аксиомей а доуа еле пот фи супримате. Форца рэмасэ  $\bar{F}_1$  есте егалэ ку  $\bar{F}$ , ынсэ еа есте апликатэ ын пунктул  $B$ . Адеся ачастэ проприетате а форцей, апликате корпулуй солид, се формулязэ астфел:

*Форца, апликатэ унуй корп солид, репрезинтэ ун вектор алу-нектор.*

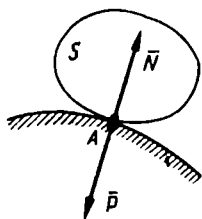
2. Нумай системул, каре поате фи редус ла о форцэ резултантэ, поате авя о форцэ де екилибраре. Атунч форца де екилибраре аре ачешя линии де акциуне ку форца резултантэ, есте егалэ ку еа ка валoare ши опусэ ка сенс.

Аксиома а трея: *Орьче акциуне дэ наштере уней реакциунь егале ши директ опусе.* Ачастэ аксиомэ се фолосеште

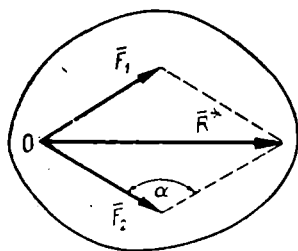
ши ын динамикэ, ши се нумеште лежя луй Ньютон деспре егалитатя акциуний ши реакциуний.

Дакэ, унуй корп дат и се апликэ о форцэ  $\bar{F}$  дин партя алтуй корп, атулч дин партя корпулуй дат ва фи апликацэ ачестуй корп о форцэ  $\bar{F}'$ , егалэ ши директ опусэ форцей  $\bar{F}$ , ( $\bar{F}' = -\bar{F}$ ).

Адмitem, кэ корпус  $S$  (фиг. 5) апасэ ын пунктул  $A$  асупра алтуй корп ку о форцэ  $\bar{P}$ . Ултимул ла рындул сэу акционязэ асупра корпулуй ынтый ын пунктул  $A$  ку форца  $\bar{N}$ . Ачесте форце, егале ка валoare ши опусе ка сенс, сынт апликате диферитор корпусь. Ын ачелаш пункт жеометрик  $A$  коинчид паркэ доуэ пункте материала: унул апарцине унуя дин корпусиле, каре интеракционязэ, яр алтул—челуйлалт. Дин ачастэ каузэ акциуня ши реакциуня ну формязэ евидент ун систем де форце екивалент ку zero. Ачестор форце ну ли се поате аплика аксиома ынтыя, деoарече еле сынт апликате ла диферите корпусь.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Аксиома а патра: Ун систем де доуэ форце  $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ , апликате ынтр'ун пункт ал корпулуй солид, аре ынтодхуна о форцэ резултантэ  $\bar{R}^*$ . Ачастэ форцэ резултантэ есте егалэ ку сума векториалэ  $\bar{R}$  а челор доуэ форце консидерате, адикэ  $\bar{R}^* = \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ; линия де акциуне а форцей резултанте трече прин пунктул де апликацие ал ачестор форце (фиг. 6).

Форца резултантэ поате фи детерминатэ ка диагонала паралелограмулуй ку ажуторул формулей:

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}.$$

Аич  $\cos(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = -\cos \alpha$ , яр модулий (валориле нумериче) тутурор форцелор се нотязэ, ка ши векторий, ынсэ фэрэ лиуце. Ачастэ аксиомэ адмите ши афирмация речипрокэ: о форцэ поате фи дескомпус принтр'о инфинитате де мо-

*дурь ын доуз форце, апликате ын орьче пункт ал линией де акциуне а форцей дате.*

Форцелe компоненте се диспун ынтр'ун ллан, каре трече прин линия де акциуне а форцей дескомпусе.

Се нумеште корп солид либер ун корп, каре поате жэлэта орьче мишкаре дин позиция респективэ, суб акциуня уней форце оарекаре.

Се нумеск легэтурь але унуй корп, лимитэриле, каре ымпедикэ мишкаря корпулуй ши се пэстрязэ ла акциуня орькэрор форце апликате корпулуй.

Легэтуриле лимитязэ мишкаря корпулуй, абэтынду-л де ла мишкаря, каре поате авя лок суб акциуня форцелор апликате корпулуй, ынсэ, ын липса легэтурилор.

Аксиома а чиячя: *Ефектул акциуний легэтурилор, есте ачелаш, ка ши ла акциуня унор форце детерминате, суплиментаре, каре пот фи апликате корпулуй либер.*

Форцелe, че репрезинтэ нумай акциуня легэтурилор, се нумеск *реакциуниле легэтурилор*. Форцелe, каре пот пуне ын миш-

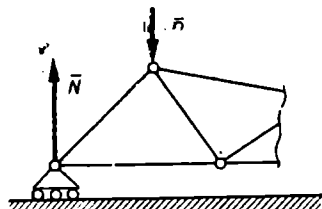
каре ун корп либер, се нумеск форце активе сау форце директ аплика-те. Дакэ афарэ де форцелe активе унуй корп и се апликэ ши реакциунь, ачеста поате фи консидерат дрепт корп либер.

Практик, легэтуриле се реализязэ де обичей прин интермедиул алтор корпурь, че лимитязэ мишкаря корпулуй консидерат. Дакэ асупра унуй корп супус унор легэтурь, акционязэ форцелe активе, атунч ре-

акциуниле депинд де ачесте форце. Ун корп ын мишкаре се поате гэси суб акциуня реакциунилор ши ын липса форцелор активе. Де екземплу, ун пункт материал, каре се мишкэ пе о супрафацэ материалэ курбэ, суферэ о реакциуне а супрафеей ши ын липса форцелор активе (де екземплу, ын кондицииле де импондерабилитате).

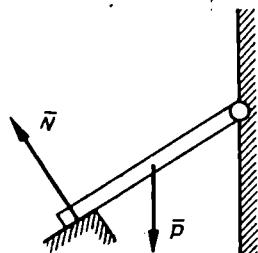
Типуриле де базэ але реакциунилор. Сэ консидерэм легэтуриле де базэ ши реакциуниле лор.

Ын фигура 7 есте репрезентатэ реакциуня уней супрафее нетеде асупра унуй сприжин мобил (ку рулоурь). Ын казул контактулуй а доуз корпурь перфект нетеде, форцелe де интеракциуне динтре еле сынт ориентате пе нормала комунэ ла супрафеелe лор ын пунктул де контакт. Ын фигура 8 есте арэататэ реакциуня  $\vec{N}$  а уней супрафее нетеде асупра уней बारे, каре се сприжинэ пе ачестэ супрафацэ. Ын фигура 9 сынт репрезентате реакциуниле уней поделе нетеде ши а уней проемиенце нетеде асупра уней बारे, че се сприжинэ пе еле ши каре поате сэ алунече пе ачесте супрафее де сприжин.

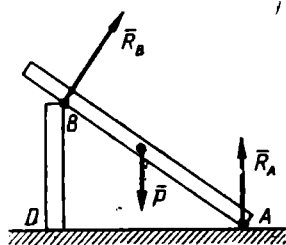


Фиг. 7.

Дакэ ла интеракциуня а доуэ корпурь артикулате ынтрэ елэ я наштере нумай о форцэ де реакциуне дин партя унуй корп асупра алтуя, атунч ачастэ форцэ де реакциуне се поате дескомпуне ын доуэ компоненте, сенсул кэроа се индикэ прин интермедиул унор барэ мичь де сприжин (фиг. 10 ши 11). Ын фигура 10 порциуня ынкэркатэ а аркулуй ну есте репрезентатэ.

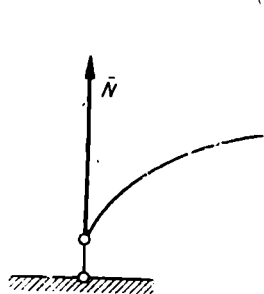


Фиг. 8.

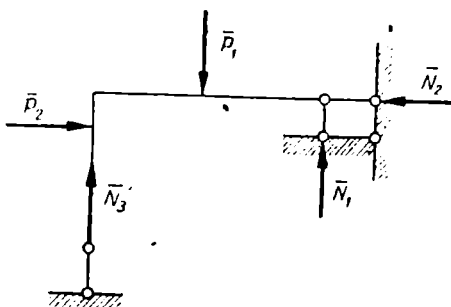


Фиг. 9.

Артикуларя корпурилор се реализязэ адеса прин интермедиул артикулациилор. Се нумеск *артикулаций* диспозитивеле, каре лягэ корпуриле ши ле пермит сэ ефектуезе ротаций релативе речипроче. Артикуляция чилиндрике адмите ротация корпурилор ын журул уней аксе ши алунекаря ын лунгул ей. Ын фигура 12 есте репрезентатэ ын план артикуларя а доуэ корпурь прин интермедиул артикулацией чилиндриче.



Фиг. 10.

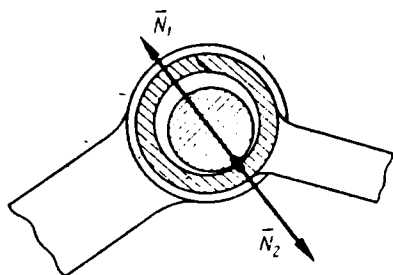


Фиг. 11.

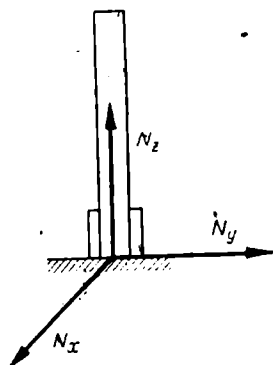
Ун корп аре о проеминенцэ де формэ чилиндрике (чиркумферинца интериорэ ын план), ынтродусэ ынтр'ун орифичиу фэкут ын алт корп (чиркумферинца екстериорэ). Проеминенца есте акса де ротация пентру корпул ал дойля.

Ын липса фрекэрий реакциуниле речипроче але корпурилор ын артикуляция чилиндрике сынт ситуате ын ачелаш план, перпендикуляр пе акса артикулацией пентру орьче форце активе. Дакэ, ынсэ, артикуляция чилиндрике ну ымпедикэ депласаря корпулуй нумай ынтр'о дирекции пе акса чилиндрлуй ши ымпедикэ мишкаря ын дирекции опусэ, атунч артикуляция

чилиндрикэ се нумеште *краподинэ*. Ын ачест каз реакциуня де сприжин аре трей компоненте ын спациу  $N_x$ ,  $N_y$  ши  $N_z$  (фиг. 13).



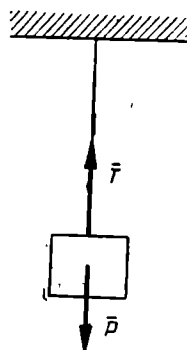
Фиг. 12.



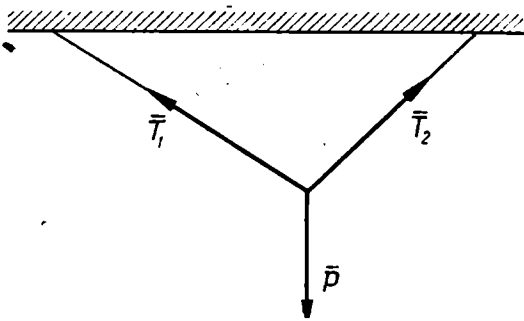
Фиг. 13.

Се нумеште *артикулацие сферикэ* диспозитивул, каре пермите корпурилор артикулате ку ун пункт комун де артикулацие сэ ефектуеζε ын спациу мишкэрь релативе речипроче. Артикулация сферикэ се компуне динтр'о купэ сферикэ, каре апарцине унуй корп, ши о проеминенцэ сферикэ де ачелаш диаметру — алтуй корп.

Реакциуня де сприжин ын артикулация сферикэ вариязэ ла скимбаря форцелор активе, фэрэ а рэмыне ын ачелаш план, поате авя оръче дирекције ын спациу ши се дескомпуне ын трей компоненте дупэ акселе де координате.



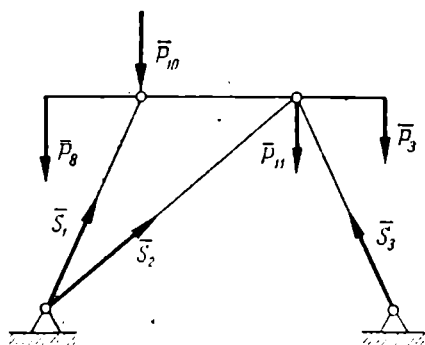
Фиг. 14.



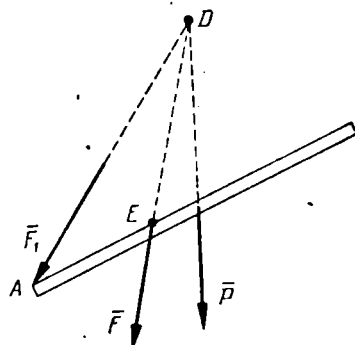
Фиг. 15.

Дакэ легэтура се фаче прин фире, форца де реакциуне есте ориентатэ де-а лунгул фирулуй, кынд ачеста е ректилинуу (фиг. 14 ши 15) сау дупэ танжента ла ел.

Дакэ легэтура се реализязэ ку ажуторул уней बारे импона-  
дарабиле ректилиний, बारे аре ла капете артикуляций липсите  
де фрекаре ши асупра кэрея акционязэ форце нумай ла капе-  
те, атунч форца де реакциуне есте ориентатэ ын лунгул ба-  
рей (фиг. 16); ын фигура 16 реакциуниле  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$  ши  $\bar{S}_3$  сынт  
ориентате дупэ челе трей बारे, легате прин артикуляций ку  
корпул ал патруля — гринда. Ун корп солид де форма уней  
баре субцирь пбате фи ын екилибру суб акциуны унор форце  
апликате ла капете нумай атунч, кынд системул де форце де ла  
фиекаре капэт ал बारे се редуче ла о резултантэ ши амбеле  
резултанте сынт ориентате дупэ о дряптэ, че трече прин капе-  
теле बारेй (ын казул уней बारे ректилиний, прин урмаре, ын  
лунгул ей), сынт егале ынтре еле, ынсэ де сенсуре контраре. Ын  
каз жeneral реакциуниле сынт некуноскуте нич ка мэриме, нич  
ка сенс ши се детерминэ дин кондицииле де екилибру але туту-  
рор форцелор апликатэ корпулуй, — активе ши реакциуниле  
легэтурилор.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Аксиома а шася (аксиома солидификарий): Ун систем  
механик ну се дезекилибрызэ, дакэ есте супс унор легэтуры  
ной, ын спечал, екилибрул системулуй механик ну се стрижэ,  
дакэ тоате пэрциле луй сынт легате ынтре еле инвариабил, ри-  
жид. Аич прин систем механик се субынцележе тоталитатя де  
корпуре ши пункте материалае.

Ын статикэ се фолосеште прочедеул екстиндерий дименсиу-  
нилор корпулуй. Есенца луй констэ ын ачея, кэ десеорь есте не-  
чесарэ о мэрире ынкипуитэ а дименсиунилор корпулуй. Се поа-  
те ынкипуи, кэ ун корп есте легат рижид ку ун алт корп, асупра  
кэруя ну акционязэ нич ун фел де форце.

Ка екземплу сэ консидерэм бара  $AB$ , асупра кэрея акцио-  
нязэ форца де греутате  $\bar{P}$  ши форца  $\bar{F}_1$  ын капэтул  $A$  (фиг. 17).

Амбеле форце се интерсектязэ ын пунктул  $D$  ши, дакэ ле-  
вом депласа ын ачест пункт, атунч конформ аксиомелор ста-  
тичий, еле се пот ынлокуи ку о форцэ резултантэ  $\bar{F}$ , линия  
де акциуне а кэрея интерсектязэ бара ын пунктул  $E$ . Ын  
ачест пункт вом депласа форца  $\bar{F}$ . Ынсэ пентру а реализа  
ачесте операций ши а ынлокуи ачесте доуэ форце апликате  
барей ку о сингурэ форцэ, требуе сэ консидерэм кэ пунктул  $D$   
апарцине барей, адикэ сэ мэрим бара, адэугынд ла еа о су-  
прафацэ импондерабилэ.

Есте евидент, кэ ынлокуинд ун систем дин май мулте фор-  
це ку ун систем май симплу, алкэтуит динтр'ун нумэр кыт се  
поате де мий де форце, дар еквивалент ку системул инициал,  
ушурэм студиеря мишкэрий корпулуй, ефектуатэ де системул  
дат де форце.

Астфел, елабораря методелор де редучере а системелор де  
форце, апликате корпулуй солид, ла системе кыт май симпле-  
дупэ нумэрул форцелор ши структура лор есте уна дин про-  
блемеле фундаментале але статичий.

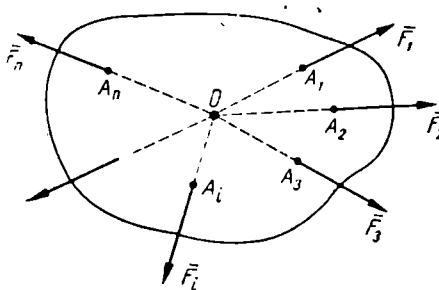
---



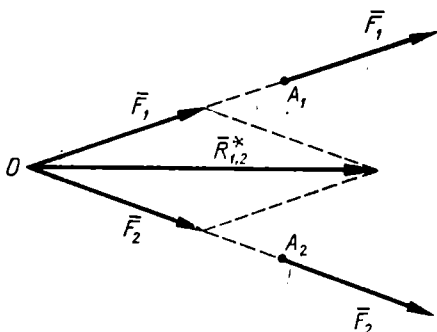
## СИСТЕМУЛ ДЕ ФОРЦЕ КОНКУРЕНТЕ

## § 1. РЕДУЧЕРЯ ЛА ЧЕЛ МАЙ СИМПЛУ СИСТЕМ

Адмitem, кэ унуй корп рижид и се апликэ ун систем де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ , ситуате ын спациу. Линииле де акциуне а тутурор форцелор се интерсектязэ ынтр'ун пункт  $O$ , адикэ корпулуй и се апликэ ун систем де форце конкуренте. (фиг. 18). Ын ачест каз тоате форцеле се пот аплика ынтр'ун пункт ши ынлокуи принтр'о форцэ резултантэ, апликатэ ын ачелаш пункт.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

Ынтр'адевэр, форца  $\bar{F}_1$  се поате депласа дин пунктул  $A_1$  дунэ линия де акциуне ын пунктул  $O$ , ын ачелаш фел се поате прочеда ши ку форца  $\bar{F}_2$ . Конформ аксиомей а трея, форцеле  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  се пот ынлокуи ку о сингурэ форцэ  $\bar{R}_{1,2}^*$ , егалэ ку диагонала паралелограмулуй, конструит пе ачесте форце ка пе латурь, ши ориентатэ дунэ ачестэ диагоналэ (фиг. 19), адикэ

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \in \bar{R}_{1,2}^*,$$

унде

$$\bar{R}_{1,2}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Пентру форца  $\bar{F}_3$  ши форца кэпэтатэ  $\bar{R}_{1,2}^*$  ш. а. м. д. авем

$$(\bar{R}_{1,2}^*, \bar{F}_3) \in (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \in \bar{R}_{1,2,3}^*;$$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4) \in (\bar{R}_{1,2,3}^*, \bar{F}_4) \dots$$

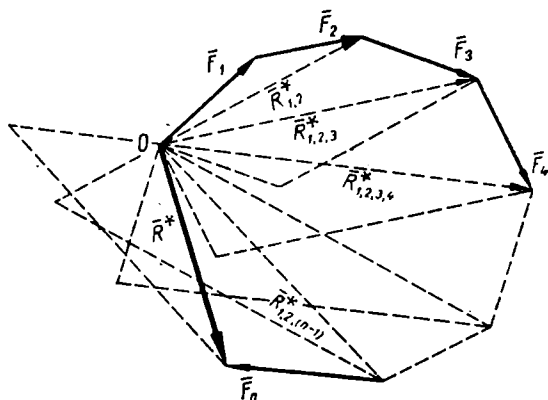
Дефинитив

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \oslash \bar{R}_{1,2,3,4,\dots,n}^* \equiv \bar{R}^*, \quad (1)$$

унде

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Векторул  $\bar{R}$ , кэпэатат прин адунаря жеометрикэ формалэ а векторилор, че репрезинтэ форцелэ, се нумеште *векторул принципал* ал системулуй де форце. Векторул принципал репрезинтэ ун вектор, каре ынкиде линия фрынтэ, конструитэ дин векторий форцелор системулуй (фиг. 20).



Фиг. 20.

Фиекаре систем де форце аре ун вектор принципал, ынсэ ну орьче систем де форце поате авя о форцэ резултантэ. Ну-май системул де форце конкуренте аре о резултантэ  $\bar{R}^*$ . Ачас-тэ резултантэ есте егалэ жеометрик ку векторул принципал ал системулуй де форце конкуренте;  $\bar{R}^* = \bar{R}$ ; резултанта поате фи аплика-тэ ын пунктул де ынтылнуре а форцелор дате сау ын орьче алт пункт, ситуат пе линия де акциуне а ей. Тоате ачестя се пот експрима астфел:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n) \oslash \bar{R}^*; \bar{R}^* = \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (2)$$

Пентру детерминаря аналитикэ а валорий векторулуй принципал ши а косинусурилор директоаре гэсим проекцииле ам-белор пэрць але егалитэций (2) пе акселе системулуй де коор-донате ректангуларе ку орижиня ын орьче пункт ал спациулуй

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (3)$$

Пентру а детермина дирекция векторулуй  $\vec{R}$  вом аплика. релацииле пентру косинусуриле директоаре:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (4)$$

унде  $\alpha$  есте унгул де ынклинацие а луй  $\vec{R}$  фацэ де акса  $x$ ;  $\beta$ —унгул де ынклинацие а векторулуй  $\vec{R}$  фацэ де акса  $y$  ши  $\gamma$ —унгул де ынклинацие а векторулуй  $\vec{R}$  фацэ де акса  $z$ ; аич

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

## § 2. КОНДИЦИИЛЕ ДЕ ЕКИЛИБРУ

Есте евидент, кэ пентру екилибрул унуй систем дат де форце конкуренте есте нечесар ши суфичиент, ка полигонул де форце сэ фие ынкис, адикэ капэтул векторулуй форцей  $\vec{F}_n$  сэ коинчидэ ку пунктул  $O$ . Ачаста ынсямнэ, кэ векторул принципал  $\vec{R}$ , есте егал ку zero, деч, ши форца резултантэ  $\vec{R}^* = 0$ . Проекцииле луй  $\vec{R} = 0$  пе акселе де координате сынт:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (5)$$

Ачесте кондиций ын формэ векториалэ се пот енунца астфел: пентру ка ун систем де форце конкуренте, апликате унуй корп солид, сэ се афле ын екилибру, есте нечесар ши суфичиент, ка векторул принципал ал системулуй де форце сэ фие егал ку zero. Ын формэ аналитикэ: пентру екилибрул унуй систем де форце конкуренте, апликате унуй корп солид, есте нечесар ши суфичиент, ка сума проекциилор тутурор форцелор ачестуй систем пе фиекаре дин акселе де координате сэ фие егалэ ку zero.

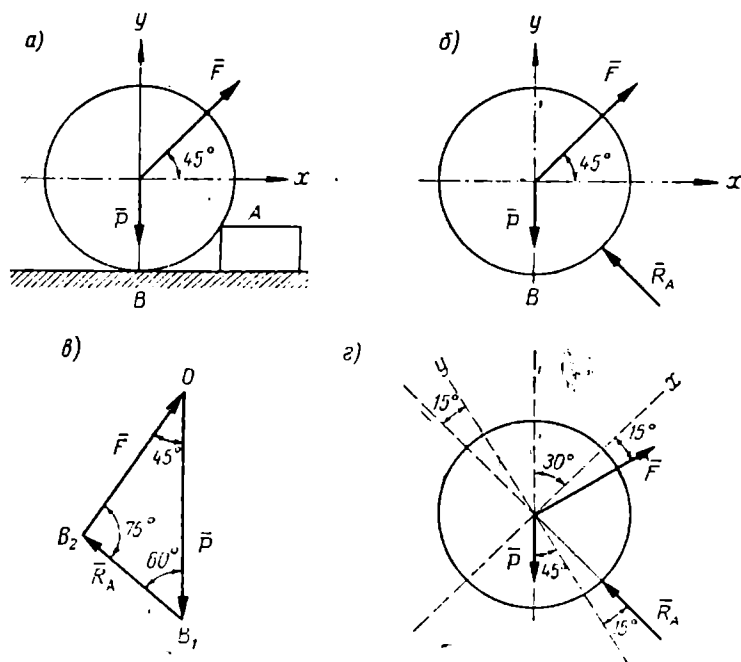
**Теорема.** деспре  $n$  форце: *Дакэ ун систем дин  $n$  форце се гэсеште ын екилибру ши тоате форцеле, афарэ де уна, се ынтылнеськ ынтр'ун пункт, атунч ши ултима форцэ трече прин пунктул де ынтылнире ал тутурор форцелор.*

Адмitem, кэ системул де форце се гэсеште ын екилибру ши кэ  $n-1$  форце се ынтылнеськ ын пунктул  $O$ . Нотэм ултима форцэ прин  $\vec{F}_n$ . Ремаркэм, кэ рестул  $n-1$  форце се редук

<sup>1</sup> Дунэ кум се штне дин алжэбра векториалэ, проекция унуй вектор пе о аксэ есте о мэриме алжэбрикэ, сгалэ ку продусул динтре модулул векторулуй ши косинусул унгулуй формат де дирекция векторулуй ши сенсул позитив ал аксей:

$$F_x = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, x).$$

ла о резултантэ, пе каре о нотэм прин  $\bar{R}_1^*$ ; адикэ  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_{n-1}) \cap \bar{R}_1^*$ . Ынтрुकыт системул дин  $n$  форце се гэсеште ын екилибру, адикэ  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_{n-1}, \bar{F}_n) \cap 0$ , прин урмаре, доуэ форце  $\bar{R}_1^*$  ши  $\bar{F}_n$  се екилибрызэ. Ачаста поате авя лок ку кондиция, кэ амбеле ачесте форце акцияызэ дупэ о дряптэ ши  $\bar{F}_n = -\bar{R}_1^*$ ; адикэ форца  $\bar{F}_n$  трече прин пунктул де интерсекция а челорлалте  $n-1$  форце ши есте форца лор де екилибаре.



Фиг. 21.

Теорема деспре трей форце: Дакэ ун систем де трей форце непаралеле се гэсеште ын екилибру, атунч линише лор де акциуне се интерсектязэ ынтр'ун пункт ши форцеле сынт ситуате ын ачелаш план. Ачастэ теоремэ есте ун каз партикулар ал теоремей деспре  $n$  форце.

**Екземплу.** Ун кувелаж ку раза де 12 дм ши греутатя де 2 килоньютонь (2 кн) се ростооголеште уркынду-се пе о проеми-ненцэ ку ынэлцимя де 6 дм (фиг. 21). Сэ се детермине форца  $\bar{F}$ , ориентатэ суб ун унгь де 45° фацэ де оризонт, суфичиентэ пентру депласаря ынкэркэтурий песте проеминенцэ. Ростооголи-

ря кувелажулуй ынчепе ла о асфел де форцэ  $\bar{F}$ , кынд реакциуня сприжинулуй ын пунктул  $B$  есте егалэ ку зеро.

Пентру а детермина форца  $\bar{F}$ , требуе сэ студием екилибрул челор трей форце, каре акцияызэ асупра кувелажулуй, аша кум есте арэатат ын фигура 21, б: форца  $\bar{F}$ , форца де греутате  $\bar{P}$  а кувелажулуй ши реакциуня  $\bar{R}_A$  а проеминенцей. Реакциуня  $\bar{R}_A$  есте ориентатэ дупэ нормала ла супрафаца кувелажулуй.

Резолвэм проблема прин метода жеометрикэ ши аналитикэ. Ла резолваря прин метода жеометрикэ конструим полигонул де форце, ын казул дат триунгюл де форце, каре требуе сэ фие ынкис (фиг. 21, в). Се штие: валоаря ши сенсул форцей де греутате  $\bar{P}$ , сенсул реакциуний  $\bar{R}_A$  (дупэ раза кувелажулуй ши суб ун унгь де  $60^\circ$  фацэ де сенсул позитив ал вертикалей) ши дирекция форцей  $\bar{F}$ . Форца  $\bar{P}$  формязэ о латурэ а полигонулуй де форце, куноскутэ ка валoare ши дирекция. А доуа латурэ а полигонулуй де форце аре ынчепутул ын капэтул векторулуй  $\bar{P}$  ши формязэ ку ел.ун унгь де  $60^\circ$ . Форца активэ кэутатэ  $\bar{F}$  есте ориентатэ суб ун унгь де  $45^\circ$  фацэ де оризонт ши есте ултима латурэ а полигонулуй де форце.

Дучем прин орижина векторулуй  $\bar{P}$  о дряптэ суб ачест унгь ши гэсим пунктул ей де интерсекция ку латура полигонулуй де форце, паралелэ ку  $\bar{R}_A$ . Асфел есте конструит ун триунгь де форце ынкис, латуриле кэруа сынт егале ку векторий тутурор форцелор, че акцияызэ асупра корпулуй (кувелажулуй). Нотэм модулий векторилор форцелор ка ши форцеле, ынсэ фэрэ линиуце—семнеле конвенционале але векторилор.

Конформ формулелор тригонометриче компунем доуэ екуаций:

$$\frac{F}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{R_A}{\sin 45^\circ},$$

дин каре афлэм:

$$F = 1,79 \text{ кн}; R_A = 1,46 \text{ кн}.$$

Дакэ ын проблемэ ну се индикэ дирекция форцей кэутате  $\bar{F}$ , проблема есте недетерминатэ, адикэ ын триунгюл де форце вор фи трей форце некуноскуте, ынсэ екуаций пентру резолваре авем нумай доуэ.

Сэ резолвэм проблема прин метода аналитикэ. Алкэтуим сумеле проекциилор тутурор форцелор пе акселе де координате (фиг. 21, б) ши ле егалэм ку зеро:

$$\sum F_{ix} = F \cos 45^\circ - R_A \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = F \sin 45^\circ + R_A \sin 30^\circ - 2 = 0.$$

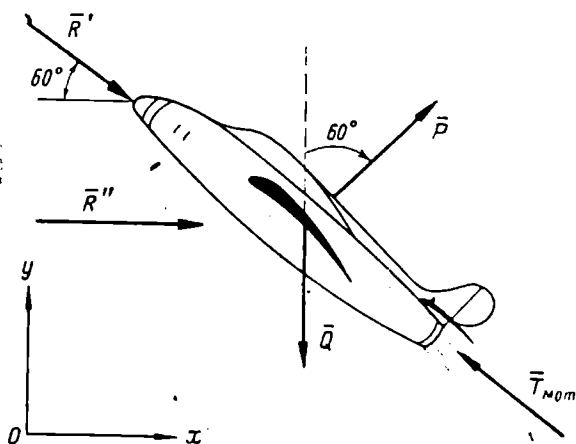
Дин ачесте екуаций афлэм ачеляшь валорь але луй  $F$  ши  $R_A$ . Ун систем де екуаций май симплу се ва кэпэта, дакэ вом консидера дрепт аксе де координате ниште дрепте каре ну сынт речипрок перпендикуларе (фие акса  $x$  перпендикуларэ пе  $R_A$ , яр акса  $y$  перпендикуларэ пе  $\bar{F}$ ), адикэ ле вом ориента астфел, кум есте арэтит ын фигура 23, г. Атунч екуацииле ын проекций вор авя форма:

$$F \cos 15^\circ - 2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$R_A \cos 15^\circ - 2 \cos 45^\circ = 0.$$

Де аич  $F = 1,79 \text{ кн}$ ;  $R_A = 1,46 \text{ кн}$ .

**Екземплу.** Ун авион се ридикэ ку о витезэ константэ, ориентатэ суб ун унгь де  $60^\circ$  фацэ де оризонт. Греутатя авионулуй  $Q = 45 \text{ кн}$ , форца де резистенцэ а аерулуй опусэ мишкэрий есте  $R' = 8,1 \text{ кн}$ . Вынтул суфлэ ын дирекции оризонталэ ку о астфел де витезэ, ынкыт авионул ынтымпинэ о форцэ де резистенцэ суплиментарэ  $R'' = 3,2 \text{ кн}$ . Сэ се детермине форца асценсионалэ  $P$  ши форца де тракциуне  $T_{\text{мот}}$ , дезволтатэ де мотор, консидерынд, кэ тоате форцеле се интерсектызэ ын чентрул де греутате ал авионулуй ши се екилибрызэ речипрок (фиг. 22), деоарече мишкаря есте ректилиние ши униформэ.



Фиг. 22.

Пентру ун систем план де форце конкуренте авем доуэ екуаций де екилибру:

$$\sum F_{ix} = 0; R' \cos 60^\circ + P \cos 30^\circ + R'' - T \cos 60^\circ = 0; \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0; -R' \cos 30^\circ + P \cos 60^\circ - Q + T \cos 30^\circ = 0. \quad (b)$$

Ынмулцим прима екуацие ку  $\cos 60^\circ$ , яр а доуа ку  $\cos 30^\circ$  ши дин прима скэдем екуация а доуа. Обцинем:

$$R' \cos^2 60^\circ + R'' \cos 60^\circ - T \cos^2 60^\circ + R' \cos^2 30^\circ + \\ + Q \cos 30^\circ - T \cos^2 30^\circ = 0,$$

де унде

$$T = 48,73 \text{ кн.}$$

Дин екуация (а) афлэм валора я форцей асценционале:

$$P = \frac{48,73 \cdot 0,5 - 3,2 - 8,1 \cdot 0,5}{0,865} = 19,8 \text{ кн.}$$

*Екземплу.* Сэ се калкулезе ефуртуриле ын стыллий унуй супорт ку трей пичоаре, каре сусцине о ынкэркэтурэ ку греутатя  $P = 1 \text{ кн}$ , суспендатэ де вырфул луй, дакэ супортул есте инсталат пе о супрафацэ ку нерегуларитэцэ. Тоате дименсиуниле сынт индикате ын фигура 23.

Ка ши ын орьче проблемэ де статикэ, май ынтыый есте нечесар сэ стабилим, каре корп требуне консидерат. Дупэ ачаста се апликэ тоате форцеле, че акцияызэ асупра ачестуй корп дин партя алтор корпурь ши се компун екуацииле де екилибру пентру системул дат; дин ачесте екуаций се детерминэ мэримиле некуноскуте — реакциуниле легэтурило де оприжин.

Ын проблема датэ консидерэм супортул ку трей пичоаре  $ABCD$ . Асупра луй акцияызэ о форцэ активэ—форца де греутате а ынкэркэтурий суспендате ши трей реакциунь ын стылпий супортулуй:  $\bar{S}_B$ ,  $\bar{S}_C$ ,  $\bar{S}_D$ .

Тоате форцеле се ынтылнэск ын пунктул  $A$ . Реакциуниле ле консидерэм ориентате астфел, кум есте арэатат ын фигура 23.

Май ынтыый детерминэм унгюриле, нечесаре пентру калкулеле де май департе:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB'}{BB'} = \frac{0,8}{1} = 0,8, \quad \varphi = 38^\circ 40';$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AO}{OD} = \frac{1}{\sqrt{0,6^2 + 0,5^2}} = 1,28, \quad \gamma = 52^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{AC'}{C'C} = \frac{0,9}{\sqrt{0,5^2 + 0,3^2}} = 1,34, \quad \psi = 53^\circ 20';$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{O'E'}{OE'} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5, \quad \psi' = 26^\circ 30';$$

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{ED}{OE} = \frac{0,5}{0,6} = 0,833, \quad \gamma' = 40^\circ.$$

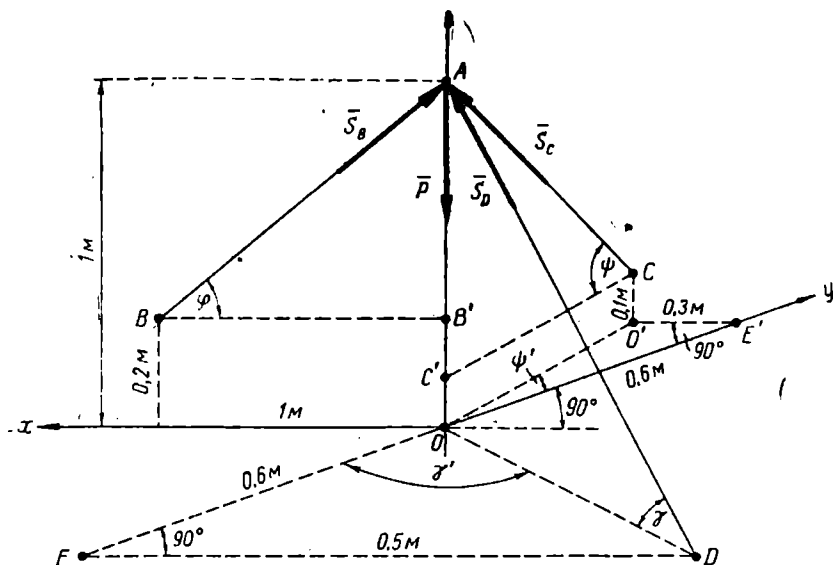
Дупэ ачаста компунем трей екуаций де екилибру але фор-

целор конкуренте ын спацу ши дин еле детерминэм валориле  
жэутате але ефуртирилор:

$$\sum F_{kz}=0; S_B \sin \varphi + S_C \sin \psi + S_D \sin \gamma - P = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{kx}=0; S_D \cos \gamma \cdot \sin \gamma' - S_B \cos \varphi - S_C \cos \psi \cdot \sin \psi' = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{ky}=0; S_D \cos \gamma \cdot \cos \gamma' - S_C \cos \psi \cdot \cos \psi' = 0. \quad (3)$$



Фиг. 23.

Дин екуация (3)

$$S_C = S_D \frac{\cos \gamma \cdot \cos \gamma'}{\cos \psi \cdot \cos \psi'} = S_D \frac{0,616 \cdot 0,766}{0,597 \cdot 0,895} = 0,882 S_D.$$

Дин екуация (2)

$$\begin{aligned} S_B &= S_D \frac{\cos \gamma \cdot \sin \gamma' - 0,882 \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi'}{\cos \varphi} = \\ &= S_D \frac{0,616 \cdot 0,643 - 0,882 \cdot 0,597 \cdot 0,446}{0,781} = 0,206 S_D. \end{aligned}$$

Дин екуация (1)

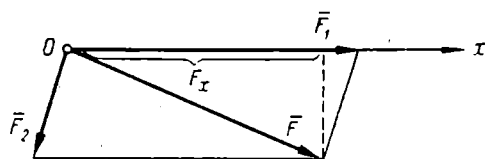
$$S_D = \frac{1000}{0,206 \cdot 0,625 + 0,882 \cdot 0,801 + 0,79} = 615 \text{ н};$$

$$S_B = 0,206 S_D = 127 \text{ н}; S_C = 0,882 S_D = 542 \text{ н}.$$



Тоате рэспунсуриле сынт позитиве, деч, сенсуриле реакциунилор ау фост алесе дрепт.

Ла резолваря проблемелор де статикэ есте нечесар сэ цинем конт де деосебрия динтре проекция уней форце пе о оарекаре дирекции ши компонента ачестей форце пе ачастэ дирекции.



Фиг. 24.

Ын фигура 24 есте репрезентатэ проекция  $F_x$  а форцей пе аксэ ши компонента  $\vec{F}_1$  а форцей  $\vec{F}$ , каре я наштере ла дескомпунеря форцей  $\vec{F}$  дупэ доуэ дирекций, неперпендикуларе ынтре еле.

## СИСТЕМ ПЛАН ДЕ ФОРЦЕ

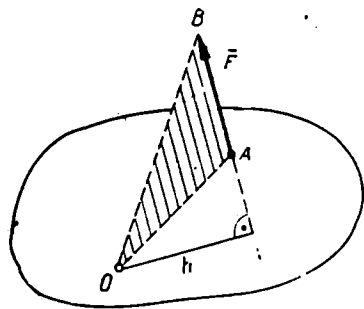
Се нумеште систем *план* де форце аппикате унуй корп солид, ун астфел де систем де форце, линииле де акциуне але кэроора се афлэ ын ачелаш план.

Пентру ун систем *план* де форце требуе сэ студиём май ынтый де тоате доуэ проблеме де базэ але статичий: ынлокуирия унуй систем *план* де форце ку ун систем май симплу де форце, еквивалент ку ел (резултанта сау куплул де форце); стабилирия кондициилор нечесаре ши суфициенте де екилибру а унуй систем *план* де форце, каре акционязэ асупра корпулуй солид. Пентру резолваря ачестор проблеме требуе сэ ынтродучем ноциуниле де момент алжэбрик ал форцелор ын рапорт ку ун пункт ши де куплу де форце ши сэ студиём проприетэциле де базэ але куплуриилор де форце.

## § 1. МОМЕНТУЛ АЛЖЕБРИК АЛ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ УН ПУНКТ

Се нумеште *момент алжэбрик ал уней форце* ын рапорт ку ун пункт продусул динтре модулул (валоаря) ачестей форце ши брацул ей ын рапорт ку ачест пункт (фиг. 25), консидерат ку семнул плус сау минус.

Се нумеште *брац  $h$  ал форцей  $\vec{F}$*  ын рапорт ку ун пункт, чя май микэ дистанцэ динтре ачест пункт ши линия де акциуне а форцей, адикэ лунжимя перпендикуларей, коборыте дин пунктул  $O$  пе линия де акциуне а форцей  $\vec{F}$ .



Фиг. 25.

Вом нота прин  $M_O(\vec{F})$  сау  $M_O$  моментул алжэбрик ал форцей  $\vec{F}$  ын рапорт ку пунктул  $O$ . Вом авя

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1)$$

Дакэ форца тинде сэ ротяскэ корпул ын журул пунктулуй моментар (пунктул, ын рапорт ку каре се калкулязэ моментул

алжэбрик ал форцей) ын сенсул контрар мишкэрий ачелор де часорник, атунч луэм семнул плус, яр дакэ ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник — семнул минус.

Моментул алжэбрик ал форцей есте егал ку продусул динтре форцэ ши лунжиме. Деачея ын системул СИ ел се мэсоарэ ын  $\text{н} \cdot \text{м}$ .

Дин дефиниция моментулуй алжебрик ал форцей ын рапорт ку ун пункт урмязэ индепенденца луй де депласаря форцей дупэ линия де акциуне. Моментул алжебрик ал форцей ын рапорт ку ун пункт есте нул, дакэ линия де акциуне а форцей трече прин пунктул моментар. Сума моментелор алжебриче ын рапорт ку ун пункт а доуэ форце, егале ка валoare, ынсэ де сенсуре контраре, каре акционязэ ын лунгул уней дрепте, есте егалэ ку zero. Моментул алжебрик ын рапорт ку ун пункт есте егал нумерик ку доуэ арий але триунгулуй, конструит пе форца  $\overline{AB}$  ши пунктул моментар, адикэ:

$$M_o(\vec{F}) = \pm 2 \text{ арий } \triangle OAB. \quad (2)$$

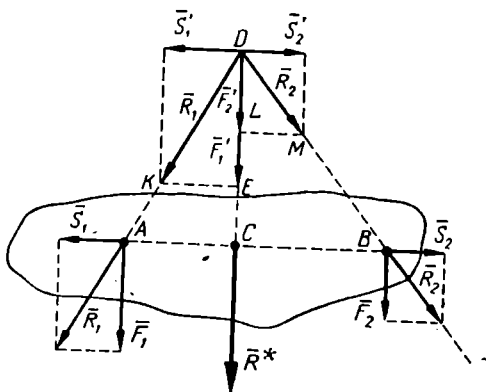
## § 2. РЕДУЧЕРЯ А ДОУЭ ФОРЦЕ ПАРАЛЕЛЕ ЛА О РЕЗУЛТАНТЭ

Редучеря а доуэ форце, каре ау линииле де акциуне паралеле, ла о сингурэ форцэ — резултантэ, сау алтфел, компунеря ачестор форце, пермите обцинеря уней методе де редучере а орькэруй систем де форце паралеле ла ун систем май симплу. Ын афарэ де ачаста компунеря а доуэ форце паралеле, егале ка валoare, ынсэ де сенсуре контраре, не кондуче ла ынтродучеря нюциуний де куплу де форце.

### Форце паралеле, ориентате ын ачелаш сенс

Сэ интерсектэм линииле де акциуне але форцелор паралеле  $\vec{F}_1$  ши  $\vec{F}_2$  ку о дряптэ ши сэ ле депласэм ын пунктеле де интерсекције а ачестей дрепте ку линииле де акциуне але форцелор (пунктеле  $A$  ши  $B$  дин фиг. 26).

Апликэм ын пунктеле  $A$  ши  $B$  доуэ форце  $\vec{S}_1$  ши  $\vec{S}_2$  егале ка валoare, авынд сенсуре контраре ши каре формязэ ун систем де форце, еквивалент ку zero. Компунынд сепарат форцеле дупэ регула паралелограмулуй ын пунктеле  $A$  ши  $B$ , вом кэпэта доуэ форце  $\vec{R}_1$  ши  $\vec{R}_2$  линииле де акциуне але кэроа се интерсектязэ ын пунктул  $D$ . Дупэ депласаря ачестор форце ын пунктул  $D$ , дескомпунем фиекаре дин еле ын доуэ компоненте дупэ дирекций, паралеле ку фор-



Фиг. 26.

цэле  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  ши ку сегментул  $AB$ . Обцинем форцэле, компоненте каре ау ачеяш валoare ши ачелаш сенс ка ши форцэле дин пунктеле  $A$  ши  $B$  де пынэ ла компунере, адикэ

$$\bar{S}'_1 = \bar{S}_1; \bar{S}'_2 = \bar{S}_2;$$

$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1; \bar{F}'_2 = \bar{F}_2.$$

Неглижынд системул де форце ( $\bar{S}'_1, \bar{S}'_2$ ), еквивалент ку зеро, обцинем доуэ форце  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$ , каре акциянэзэ дупэ ачеяш дряптэ  $DC$ , паралеля ку форцэле консидерате  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$ . Резултанта ачестор форце  $\bar{R}^*$  есте егалэ ка валoare ку сума форцелор  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$  ши ориентатэ дупэ дряпта  $DC$ :

$$R^* = F'_1 + F'_2 = F_1 + F_2.$$

Форца  $\bar{R}^*$  ва фи токмай резултанта форцелор дате  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$ . Дин асемэнаря триунгюрилор  $KDE$  ши  $ADC$ ,  $MDL$  ши  $BDC$  урмязэ кэ:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{S'_1}{F'_1} = \frac{S_1}{F_1}; \frac{BC}{DC} = \frac{S'_2}{F'_2} = \frac{S_2}{F_2}.$$

Ымпэрдцинд пэрциле стынгэ ши дряптэ але примей релаций ла а доуа, кэпэтэм:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \text{ сау } \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}.$$

Формынд пропорция дериватэ, авем дефинитив

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}, \quad (3)$$

унде

$$R^* = F_1 + F_2. \quad (4)$$

Прин урмаре, доуэ форце паралеле, ориентате ын ачелаш сенс, ау о форцэ резултантэ паралелэ ку еле, егалэ ка валoare ку сума лор ши ориентатэ ын ачелаш сенс. Линия де акциуне а форцей резултанте се афлэ ынтре линииле де акциуне але форцелор дате ши ымпарте сегментул купринс ынтре еле, ын мод интериор, ын нэрць инверс пропорционале ку ачесте форце.

Дакэ доуэ форце паралеле, де ачелаш сенс пот фи ынлокуите ку о форцэ резултантэ, атунч ши инверс, орьче форцэ поате фи дескомпусэ ын доуэ форце паралеле ку еа ши де ачелаш сенс.

Апликынд сукчесив регула де редучере а доуэ форце пара-

леле, де ачелаш сенс, ла орьче систем де форце паралеле ши де ачелаш сенс, се поате редуче ачест систем ла о форцэ резултантэ.

### Форце паралеле инегале ши де сенсурь контраре

Адмитем кэ форца  $\bar{F}_1$  есте май маре ка валoare декыт форца  $\bar{F}_2$ . Дескомпунем форца  $\bar{F}_1$  ын доуэ форце паралеле  $\bar{R}^*$  ши  $\bar{F}_2$  де ачелаш сенс (фиг. 27). Апликэм форца  $\bar{F}_2$  егалэ ка валoare ку форца  $\bar{F}_2$  ын пунктул  $B$ , унде есте апликацэ форца  $\bar{F}_2$ . Атунч форца  $\bar{R}^*$  се детерминэ ку ажуторул формулей (4)

$$F_1 = R^* + F_2,$$

де унде

$$R^* = F_1 - F_2.$$

Пунктул де апликацэ  $C$  ал форцей  $\bar{R}^*$  се детерминэ конформ формулей (3)

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R^*} = \frac{BC}{F_1},$$

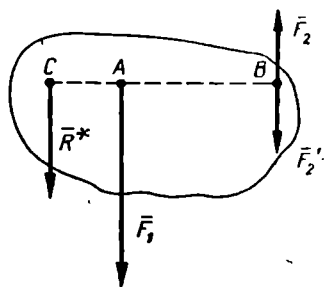
унде дрепт резултантэ пентру форце  $\bar{R}^*$  ши  $\bar{F}_2$  сервисше форца  $\bar{F}_1$ .

Обцинем дефинитив:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R^*}, \quad (3')$$

унде

$$R^* = F_1 - F_2. \quad (4')$$



Фиг. 27.

Астфел, системул де форце  $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}$  есте еквивалент ку форца  $\bar{R}^*$ , каре ши есте резултанта ачестор форце. Форца резултантэ се детерминэ ку ажуторул формулей (4'), яр пунктул де интерсекцэ  $C$  ал линейей ей де акциуне ку прелунжэния сегментулуй  $AB$  конформ формулей (3').

Ын фелул ачеста, доуэ форце паралеле, инегале ши де сенсурь контраре, се редук ла о форцэ резултантэ, паралелэ ку еле, егалэ ка валoare ку дифференца форцелор ши ориентатэ ын сенсул форцей май марь. Линия де акциуне а резултантей се гэсеше ын афара линейей де акциуне а форцей май марь ши ымпарте сегментул, купринс ынтре линиеле де акциуне а форцелор дате, ын мод екстериор, ын пэръь инверс пропорционале ку ачесте форце.

Даке доуэ форце паралеле, инегале ши де сенсурь контраре, пот фи ынлокуите ку о сингурэ форцэ резултантэ, атунч ши инверс, орьче форцэ поате фи дескомпусэ ын доуэ форце паралеле, инегале ши де сенсурь контраре.

### § 3. КУПЛУРЬ ДЕ ФОРЦЕ ЫН ПЛАН

#### Куплул де форце ши моментул алгебрик ал куплулуй де форце

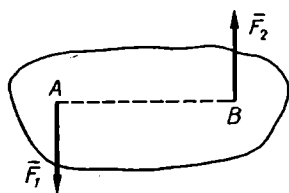
Ын механикэ форца ши куплул де форце сынт консидерате дрепт ноциунуь фундаментаде.

*Се нумеште куплу де форце ун систем де форце паралеле, егале ка валoare ши де сенсуре контраре (фиг. 28).*

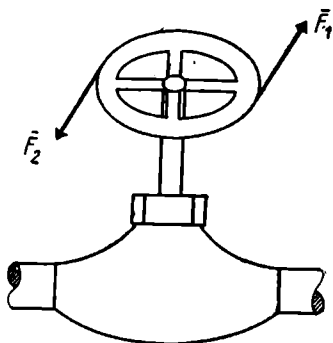
Куплул де форце се поате консидера дрепт ун каз лимитэ а доуэ форце паралеле, инегале ши де сенсуре контраре, кынд форца  $\vec{F}_1$  тинде ка валoare спре форца  $\vec{F}_2$ .

Конформ формулей (4')

$$R^* = F_1 - F_2 = 0,$$



Фиг. 28.



Фиг. 29.

яр конформ формулей (3') AC ши BC сынт мэримь инфините, адикэ пунктул C се афлэ ла инфинит.

Астфел, ын ачест каз лимитэ форца резултантэ есте нулэ, яр пунктул ей де апликация се афлэ ла инфинит. Ынсэ куплул де форце ну формязэ ун систем де форце, екивалент ку зеро.

Се штие, кэ суб акциуня унуй куплу де форце корпул солид либер есе дин старя де екилибру. Де обичей куплул де форце ( $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ) се апликэ корпулуй, каре требуе сэ се ротяскэ, де екземплу, ла волантул супапей ын тимпул ынжидерий ши дескидерий ей (фиг. 29). Дин ачастэ каузэ ун куплу де форце ну се поате ынлокуи ку о форцэ ши деч ел ну аре резултантэ, чи есте ун астфел де систем де форце, каре ну се поате симплифика. Фиекаре форцэ а куплулуй аре тоате проприетэциле форцелор обишнуите.

Куплул де форце, апликат унуй корп солид, се карактеризязэ май ынтый прин планул де акциуне, тот аша дупэ кум форца се карактеризязэ прин линия са де акциуне. План де акциуне ал унуй куплу де форце се нумеште планул, ын каре сынт ситуате форцеле куплулуй.

Пентру а карактериза кантитатив акциуня куплулуй де форце асупра корпулуй солид ши а индика сенсул, ын каре куплул

тинде сз ротяскэ корпул, вом ынтродуче ноциуня де момент алжебрик ал куплулуй де форце.

Се нумеште момент алжебрик ал куплулуй де форце проду-сул, луат ку семнул плус сау минус, динтре о форце а куплу-луй ши брацул ачестуй куплу.

Се нумеште брац ал куплулуй де форце дистанца минимэ динтре линииле де акци-уне а форцелор куплулуй (фиг. 30).

Моментул алжебрик ал унуй куплу се нотязэ прин  $M$ , сау  $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ .

Конформ дефиницией

$$M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm Fd. \quad (5)$$

Моментул алжебрик ал куплулуй аре ачеляшь ди-менсиунь, ка ши моментул алжебрик ал форцей ын рапорт ку ун пункт.

Моментул алжебрик ал унуй куплу де форце се я ку семнул плус, дакэ куплул де форце тинде сз ротяскэ корпул ын сен-сул инверс мишкэрий ачелор де часорник, ши се я ку семнул минус, дакэ куплул де форце тинде сз ротяскэ корпул ын сен-сул мишкэрий ачелор де часорник.

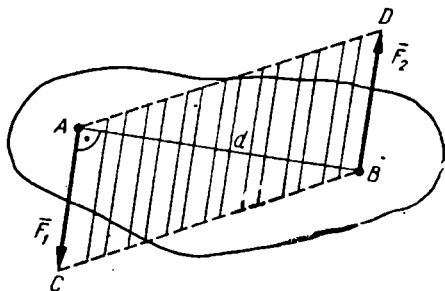
Моментул алжебрик ал унуй куплу ну есте ын функции де депласаря форцелор ын лунгул линиилор лор де акциуне ши поате фи егал ку zero, дакэ линииле де акциуне але форцелор коинчид, адикэ ын казул а доуэ форце, каре акционязэ дупэ ачеш дряптэ, егале ка валoare ши де сенсурь контраре. Ун астфел де систем де доуэ форце, дупэ кум се штие, есте екви-валент ку zero. Моментул алжебрик ал унуй куплу де форце есте егал нумерик ку ария паралелограмулуй конструит пе форцеле куплулуй:

$$M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm \text{ария } \square ABCD = \pm 2 \text{ арий } \triangle ABC = \pm 2 \text{ арий } \triangle ABD.$$

Релация динтре моментул алжебрик ал унуй куплу де форце ши моментул алжебрик ал уней сингуре форце а куплулуй се поате стабили пе база теоремей деспре сума моментелор форцелор куплулуй.

### Теорема деспре сума моментелор алжебриче а форцелор унуй куплу

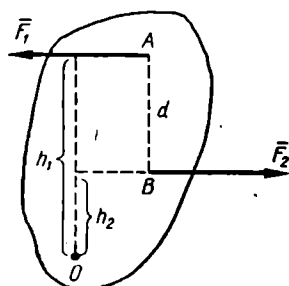
Сума моментелор алжебриче але форцелор унуй куплу ын рапорт ку ун пункт, каре се гэсеште ын планул де акциуне ал куплулуй де форце, есте егадэ ку моментул алжебрик ал ку-



Фиг. 30.

плулуй, ши деч ну депинде де алежера пунктулуй моментар (фиг. 31).

Сэ калкулэм сума моментелор алжебриче але форцелор куплулуй  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  ын рапорт ку ун пункт арбитрар  $O$ :



Фиг. 31.

$$M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) = h_1 F_1 - h_2 F_2 = F_1(h_1 - h_2) = F_1 d,$$

ынсэ

$$F_1 = F_2,$$

ши деачея

$$M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) = F_1 d = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2). \quad (6)$$

Теорема деспре сума моментелор алжебриче але форцелор унуй куплу есте адевератэ пентру орьче позиции а пунктулуй моментар  $O$  ын планул де акциуне ал куплулуй де форце. Дакэ

ын калитате де пунктэ моментаре вом консидера сукчесив пунктеле  $A$  ши  $B$ , каре се афлэ пе линииле де акциуне але форцелор куплулуй, атунч авем

$$M_A(\bar{F}_2) = M_B(\bar{F}_1) = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2), \quad (7)$$

адикэ моментул алжебрик ал унуй куплу де форце есте егал ку моментул алжебрик ал уней форце а куплулуй ын рапорт ку ун пункт, ситуат пе линия де акциуне а алтей форце а куплулуй.

### Теорема деспре екиваленца а доуэ куплурь де форце

Куплуриле де форце, ситуате ынтр'ун план, се деосебеск унул де алтул дупэ акциуня лор асупра унуй корп нумай прин моментеле алжебриче.

Доуэ куплурь де форце се нумеск екиваленте, дакэ еле екзерчитэ ын ачеляшь кондиций ачеляшь акциунь асупра унуй корп.

Сэ демонстрэм урмэтоаря теоремэ деспре екиваленца а доуэ куплурь де форце: куплул де форце, каре акционязэ асупра унуй корп солид, поате фи ынлокуит ку ун алт куплу де форце ситуат ын ачелаш план де акциуне ши каре аре ачелаш момент алжебрик ка ши куплул дат. Ку алте кувинте, доуэ куплурь де форце ситуате ынтр'ун план сынт екиваленте, дакэ моментеле алжебриче але лор сынт егале.

Адмитем кэ асупра унуй корп солид акционязэ ун куплу де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ , авынд моментул алжебрик  $M$  (фиг. 32). Депласэм форца  $\bar{F}_1$  ын пунктул  $O_1$ , яр форца  $\bar{F}_2$  ын пунктул



$O_2$  ши дучем прин пунктеле  $O_1$  ши  $O_2$  доуэ дрепте паралеле арбитраре, каре интерсектязэ линииле де акциуне але форцелор куплулуй ши се гэсеск, прин урмаре, ын планул де акциуне ал ачестуй куплу. Унинд пунктеле  $O_1$  ши  $O_2$  принтр'ун сегмент де дряптэ, дескомпунем форцеле  $\bar{F}_1$  ын пунктул  $O_1$  ши  $\bar{F}_2$  ын пунктул  $O_2$  дупэ регула паралелограмулуй, аша кум се аратэ ын фигура 32. Вом авя

$$\bar{F}_1 = \bar{F}'_1 + \bar{F}''_1; \bar{F}_2 = \bar{F}'_2 + \bar{F}''_2.$$

Деоарече форцеле  $\bar{F}_1$  шу  $\bar{F}_2$  формязэ ун куплу де форце,

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

ши, деч,

$$\bar{F}'_1 = -\bar{F}'_2; \bar{F}''_1 = -\bar{F}''_2.$$

Ачесте трансформэрь се репрезинтэ астфел

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \oslash (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}''_1, \bar{F}''_2) \oslash (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2).$$

Деоаречэ

$$(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) \oslash 0,$$

ачест систем дин доуэ форце се поате negliжа.

Прин урмаре, куплул дат де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  се поате ынлокуи ку ун алт куплу де форце  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2)$ . Вом демонстра, кэ ачесте куплурь де форце ау моменте алжебриче егале ши ачеляшь сенсурь де ротацие (фиг. 32). Авем

$$M = M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = 2 \text{ арий } \triangle O_1 O_2 A,$$

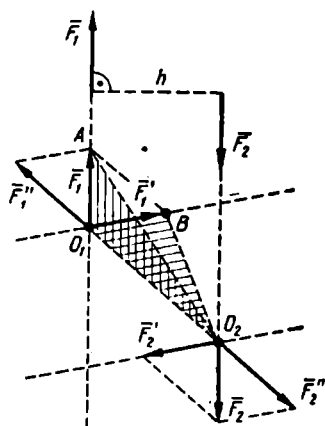
$$M' = M(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2) = 2 \text{ арий } \triangle O_1 O_2 B.$$

Ынсэ ария  $\triangle O_1 O_2 A = \text{ария } \triangle O_1 O_2 B$ , деоарече ачесте триунгорь ау база комунэ  $O_1 O_2$  ши ынэлцимь егале (вырфуриле триунгюрилор се афлэ пе о дряптэ комунэ, паралелэ ку база). Астфел, теорема есте демонстратэ ши се пот траже урмэтоареле конклузий:

а) ун куплу де форце се поате роти ши депласа орькум ын планул сзу де акциуне;

б) ла ун куплу де форце се пот скимба форцеле ши брацул де пыргие, менцинынд констант моментул алжебриж ал куплулуй.

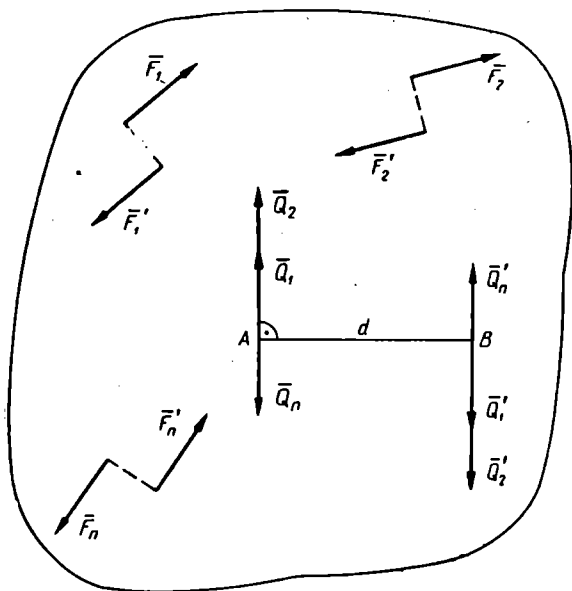
Ачесте операций фэкуте асупра куплурилор ну скимбэ ефектул лор асупра корпурилор солиде.



Фиг. 32.

### Компунеря куплурилог де форце, ситуате ынтр'ун план

Куплуриле де форце, каре акцияызэ асупра унуй корп солид ши сынт ситуате ынтр'ун план, пот фи редусе ла ун сингур куплу, моментул алжэбрик ал кэруя есте егал ку сума моментелор алжэбриче але куплурилог компоненте.



Фиг. 33.

Фие  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$ ,  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$ , ...,  $(\bar{F}_n, \bar{F}_n')$  ун систем де куплурь де форце, каре акцияызэ асупра унуй корп солид ши каре сынт ситуате ын ачелаш план де акциуне (фиг. 33). Алежэм ын планул де акциуне ал куплурилог де форце ун сегмент  $AB=d$  ши-л консидерэм ка брац де пыргие комун тутурор форцелор. Редучем куплуриле де форце ла ачест брац де пыргие, ротинду-ле ши депласынду-ле астфел, ынкыт форцеленой але куплурилог сэ фие апликате ын пунктеле А ши В ши сэ акционезе дупэ дрептеле, каре трек прин ачесте пункте. Афлэм сума алжэбрикэ а форцелор, каре акцияызэ дупэ о дряптэ ын пунктеле А ши В:

$$R^* = \sum_{i=1}^n \pm Q_i, \quad R'^* = \sum_{i=1}^n \pm Q_i',$$

унде

$$(\bar{R}^*) \propto (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n)$$

ши

$$(\bar{R}^{*'}) \propto (\bar{Q}_1', \bar{Q}_2', \dots, \bar{Q}_n').$$

Аич

$$\bar{R}^* = -\bar{R}^{*'},$$

деоарече

$$\bar{Q}_1 = -\bar{Q}_1', \bar{Q}_2 = -\bar{Q}_2', \dots, \bar{Q}_n = -\bar{Q}_n'.$$

Прин урмаре, системул де форце  $(\bar{R}^*, \bar{R}^{*'})$  есте ун куплу де форце. Моментул алжебрик  $M$  ал ачестуй куплу де форце есте егал кю:

$$M = M(\bar{R}^*, \bar{R}^{*'}) = R^* d. \quad (8)$$

Пентру системул де куплурь де форце дат авем

$$M_1 = M(\bar{F}_1, \bar{F}_1') = M(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') = -Q_1 d,$$

$$M_2 = M(\bar{F}_2, \bar{F}_2') = M(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2') = -Q_2 d,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_n = M(\bar{F}_n, \bar{F}_n') = M(\bar{Q}_n, \bar{Q}_n') = Q_n d$$

сау

$$M_i = M(\bar{F}_i, \bar{F}_i') = M(\bar{Q}_i, \bar{Q}_i') = \pm Q_i d, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Адунэм пэрциле дрепте ши стынжъ але ачестор релаций:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = (-Q_1 - Q_2 + \dots + Q_n) d$$

сау

$$\sum_{i=1}^n M_i = d \sum_{i=1}^n \pm Q_i = d R^*.$$

Апликынд формула (8), кэпэтэм

$$\sum_{i=1}^n M_i = R^* d = M(\bar{R}^*, \bar{R}^{*'}) = M.$$

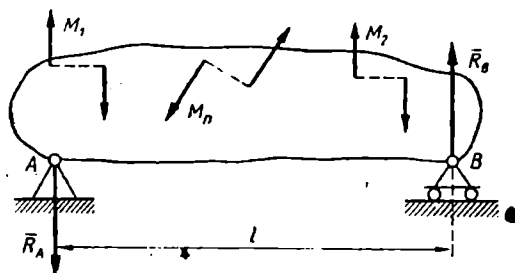
Астфел, авем дефинитив

$$M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (9)$$

Куплуриле де форце, каре сынт ситуате ынтр'ун план ши акциязэ асупра унуй корп солид, пот фи ынлокуите ку ун куплу де форце еквивалент, моментул алжэбрик ал кэруя есте егал ку сума моментелор алжэбриче а куплурилор компоненте, адикэ

$$M = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Пентру екилибрул куплурилор де форце есте нечесар ши суфициент, ка моментул алжэбрик ал куплулуй еквивалент ку еле сэ фие егал ку zero, адикэ *пентру екилибрул куплурилор де форце, каре акциязэ асупра унуй корп солид ынтр'ун план, есте нечесар ши суфициент, ка сума моментелор алжэбриче але ачестор куплурь сэ фие егалэ ку zero.*



Фиг. 34.

Дакэ асупра унуй корп солид акциязэ нумай куплурь, ситуате ынтр'ун план, реакциуниле сприжинелор, че екилибрызэ куплуриле дате, формязэ ун куплу де форце. Де екземплу, дакэ ын пунктул *B* авем ун сприжин пе рулоурь (фиг. 34), яр алтул репрезинтэ о артикулацие фиксэ ын пунктул *A*, атунч сенсул реакциуний ын артикулация *A* есте опус сенсулуй реакциуний ын *B*, деоарече ачесте реакциуны формязэ ун куплу де форце. Реакциуна сприжинулуй пе рулоурь  $\bar{R}_B$  есте перпендикулярэ пе планул де сприжин ал рулоурилор ши есте ориентатэ ын сус, прин урмарэ,  $\bar{R}_A$  есте ориентатэ ын жос паралел ку  $\bar{R}_B$ .

Ачесте реакциуны сынт егале ын валoare ши пот фи детерминате егалынд моментул куплулуй де форце а реакциунилор де сприжин ку сума моментелор алжэбриче але куплурилор, каре акциязэ асупра корпулуй. Астфел

$$\bar{R}_A = -\bar{R}_B \text{ ши } R_B l = \sum_{i=1}^n M_i,$$

адикэ

$$R_A = R_B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n M_i.$$

#### § 4. РЕДУЧЕРЯ УНУЙ СИСТЕМ ПЛАН ДЕ ФОРЦЕ ЛА ЧЕЛ МАЙ СИМПЛУ СИСТЕМ

##### Редучеря уней форце ынтр'ун центру дат

Орьче форцэ поате фи депласатэ ын орьче пункт ал корпулуй солид, адзугынд ун куплу де форце, моментул алжебрик ал кэруя есте егал ку моментул алжебрик ал форцей депласате ын рапорт ку пунктул ноу де апликация а форцей.

Фие форца  $\vec{F}$  апликатэ унуй корп солид ын пунктул  $A$  (фиг. 35). Се штие, кэ о форцэ, апликатэ унуй корп солид, поате фи депласатэ ын лунгул линей де акциуне фэрэ а скимба ефектул ей.

Сэ демонстрэм аум, кэ о форцэ поате фи депласатэ пе о алтэ линей де акциуне паралелэ ку еа. Ынсэ ачастэ депласаре требуе компенсатэ прин адэугаря унуй куплу кореспунзэтор. Сэ апликэм ын пунктул  $B$  ал корпулуй, алес ка чентру де редучере, ун систем дин доуэ форце  $\vec{F}'$  ши  $\vec{F}''$  егале ын валoare ши де сенсуре опусе, паралеле ку форца датэ  $\vec{F}$ . Системул де форце  $\vec{F}'$  ши  $\vec{F}''$  формязэ ун систем де форце еквивалент ку zero, каре поате фи адэугат ла орьче систем де форце дат.

Адмитем кэ

$$F' = F'' = F.$$

Вом авя

$$(\vec{F}) \propto (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \propto (\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')).$$

Ун систем де доуэ форце паралеле, егале ын валoare ши де сенсуре контраре  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  алкэтуеск ун куплу де форце, каре се нумеште *куплу де форце адерат*.

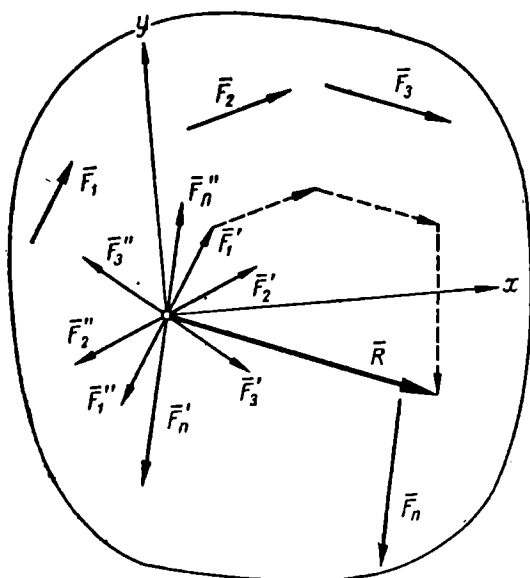
Астфел, ын лок де форца  $\vec{F}$ , апликатэ ын пунктул  $A$ , а фост кэпэтантэ форца  $\vec{F}'$ , егалэ ын валoare ши де ачелаш сенс ку форца  $\vec{F}$ , ынсэ апликатэ ын пунктул  $B$ , ши ун куплу адерат де форце  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ , моментул алжебрик ал кэруя конформ формулей (7) ва фи

$$M(\vec{F}, \vec{F}'') = M_B(\vec{F}). \quad (10)$$

Прочедеул де ынлокуире а форцей  $\bar{F}$  прин форца  $\bar{F}'$  ши куплул де форце ( $\bar{F}$ ,  $\bar{F}''$ ) се нумеште *редучеря форцей  $\bar{F}$  ын-тр'ун цен-тру дат В*. Конформ теоремей реферитоаре ла еки-валенца куплурилор путем ынлокуи куплул де форце ( $\bar{F}$ ,  $\bar{F}''$ ) ку орьче алт куплу де форце, авын-д ачелаш момент алжебрик ши ачелаш план де акциуне.

**Редучеря унуй систем план де форце ла о форцэ ши ла ун куплу де форце**

Сэ демонстрэм теорема фундаменталэ а статичий плане: *орьче систем план де форце, каре акционязэ асупра унуй корп солид, поате фи ын жаз жгенерал редус ла о форцэ ши ла ун куплу де форце.*



Фиг. 36.

Прочедеул ынлокуирий унуй систем де форце ку о форцэ ши ун куплу се нумеште *редучеря системулуй де форце ын-тр'ун цен-тру дат*.

Фие дат ун систем план де форце ( $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ ), апли-кате унуй корп солид. Алежем ын планул де акциуне ал ачес-тор форце ун пункт О ал корпулуй дрепт цен-тру де редучере

ши редучем фиекаре форцэ а системулуй дат ын пунктул  $O$  (фиг. 36). Вом обцине

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \cap (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n; (\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)).$$

Астфел, ун систем дин  $n$  форцэ а фост ынлокуит ку ун систем дин  $3n$  форце, адикэ ын пунктул  $O$  есте апликат ун систем план де форце конкуренте  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$  ши асупра корпулуй солид акционязэ де асемения ун систем де  $n$  куплурь адерате де форце, ситуате ын ачелаш план:

$$((\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)).$$

Моментеле алжебриче але куплурилор де форце адерате, конформ формулей (10), се пот експрима прин моментеле алжебриче але форцелор дате, адикэ

$$M_i = M(\bar{F}_i, \bar{F}'_i) = M_O(\bar{F}_i); i=1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Системул де форце конкуренте  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$  поате фи ынлокуит ку о сингурэ форцэ резултантэ  $\bar{R}$ , каре есте егалэ ку сума векториалэ а форцелор  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ , ши се репрезинтэ жеометрик прин векторул, че ынкиде полигонул де форце, конструит пе ачесте форце (фиг. 36).

Прин урмаре, обцинем

$$(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n) \cap (\bar{R}),$$

унде

$$\bar{R} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 + \dots + \bar{F}'_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Пентру системул де форце конкуренте  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$  форца  $\bar{R}$  есте о форцэ резултантэ, яр пентру системул план де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  форца  $\bar{R}$  есте нумай сума векториалэ сау векторул принципал.

Се нумеште *вектор принципал* ал унуй систем де форце векторул, егал ку сума векториалэ а ачестор форце. Ачастэ сумэ се репрезинтэ принтр'ун вектор, каре ынкиде полигонул де форце конструит пе ачесте форце, адикэ

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (12)$$

Ун систем де куплурь де форце адерате  $((\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n))$ , ситуате ын ачелаш план, конформ теоремеи

деспре компунеря куплурилор де форце, поате фи ынлокуит ку ун сингур куплу де форце, авынд ун момент алжебрик  $L_0$ , каре се нумеште момент принципал. Моментул принципал  $L_0$  есте егал ку сума моментелор алжебриче а куплурилор адера-те. Циньнд конт де формула (11) пентру  $L_0$  авем

$$L_0 = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + \dots + M_0(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i). \quad (13)$$

Индичеле  $O$  ал луй  $L_0$  индикэ, кэ центрул де редучере есте пункт  $O$ .

Прин урмаре, моментул принципал ал унуй систем план де форце ын рапорт ку ун пункт се нумеште сума моментелор алжебриче але тутурор форцелор системулуй ын рапорт ку ачест пункт.

Астфел есте демонстратэ теорема де базэ а статичий плане: *орьче систем план де форце, че акцияызэ асупра унуй корп солид, поате фи редус ла о форцэ, егалэ ку векторул принципал ал системулуй де форце, ши ла ун куплу де форце, моментул алжебрик ал кэруя есте егал ку моментул принципал ал системулуй де форце ын рапорт ку ун пункт, алес ка центру де редучере.*

Дакэ ун систем план де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  есте дат прин проекцииле форцелор ачестуй систем пе акселе де координате  $Ox$ , атуң пентру векторул принципал ши косинусуриле динтре векторул принципал ши акселе де координате се пот аплика формулеле, дедусе пентру форца резултантэ ын капитолул деспре редучеря форцелор конкуренте.

#### Кондициилце де екилибру але унуй систем план де форце

Дупэ кум се штие, орьче систем план де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ , каре акцияызэ асупра унуй корп солид, поате фи ынлокуит принтр'о форцэ, егалэ ку векторул принципал  $\bar{R}$  ши ун куплу де форце авынд ун момент алжебрик, егал ку моментул принципал  $L_0$ . Есте евидент, кэ пентру екилибрул унуй систем план де форце, каре акцияызэ асупра унуй корп солид, есте нечесар ши суфициент ка векторул принципал ши моментул принципал ал ачестуй систем де форце сэ фие егал ку zero, адикэ

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2} = 0; \quad L_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0, \quad (14)$$

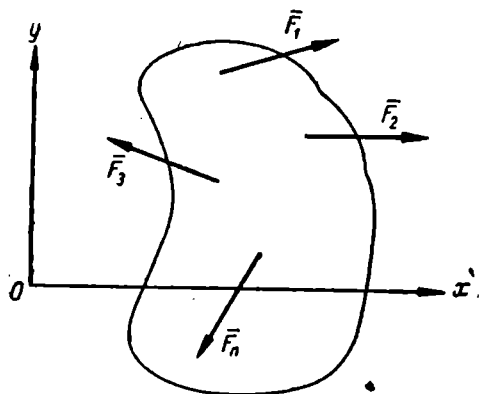
унде ын калитате де центру де редучере се поате консидера орьче пункт, де екземплу орижина системулуй де координате (фиг. 37). Кондицииле де екилибру ын форма (14) сынт нече-



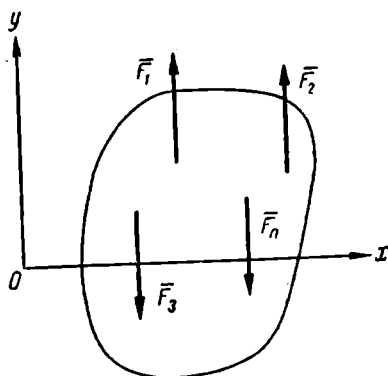
саре ши суфициенте пентру екилибрул унуй систем план де форце. Дин ачесте кондийций се пот обцине кондийциле де екилибру але унуй систем план де форце ын формэ аналитикэ:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix}=0, \sum_{i=1}^n F_{iy}=0, \sum_{i=1}^n M_o(\bar{F}_i)=0. \quad (15)$$

Ачесте кондийций се пот формула асфел: пентру екилибрул унуй систем план де форце, каре акционязэ асупра унуй корп солид, есте нечесар ши суфициент, ка сумеле проекциилор форцелор пе фиекаре дин челе доуэ аксе де координате речипрок перпендикуларе, че се гэсеск ын планул де акциуне ал форцелор, сэ фие егале ку zero ши сума моментелор алжебриче але ачестор форце ын рапорт ку оръче пункт, ситуат ын планул де акциуне ал форцелор, сэ фие де асеменя егалэ ку zero.



Фиг. 37.



Фиг. 38.

**Каз партикулар.** Пентру ун систем план де форце паралеле (фиг. 38) уна дин акселе де координате, де екземплу Оу, поате фи консидератэ паралелэ ку форцеле системулуй. Атунч сума алжебрикэ а проекциилор форцелор пе акса Оу се трансформэ ын сума алжебрикэ а форцелор дате. Фиекаре форцэ се ва проекта пе акса Ох ынтр'ун пункт, ши деч, сума проекциилор форцелор пе акса Ох есте егалэ ку zero кяр ши атунч, кынд системул де форце ну се афлэ ын екилибру. Ачастэ кондийцие де екилибру аре лок идентик ши требуе омисэ.

Асфел, пентру системул план де форце паралеле дин (15) авем урмэтоареле кондийций де екилибру:

$$\sum_{i=1}^n \pm F_i=0, \sum_{i=1}^n M_o(\bar{F}_i)=0, \quad (16)$$

ши деч, пентру ка ун систем план де форце паралеле, че акцио-

нязэ асупра унуй корп солид, сэ се афле ын екилибру, есте нече-сар ши суфициент, ка сума алжебрикэ а форцелор сэ фие егалэ ку zero ши сума моментелор алжебриче але форцелор ын ра-порт ку орьче пункт, ситуат ын планул де акциуне а форцелор, сэ фие де асеменя егалэ ку zero.

Дин кондицииле де екилибру але системулуй план де форце (15) се пот кэпэта ши кондицииле де екилибру але унуй систем де форце конкуренте. Ын ачест каз дрепт пункт моментар требуе консидерат пунктул де интерсекция ал линиилор де акциуне а форцелор конкуренте. Атунч, ултима дин кондицииле де еки-либру (15) се ва трансформа ынтр'о идентитате ши дрепт кон-диций де екилибру пентру системул план де форце конкуренте вор рэмыне нумай примеле доуэ кондиций дин (15).

### Казурь партикуларе де редучере а унуй систем план де форце

Ун систем план де форце поате фи редус ла ун систем май симплу де форце компус динтр'о форцэ сау динтр'ун куплу де форце. Ачесте казурь сынт посибиле, дакэ системул де форце ну се гэсеште ын екилибру ши, прин урмаре, дакэ ну се транс-формэ симултан ын zero векторул принципал ши моментул принципал ал ачестор форце. Сэ черчетэм ачесте казурь парти-куларе.

#### **а) Казул де редучере ла о форцэ резултантэ**

1. Дакэ ла редучеря унуй систем план де форце ын-тр'ун чентру оарекаре, се ва констата, кэ векторул принципал  $R \neq 0$ , ынсэ моментул принципал  $L_0 = 0$ , атунч системул план де форце се редуче ла о сингурэ форцэ  $\bar{R}^*$ , каре есте резултантэ ачестуй систем де форце. Форца резултантэ  $\bar{R}^*$  ын ачест каз трече прин чентрул де редучере ши коинчиде ын валoare, дирекция ши сенс ку векторул прин-ципал  $\bar{R}$ .

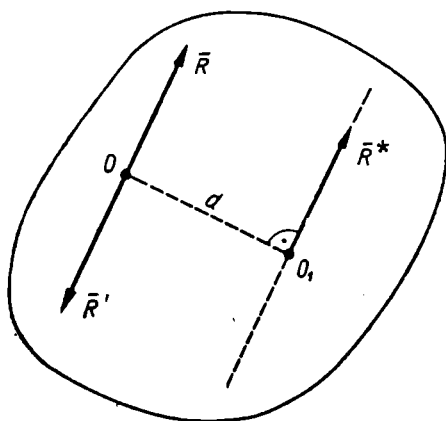
2. Дакэ ла редучеря унуй систем план де форце векто-рул ши моментул принципал  $R \neq 0$  ши  $L_0 \neq 0$ , атунч сис-темул се поате симплифика ши редуче ла о сингурэ фор-цэ резултантэ  $\bar{R}^*$ . Ачастэ форцэ коинчиде ын валoare, ди-рекция ши сенс ку векторул принципал  $\bar{R}$ , ынсэ линия ей де акциуне се афлэ ла дистанца  $d$  де ла чентрул инициал де ре-дучере. Дистанца  $d$  се детерминэ дин релация (фиг. 39):

$$d = \frac{L_0}{R}.$$

Ынтр'адевэр, фие ла редучеря ын пунктул  $O$  се капэта ун вектор принципал ши ун куплу де форце, моментул алжебрик

ал кэруя есте егал ку моментул принципал  $L_0$ . Конформ теоремей деспре екивалентца куплурилор де форце, ситуате ын-тр'ун план, куплул де форце се поате роти ши депласа ын планул сзү де акциуне, се поате скимба брацул де пыргие ши форцеле куплулуй, менци-нынд констант моментул ал-жебрик ал куплулуй. Алежем форцеле  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}^*$ , че алкэтуеск куплул де форце, егале ка мэ-риме ку векторул принципал. Ын ачест каз брацул де пыргие ал куплулуй  $d$  се ва де-термина ку ажуторул форму-лей

$$d = \frac{L_0}{R}, \quad R' = R^* = R.$$



Фиг. 39.

Сэ ротим куплул де форце астфел, ынкыт форцеле луй сэ фие паралеле ку векторул прин-ципал  $\bar{R}$ , яр пунктул де апли-кация ал форцей, опусе дирекцией векторулуй принципал, сэ коинчидэ ку центрул де редучере  $O$ . Вом обцине

$$(\bar{R}, \bar{R}', \bar{R}^*) \cap (\bar{R}^*).$$

Деоарече  $(\bar{R}, \bar{R}') \cap O$ , ун астфел де систем поате фи омис. Прин урмаре, *системул де форце*, редус ла о форцэ ши ун куплу, ын казул, кынд  $\bar{R} \neq 0$  ши  $L_0 = 0$ , поате фи симпли-фикат ши редус ла о сингурэ форцэ  $\bar{R}^*$ , резултанта сис-темулуй дат де форце, ситуатэ ла дистанца

$$OO_1 = d = \frac{L_0}{R}$$

де ла центрул де редучере.

Форца резултантэ  $\bar{R}^*$ , апликацэ унуь корп солид, се поате депласа ын орьче пункт ал линей сале де акциуне. Казул, кынд  $L_0 = 0$ , есте посибил, дакэ дрепт центру де редучере  $O$  вом луа пунктул, ситуат пе линия де акциуне а форцей резултанте.

## 6) Казул де редучере ла ун куплу де форце

Дакэ ла редучеря унуй систем план де форце ынтр'ун центру оарекаре се ва констата, кэ векторул принципал  $\bar{R}=0$ , яр моментул принципал  $L_0 \neq 0$ , атунч системул план де форце се поате редуче ла ун сингур куплу, моментул алгебрик ал кэруя есте егал ку моментул принципал ал системулуй де форце ын рапорт ку центрул де редучере. Ын ачест каз моментул принципал ну депинде де алежеря центрулуй де редучере.

Дакэ векторул принципал есте егал ку zero ла редучеря ынтр'ун центру оарекаре, ел есте егал ку zero ши ла редучеря ын орьче алт центру, деоарече векторул принципал, фиинд сума векториалэ а форцелор системулуй, ну депинде де центрул де редучере. Моментул принципал ну депинде де центрул де редучере нумай атунч, кынд  $R=0$ . Ын алте казуры моментул принципал ал системулуй депинде де алежеря центрулуй де редучере. Дакэ пентру  $R=0$  моментул принципал депинде де центрул де редучере, унул ши ачелаш систем план де форце есте еквивалент ку куплуриле де форце, каре ау моменте алгебриче диферите, чея че есте импосибил, деоарече куплуриле еквиваленте, ситуате ынтр'ун план, ау ачеляшь моменте алгебриче.

Астфел, сынт черчетате тоате казуриле, че пот авя лок ла редучеря унуй систем план де форце ынтр'ун центру оарекаре. Дакэ  $R=0$  ши  $L_0=0$ , системул де форце се гэсеште ын екилибру; дакэ  $R \neq 0$ , ынсэ  $L_0=0$ , сау  $R \neq 0$ ,  $L_0 \neq 0$ , системул де форце се редуче ла о форцэ резултантэ; ши дакэ  $R=0$ ,  $L \neq 0$ , системул де форце се редуче ла ун сингур куплу де форце.

## § 5. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ МОМЕНТУЛ УНЕЙ ФОРЦЕ РЕЗУЛТАНТЕ (ТЕОРЕМА ЛУЙ ВАРИНЬОН)

Пентру казул кынд ун систем план де форце, апликат унуй корп солид, се редуче ла о форцэ резултантэ, се апликэ десеорь аша нумита теоремэ а луй Вариньон: *моментул алгебрик ал уней форце резултанте а системулуй план де форце дат ын рапорт ку орьче пункт, ситуат ын планул де акциуне а форцелор, есте егал ку сума моментелор алгебриче але тутурор форцелор системулуй дат ын рапорт ку ачелаш пункт.*

Адмitem кэ асупра унуй корп солид акционязэ системул план де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  (фиг.40), каре аре о форцэ резултантэ  $\bar{R}^*$ , адикэ

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \odot (\bar{R}^*).$$

Ла системул дат де форце адэугэм форца де екилибраре  $\bar{R}^*$ , каре есте егалэ ка валoare, ынсэ де сенс опус форцей резултанте  $\bar{R}^*$  ши аре ку еа о линии де акциуне комунэ. Вом авя

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}^*) \odot (\bar{R}^*, \bar{R}^*) \odot 0,$$

адикэ адэуынд унуй систем де форце о форцэ де екилибаре, конформ дефиницией форцей де екилибаре, се формазэ ун ноу систем де форце эквивалент ку zero ши деч, сатисфаче кондиции-ле де екилибру але системулуй план де форце, аппликате унуй корп солид.

Ын партикулар, сума моментелор алгебриче але форцелор ачестуй систем ноу де форце ын рапорт ку орьче пункт  $O$ , ситуат ын планул де акциуне а форцелор, есте егалэ ку zero, адикэ

$$\sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i) + M_O(\bar{R}^{*'}) = 0, \quad (17)$$

ынсэ

$$M_O(\bar{R}^{*'}) = -M_O(\bar{R}^*), \quad (18)$$

деоарече  $\bar{R}^{*'}$  ши  $\bar{R}^*$  сынт доуэ форце егале ши де сенсуре контраре, че акциязэ дупэ ачеш дряпэ. Субституинд (18) ын (17), обцинем

$$\sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i) - M_O(\bar{R}^*) = 0,$$

де унде

$$M_O(\bar{R}^*) = \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i). \quad (19)$$

#### § 6. ДИФЕРИТЕ ФОРМЕ ДЕ ИНТЕРПРЕТАРЕ А КОНДИЦИЛОР ДЕ ЕКИЛИБРУ А УНУЙ СИСТЕМ ПЛАН ДЕ ФОРЦЕ

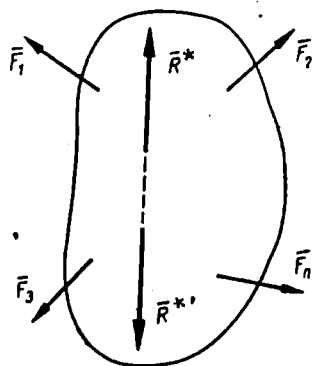
Ын § 5 ам обцинут кондицииле женерале де екилибру але унуй систем план де форце, че акциязэ асупра унуй корп солид, ын форма урмэтоаре:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i) = 0. \quad (20)$$

Кондицииле де екилибру (20) ле вом нуми кондиций де екилибру але унуй систем план де форце де форма ынтыя.

Кондицииле де екилибру але унуй систем план де форце, аппликате унуй корп солид, пот фи формулате ын алте форме эквиваленте. Екзистэ ынкэ доуэ форме эквиваленте але кондициилор нечесаре ши суфициенте де екилибру.

Сэ черчетэм ачесте кондиций де екилибру ын форма уней теореме деспре трей моменте ши форма а трея а кондициилор де екилибру.



Фиг. 40.

**Теорема деспре трей моменте [а доуа формэ в кондицилор де екилибру]**

Пентру ка ун систем план де форце, апликат унуй корп солид, сэ фие ын екилибру, есте нечесар ши суфициент ка сумеле моментелор алгебриче але форцелор системулуй ын рапорт ку орьче трей пункте, ситуате ын планул де акциуне а форцелор ши каре ну се гэсеск не ачеш дрянтэ, сэ фие егале ку zero, адикэ

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0. \quad (21)$$

Нечеситатя ачестор кондиций де екилибру а унуй систем план де форце есте кондиционатэ де фапул, кэ дакэ ун систем план де форце се афлэ ын екилибру, атунч форцеле ачестуй систем сатисфак кондицииле де екилибру ын прима формэ де базэ (20). Ын ачест каз дин ултима кондиция а формулей (20) урмязэ, кэ сума моментелор алгебриче але форцелор ын рапорт ку орьче пункт (деч, ши а пунктелор  $A, B, C$ ) есте егалэ ку zero.

Пентру а демонстра суфициенца кондицилор (21) пентру екилибрул унуй систем план де форце, че акционязэ асупра унуй корп солид, се пот фаче урмэтоареле рационаменте. Деоарече моментеле принципале ын рапорт ку челе трей пункте  $A, B, C$  сынт егале ку zero, пентру фиекаре дин ачесте пункте, консидерате ка чентру де редучере системул се ва редуче сау ла о резултантэ, дакэ векторул принципал ал системулуй есте диферит де zero, сау системул де форце ва фи ын екилибру, дакэ векторул принципал ал системулуй есте егал ку zero. Адмitem, кэ системул де форце се редуче ла о форцэ резултантэ  $\bar{R}^*$ , атунч, алегынд ын калитате де чентру де редучере пунктул  $A$ , ши апликынд теорема луй Вариньон (19), вом авя конформ формулей (21):

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = M_A(\bar{R}^*) = 0.$$

Луынд дрепт чентру де редучере пунктул  $B$ , вом авя ын мод аналог

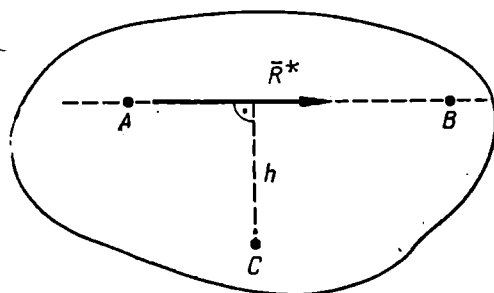
$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = M_B(\bar{R}^*) = 0.$$

Ачесте кондиций пентру форца резултантэ  $\bar{R}^*$ , диферитэ де zero, пот фи сатисфэкуте ын казул, кынд линия де акциуне а форцей резултанте  $\bar{R}^*$  трече прин пунктеле  $A$  ши  $B$  (фиг. 41).

Дин ултима кондиция а формулей (21) дупэ апликаря теоремей луй Вариньон обцинем

$$\sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = M_C(\bar{R}^*) = \pm hR^* = 0.$$

Ынсэ  $h \neq 0$ , деоарече пункт  $C$  ну се афлэ пе дряпта, каре трече прин пунктеле  $A$  ши  $B$ . Прин урмаре, форца резултантэ есте егалэ ку zero, чея че ши есте кондиция суфициентэ де екилибру а унуй систем план де форце, апликат унуй корп солид.



Фиг. 41.

#### Форма а тreja а кондициилор де екилибру

Кондицииле де екилибру але унуй систем план де форце се май пот формула астфел: пентру ка ун систем план де форце, апликат унуй корп солид, сэ фие ын екилибру есте нечесар ши суфициент, ка сумеле моментелор алгебриче але форцелор ын рапорт ку орьче доуэ пукте, ситуате ын планул де акциуне ал форцелор, сэ фие егале ку zero ши сума алгебрикэ а проекциилор ачестор форце пе о оарекаре аксэ а планулуй, каре ну е перпендикулярэ пе дряпта, че трече прин доуэ пукте моментаре, сэ фие егалэ де асеменя ку zero, адикэ

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (22)$$

унде ын калитате де акса  $Ox$  есте консидератэ орьче дряптэ каре ну е перпендикулярэ пе  $AB$ .

Нечеситатэ кондициилор (22) пентру екилибрул унуй систем план де форце реесе дин прима формэ а кондициилор де екилибру (20). Прима парте а теоремей реферитоаре ла суфициенца кондициилор (22) пентру екилибру (линия де акциуне а форцей резултанте  $\bar{R}^*$  трече прин пунктеле  $A$  ши  $B$ ) се демонстразэ тот аша, ка ши ын теорема деспре трей моменте.

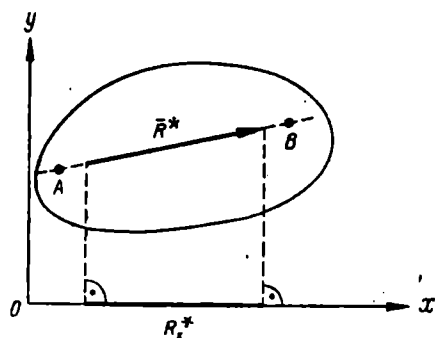
Дин ултима кондиция (22) (фиг. 42) урмязэ, кэ

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_x^* = R^* \cos(x, \bar{R}^*) = 0.$$

Ынсэ

$$\cos(x, \bar{R}^*) \neq 0,$$

деоарече акса  $Ox$  ну есте перпендикулярэ пе дряпта че трече прин пунктеле  $A$  ши  $B$ , прин урмаре, форца резултантэ  $R^*$  есте егалэ ку zero, чея че ши демонстраээ суфициенца кондициилор (22) пентру екилибрул системулуй план де форце, апликате корпулуй солид.



Фиг. 42.

Ын каз партикулар пентру ун систем план де форце паралеле кондицииле де екилибру се пот формула ын алтэ формэ: пентру ка ун систем план де форце паралеле, апликат унуй корп солид, сэ фие ын екилибру, есте нечесар ши суфициент, ка сумеле моментелор алгебриче але форцелор ын рапорт ку алте доуэ пункте ситуате ын планул форцелор, сэ фие егале ку zero, адикэ

$$\sum_{i=1}^n M_A (\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_B (\bar{F}_i) = 0. \quad (23)$$

Пунктеле  $A$  ши  $B$  ну се пот луа пе о линие дряптэ, паралелэ ку форцеле дате.

Ла апликаря кондициилор де екилибру ын форма (23) е комод ка ын калитате де пунктэ моментаре  $A$  ши  $B$  сэ фие луате пунктеле, прин каре трек форцеле кэутате, де екземплу реакциуниле легэтурилор. Ын ачест каз, пентру детерминаря форцелор некуноскуте се капэтэ астфел де екуаций, ынкыт ын фиекаре дин еле фигурызэ нумай кыте о сингурэ форцэ некуноскутэ; ачесте екуаций, де регулэ, се резолвэ май симплу декыт екуацииле ын каре фигурызэ кыте доуэ форце некуноскуте.

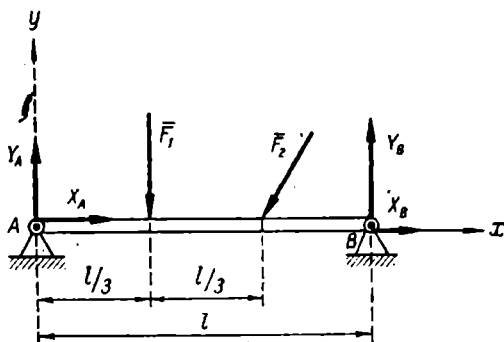


## § 7. ПРОБЛЕМЕ СТАТИК ДЕТЕРМИНАТЕ ШИ СТАТИК НЕДЕТЕРМИНАТЕ

Пентру орьче систем план де форце, каре акцияныз асупра унуй корп солид, авем нумай трей кондиций де екилибру индепенденте ши фиекаре дин еле ну оунт консечинце але челорлалте доуэ. Кондицииле де екилибру индепенденте се пот луа ын трей форме диферите.

Прин урмаре, пентру орьче систем план де форце дин кондицииле де екилибру се пот детермина ну май мулт де трей некуноскуте, яр пентру системеле плане де форце паралеле ши конкуренте — ну май мулт де доуэ некуноскуте. Дакэ ынтр'о проблемэ оарекаре нумэрул некуноскутелор ва фи май маре декыт нумэрул кондициилор де екилибру индепенденте, атуич о астфел де проблемэ ну поате фи резолватэ прин методеле статичий фэрэ а экзамина май ынтый деформацииле корпулуй, адикэ фэрэ а цине конт де ипотеца статичий деспре корпус рижид.

Проблемеле, ын каре нумэрул некуноскутелор ну есте май маре декыт нумэрул кондициилор де екилибру индепенденте пентру системул де форце дат, апликат унуй корп солид, се нумеск *проблема статик детерминате*. Пентру орьче систем план де форце, апликат унуй корп солид, ын проблема статик детерминате нумэрул некуноскутелор ну требеу сэ фие май маре де трей, яр пентру системул план де форце паралеле ши конкуренте — ну май маре де доуэ.



Фиг. 43.

Ун екземплу де проблемэ елементарэ статик детерминате есте дат ын фигура 43, унде есте репрезентате о гриндэ де о анумитэ лунжме, фиксате ла капете ку ажуторул а доуэ артикуляций чилиндриче фиксе А ши В. Асупра гринзий акцияныз форцеле активе  $\vec{F}_1$  ши  $\vec{F}_2$  де о анумитэ валoare ши сенс. Куноаштем де асемenea ши пунктеле де апликацие але ачестор форце. Деоарече пентру артикуляция чилиндрикэ авем доуэ

некуноскуте, де екземплу, компонентеле форцей де реакциуне пе акселе де координате, вор фи патру некуноскуте, ынсэ кондиций де екилибру индепенденте се пот алкэтуи нумай трей. Пентру ка ачасэ проблемэ се девинэ статик детерминатэ, гринда требуе фиксатэ ла ун капэт, де екземплу, ку ажуторул унуй рязем ку рулоурь. Атунч уна дин некуноскуте девине егалэ ку зеро; дакэ ряземул ку рулоурь се гэсеште ын пунктул  $B$  ши планул де рязем ал рулоурило есте паралел ку акса  $Ox$ , атунч форца  $X_B$  есте егалэ ку зеро.

## § 8. ЕКИЛИБРУЛ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ КОРПУРЬ

Сэ консидерэм екилибрул форцелор, апликате унуй систем дин кытева корпурь, че интеракционязэ ынтре еле. Корпуриле пот фи принсе ынтре еле ку ажуторул артикуляцило, сэ се атингэ ши сэ интеракционезе речипрок, провожынд форце де интеракциуне. Ун астфел де систем де корпурь, че интеракционязэ, се нумеште систем артикулат де корпурь.

Форцеле, че акционязэ асупра унуй астфел де систем де корпурь пот фи групате ын форце екстериоаре ши форце интериоаре.

Се нумеск *форце екстериоаре* форцеле, каре акционязэ асупра системулуй консидерат дин партя корпурило алтуй систем.

Се нумеск *интериоаре* форцеле де интеракциуне динтре корпуриле ачелуяш систем.

Дакэ, де екземплу, системул консидерат де корпурь есте ун трен де кале фератэ, форцеле екстериоаре вор фи: форца де греутате а вагоанелор ши локомотивей, акциуня шинелор асупра роцило, вагоанелор ши локомотивей, форцеле де резистенцэ а аерулуй. Форце интериоаре вор фи тенсиуниле ын кулеле де вагоане, форца де пресиуне а абурулуй ш. а. м. д.

Форцеле де греутате пентру орьче систем де корпурь, ын каре ну фигурызэ Лэмынтул, сынт тотдяуна форце екстериоаре.

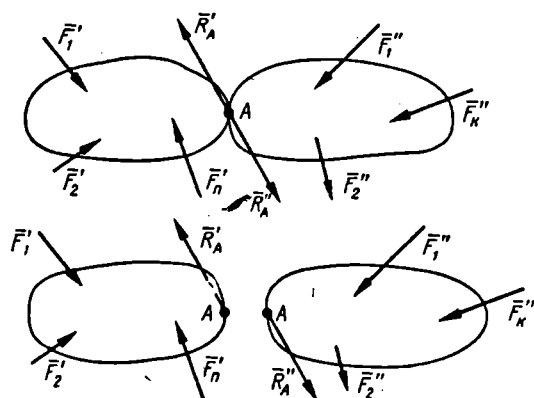
Ла черчетаря екилибрулуй форцелор, апликате унуй систем де корпурь, ачест систем се поате дескомпуне ын минте ын корпурь апарте, [яр форцелор, че акционязэ асупра фиекэруй корп сепарат, ли се апликэ кондицииле де екилибру, кэпэте пентру ун сингур корп. Ын ачесте кондиций де екилибру фигурызэ форцеле екстериоаре ши интериоаре але системулуй де корпурь. Форцеле интериоаре пе база аксиомей деспре егалитатя форцелор де акциуне ши реакциуне формязэ ын орьче пункт де артикуляцие а доуэ корпурь ун систем де форце екилибрат (форцеле  $R_A$  ши  $R_A'$ , фиг.44). Деачея *форцеле екстериоаре, че акционязэ асупра унуй систем де корпурь сепарат, фэрэ форцеле интериоаре, сатисфак кондицииле де екилибру але форцелор, апликате унуй корп солид. Ын ачест каз системул де корпурь се поате консидера ка ун сингур корп.*

Вом демонстра ачаста прин екземплул унуй систем дин доуэ корпурь (Фиг. 44). Дакэ скрием кондициле де екилибру пентру фиекаре корп ал системулуй де корпурь, пентру корпул I кэпэтэм

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i' + \bar{R}_A' = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i') + M_O(\bar{R}_A') = 0; \quad (24)$$

пентру корпул II:

$$\sum_{i=1}^k \bar{F}_i'' + \bar{R}_A'' = 0; \quad \sum_{i=1}^k M_O(\bar{F}_i'') + M_O(\bar{R}_A'') = 0. \quad (25)$$



Фиг. 44.

Афарэ де ачаста, дин аксиома деспре егалитатя форцелор де акциуне ши реакциуне пентру доуэ корпурь че интеракционязэ авем

ши 
$$\bar{R}_A' = -\bar{R}_A'' \quad (26)$$

$$M_O(\bar{R}_A') = -M_O(\bar{R}_A''). \quad (27)$$

Дакэ адунэм (24) ши (25) ши фолосим формулеле (26) ши (27), обцинем

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i' + \sum_{i=1}^k \bar{F}_i'' = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_O(\bar{F}_i') + \sum_{i=1}^k M_O(\bar{F}_i'') = 0.$$

Егалитэциле ачестя сынт токмай кондицииле де екилибру але форцелор екстериоаре, че акционязэ асупра системулуй дин доуэ корпурь.

Ачесте конклузий пот фи фолосите ку сукчес ын казуриле, кынд форцеле некуноските пентру системул дат де корпурь сынт екстериоаре.

Дакэ асупра фиекэруй корп динтр'ун систем' де  $N$  корпус акционязэ орьче систем план де форце, путем алкэтуи  $3N$  кондиций де екилибру, ши деч, детермина  $3N$  некуноскуте. Дакэ нумэрул некуноскутелор есте май маре декыт  $3N$ , проблема есте статик недетерминатэ. Ын казул уней проблеме статик детерминате, луынд ын консидерацие ши форцеле де интеракциуне динтре корпусь, се пот компуне  $3N$  кондиций де екилибру пентру фиекаре корп апарте, сау пентру орьче комбинацие де групе де корпусь, инклюдив ши пентру тот системул консидерат де корпусь. Ын ачест каз форцеле интериоаре, пентру групе де корпусь апарте ши пентру ынтрег системул дат де корпусь, ну требуе луате ын консидерацие.

## § 9. ФОРЦЕ РЕПАРТИЗАТЕ

Ын статикэ сө студиязэ форцеле, апликате унуй корп солид ынтр'ун пункт оарекаре ал сэу, ши деачея астфел де форце се нумеск *концентрате*. Ын реалитате форцеле сынт апликате ын мажоритатя казурилор ла о парте а волумулуй корпусулуй, сау а супрафешей ши адесея ла о оарекаре парте а линией. Ынтрുകыт тоате аксиомеле ши теоремеле статичий сынт формулате пентру форцеле концентрате, апликате унуй корп солид, есте нечесарэ студия прочедеелор де тречере де ла форцеле униформ репартизате ла челе концентрате, ын казуриле челе май симпле ши дес ынтылните.

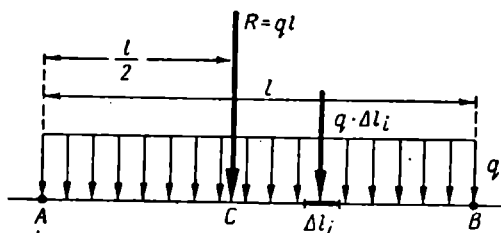
Форцеле униформ репартизате се карактеризязэ май ынтыл де тоате прин *интенситатя форцей репартизате*, адикэ прин форца рапортатэ ла о унитате де волум, де супрафацэ сау де лунжиме а линией. Де обичей акционязэ форцеле репартизате паралеле ши конкуренте. Ун екземплу де форце паралеле, репартизате дупэ волумул унуй корп, сынт форцеле де греутате але партикулелор ачестуй корп. Форца де пресиуне а алей асупра унуй стэвилар се реферэ ла форцеле паралеле репартизате пе супрафаца стэвиларулуй. Форца де греутате а партикулелор унуй фир субцире де сырмэ карактеризязэ форцеле репартизате пе лунжимя линией.

Вом студия ынлокуиря форцелор репартизате дупэ лунжимя уней линий, адикэ а форцелор линиаре репартизате, прин форце концентрате. Пентру симплитате вом консидера казуриле, кынд сегментул де линие, дупэ каре сынт репартизате форцеле, есте ун сегмент де дряптэ, яр интенситатя ачестор форце сау есте константэ (форцеле сынт репартизате дупэ ун дрептунгь), сау есте репартизатэ линиар, ын чел май симплу каз дупэ ун триунгь. Комбиниынд ачесте доуэ казурь, се поате кэпэта ын каз женерал репартизаря линиарэ а интенситэций форцей репартизате.

**Форце паралеле де интенситате константэ, репартизате дупэ ун сегмент де дряптэ**

Адмitem кэ пе порциуна  $AB$  а уней линий дрепте де лунжime  $l$  сынт репартизате ниште форце паралеле, интенситатя кэрора  $q$  есте константэ (фиг. 45). Вом ынлокуи ачесте форце репартизате прин форце концентрате. Пентру ачаста ымпэрчим сегментул  $AB$  ын сегменте дестул де мичь ын компарацие ку лунжимя луй. Асупра фиекэруя дин ачесте сегменте мичь акционязэ форца  $\bar{q}\Delta l_i$ , каре поате фи консидератэ дрепт о форцэ концентратэ, дакэ сегментул  $\Delta l_i$  аре о лунжime дестул де микэ. Ынлокуинд системул де форце паралеле концентрате  $\bar{q}\Delta l_i$  принтр'о форцэ резултантэ, обцинем

$$R = \sum_{i=1}^n q \Delta l_i = q \sum_{i=1}^n \Delta l_i = ql.$$



Фиг. 45.

Резултантa  $\bar{R}$  есте паралелэ ку форцеле репартизате, ши даторитэ симетрий ачестор форце, есте апликате ын мижлокул сегментулуй  $AB$ .

**Форце паралеле, репартизате дупэ ун сегмент де дряптэ, интенситатя кэрора вариязэ дупэ лежя линиарэ**

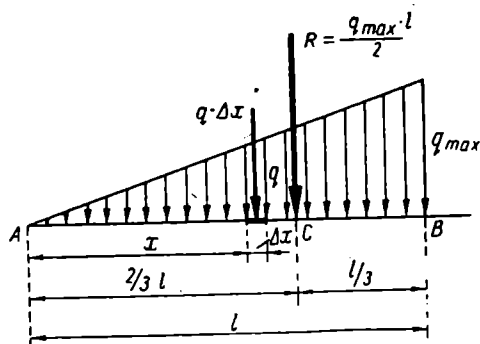
Сэ консидерэм форцеле паралеле репартизате, каре вариязэ дупэ лежя линиарэ (фиг. 46). Де обичей, се пресупуне кэ астфел де форце сынт репартизате дупэ ун триунгь. Форцеле паралеле репартизате дупэ ун триунгь се вор редуче ла о форцэ резултантэ  $\bar{R}$ , егалэ ку

$$R = q_{\max} \frac{l}{2},$$

унде  $q_{\max}$  есте интенситатя максимэ а форцей. Ачаста се поате верифика симплу прин компунеря форцелор паралеле концентрате  $\bar{q}\Delta x$ , апликате фиекэруй сегмент элементар де

лунжиге  $\Delta x$ . Ачаста се фаче чел май симплу прин интеграре. Ынтр'адевэр,

$$R = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n q_i \Delta x = \int_0^l q dx.$$



Фиг. 46.

Дакэ  $x$  се консидерэ де ла пунктул А, дин асемэнаря триунгюрилор

$$\frac{q}{x} = \frac{q_{\max}}{l}.$$

Дупэ ачаста, ынлокуинд суб интегралэ  $q$  прин валоаря са, кэпэтэм

$$R = \int_0^l \frac{q_{\max}}{l} x dx = \frac{q_{\max}}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{q_{\max} l}{2}.$$

Пунктул де апликация С ал форцей резултанте се депласязэ ын партя, унде интенситатя форцей есте май маре, ши коинчиде ку центрул де греутатэ ал триунгюлуй, каре се гэсеште ын пунктул де интерсекция ал медианелор, ситуат ла дистанца де  $1/3$  дин медианэ, консидератэ де ла база триунгюлуй, сау  $2/3$  дин медианэ де ла върфул А, адикэ  $AC = 2/3 l$ . Пунктул де апликация ал форцей резултанте поате фи детерминат де асемэня, калкулынд моментул форцелор елементаре концентрате  $q \Delta x$ , де екземплу, ын рапорт ку пунктул А ши апликакынд апой теорема луй Вариньон деспре моментул форцей резултанте.

Авем

$$R \cdot AC = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n x q \Delta x = \int_0^l x q dx.$$

Субституинд  $q$  прин валоаря са

$$q = \frac{q_{\max}}{l} x,$$

кэпэтэм

$$R \cdot AC = \frac{q_{\max}}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{q_{\max}}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{q_{\max} l^2}{3}.$$

Авынд ын ведере, кэ

$$R = \frac{q_{\max} l}{2},$$

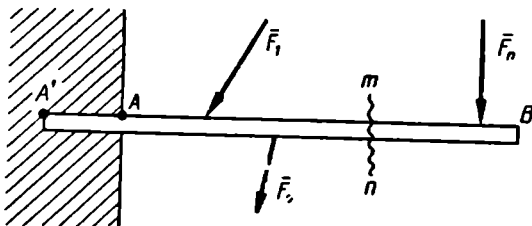
гэсим

$$AC = \frac{q_{\max} l^2}{3R} = \frac{2}{3} l.$$

Ын казуриле де репартизаре а форцелор ын мод май компликат форца резултантэ ши пунктул ей де апликация се детерминэ де обичей прин метода интегрэрий, апликация теорема луй Вариньон. Резултантэ форцелор непаралеле репартизате се калкулязэ тот аша, ка ши пентру форцеле паралеле, нумай кэ се сумязэ (ши, деч, се интегрязэ) ну форцеле елементаре концентрате  $\bar{q}_i \Delta l_i$ , чи проекцияле лор пе акселе де координате. Куноскынд проекцияле се поате детермина валоаря форцей резултанте ши косинусуриле унгюрилор формате де еа ку акселе де координате.

### Реакция ынкастрэрий

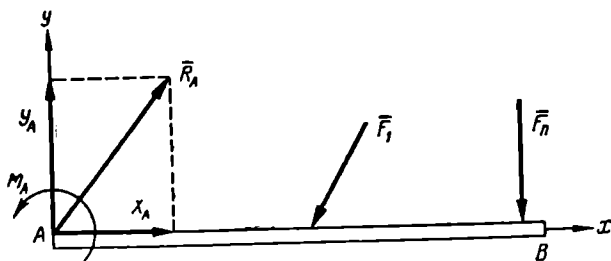
Адмитем кэ авем ун корп, де екземплу о гриндэ  $AB$ , ун капэт ал кэрея  $AA'$  есте ынкастрат ын перете (фиг. 47). О астфел де фиксаге а капэтулуй  $AA'$  ал гринзий се нумеште **ынкастраре ын пунктул  $A$** . Фие кэ асупра гринзий акциязэ ун систем план де форце ( $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ ). Че форце требуе апликаге ын пунктул (секция)  $A$ , дакэ вом ынлэтура порция  $AA'$  а гринзий?



Фиг. 47.

Асупра порциуний  $AA'$  а гринзий ла елибераря ей де ынкастраре ын перете сынт апликаге форце репартизате. Дакэ вом

ынлокуи ачесте форце прин форце елементаре концентрате, апой ле вом редуче ын пунктул  $A$ , атунч ын пунктул  $A$  вом кэпэта о форцэ концентратэ  $\bar{R}_A$  (векторул принципал ал форцелор елементаре концентрате  $\bar{q}_i \Delta l_i$ ) ши ун куплу де форце ку моментул  $M_A$  (моментул принципал ал форцелор елементаре концентрате  $\bar{q}_i \Delta l_i$  ын рапорт ку пунктул  $A$ ); моментул  $M_A$  се нумеште *моментул ынкастрэрий*. Астфел, ынкастрэря спре деосебире де артикулацие, крэээ ну нумай о реакциуне  $\bar{R}_A$  некуноскутэ ка валoare, дирекциие ши сенс, чи ши ун куплу де форце авынд моментул ынкастрэрий  $M_A$  динаинте некуноскут (фиг. 48).



Фиг. 48.

Евидент, дакэ консидерэм орьче порциуне а гринзий, ымпэрцинд-о ын минте дупэ секциуня  $mn$ , ын локул секциуний требуе апликате о форцэ некуноскутэ ши ун куплу де форце, че ынлокуеск акциуня порциуний ынлэтурате а гринзий асупра порциуний ей консидерате. Тот одатэ форца ши моментул куплулуй де форце, че акционязэ асупра диферитор порциунь але гринзий, вор авя о дирекциие де акциуне ши де ротацие директ опусэ ка ши орьче акциуне ши реакциуне.

#### **§ 10. РЕЗОЛВАРЯ ПРОБЛЕМЕЛОР КУ ПРИВИРЕ ЛА ЕКИЛИБРУЛ УНУЙ СИСТЕМ ПЛАН ДЕ ФОРЦЕ, АПЛИКАТ УНУЙ КОРП СОЛИД ШИ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ КОРПУРЬ АРТИКУЛАТЕ**

Сэ студием принципиале де базэ реферитоаре ла резолваря проблемелор деспре екилибрул унуй систем план де форце, каре акционязэ асупра унуй корп солид ши асупра унуй систем де корпурь артикулате. Ынтрекул прочес де резолваре а проблемелор ку привире ла екилибрул форцелор поате фи ымпэрцит ынтр'ун шир де етапе, карактеристиче пентру мажоритатя проблемелор.

Унуй корп сау унуй систем де корпурь алес пентру черчетаре и се пот аплика атыт форце активе, кыт ши реакциуниле легэтурилор, дакэ требуе сэ ымпэрцим системул де корпурь ын



май мулте корпурь сау групе де корпурь апарте. Дакэ ын калитате де легэтурэ авем о супрафацэ абсолют нетедэ а унуй оарекаре корп, ын ачест каз реакциуня легэтурий есте ориентатэ дупэ нормала ла танжента комунэ ын пунктул де контакт, ын сенсул опус дирекцией, ын каре легэтура ымпедикэ депласаря корпулуй дат. Дакэ дрепт легэтурэ сервеште о артикулацие чилиндрике, че пермите корпулуй сэ се ротяске ын журул аксей сале де ротацие, реакциуня артикулацией, ситуате ын планул перпендикулар пе аксэ, требуете дескомпусэ ын доуэ компоненте динаинте некуноските, дупэ сенсуриле позитиве але акселор де координате. Дакэ ачесте компоненте дупэ детерминаря лор дин екуацииле де екилибру вор авя семнул минус, ачаста ынсямнэ, кэ компонентеле реакциуниlor сынт ориентате ын сенс опус сенсулуй позитив ал акселор де координате.

Тоате легэтуриле флексибиле (отгоане, фрынгий, куреле ш. а. м. д.) креазэ реакциунь, ориентате дупэ танжента ла легэтура флексибилэ ын пунктул дат.

Дакэ дрепт легэтурэ сервеште о ынкастраре, каре, спре деосебире де артикулация чилиндрике, ну пермите корпулуй сэ се ротяске, атунач афарэ де челе доуэ компоненте некуноските але реакциуний ын ачест пункт, требуете апликат ынкэ ун куплу де форце ку ун момент ал ынкастрэрий динаинте некуноскут (§ 9).

Ачеляшь казурь пот авя лок ла сепараря системулуй де корпурь.

Скоатеря ын евиденцэ а тутурор форцелор, че акционязэ асупра корпулуй дат сау асупра системулуй де корпурь ши ындеосебь ынлокуиря дряптэ а диферитор фелурь де легэтурь прин реакциуниле лор, есте уна дин етапеле принципале ла резолваря проблемелор де екилибру.

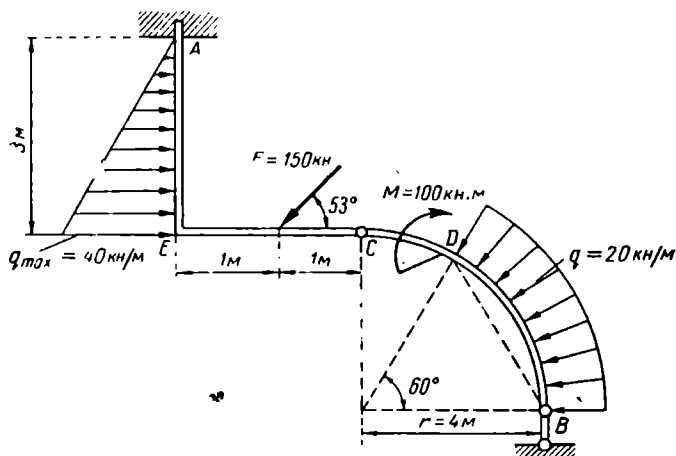
Ла сепараря системулуй де корпурь требуете сэ авем грижэ, ка форцеле де интеракциуне динтре корпурь ши групуриле де корпурь але системулуй артикулат ын пунктеле де артикулацие сэ фие егале дупэ валoare, ынсэ де сенсурь контраре. Ла черчетаря унуй систем де корпурь сау унуй груп де корпурь форцеле де интеракциуне динтре корпуриле системулуй сау але групулуй де корпурь ну требуете луате ын консидерацие, деоарече ачесте форце сынт интериоаре ши ну фигурызэ ын екуацииле де екилибру пентру системул де корпурь сау групул де корпурь.

Дупэ скоатеря ын евиденцэ а тутурор форцелор требуете алесе акселе де координате, пунктеле моментаре, апой, компунынд кондицииле де екилибру але форцелор ын уна дин челе трей форме пентру орьче систем план де форце, сэ резолвэм екуацииле кэпэтате ын рапорт ку некуноскутеле.

Резолваря екуациилор ва фи май симплэ, дакэ ла компунеря лор ын фиекаре дин екуаций се ынтродуче кыте о некуноскутэ ноуэ. Ачаста се ва обцине, дакэ дрепт пункт моментар алежем ун астфел де пункт, ын каре се интересктызэ доуэ форце некуноските. Астфел де пункт есте, де обичей, артикулация чилин-

дрике. Акселе де координате требуе алесе асфел, ынжыт уна сау доуэ форце некуноскуте сз фие перпендикуларе пе уна дин акселе де координате, ши деч, паралеле ку чялалтэ аксэ. Ын ачест каз ын кондиция респективэ де екилибру пентру ун сингур корп ва фигура нумай о форцэ некуноскуте.

Сэ дэм ун екземплу де резолваре а уней проблеме рефери-тоаре ла ун систем план де форце.



Фиг. 49.

*Екземплу.* Се дэ ун систем дин доуэ корпурь солиде артикулате ын пунктул С (фиг. 49). Гринда АС, ындоитэ суб ун унж дрепт, есте ынкастратэ ын пунктул А. Аркул чиркулар CD есте фиксат ын пунктул В ку ажурол уней बारे, че аре ла капете артикуляций. Дименсиуниле корпурилор ши форцеле апликате сынт дате ын фигура 49. Прин аркул ку сэжятэ се нотязэ конвенционал куплул де форце. Греутатя корпурилор се неглижазэ. Сэ се детермине реакциуниле ын лунктеле А ши В.

*Резолваре.* Ынлокуим форцеле репартизате прин форцеле резултанте концентрате. Валоаря форцей резултанте  $\bar{R}_1$  а форцелор репартизате дупэ ун триунг пе порциуна АЕ а корпулуй се детерминэ ку ажурол формулей

$$R_1 = \frac{1}{2} AE \cdot q_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 40 = 60 \text{ кн.}$$

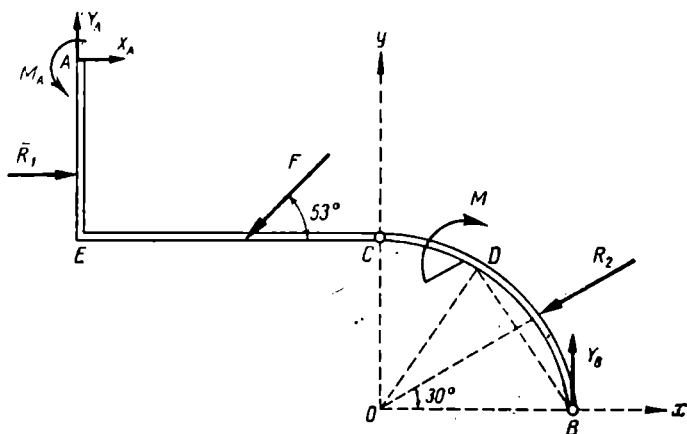
Пунктул де апликация ал форцей  $R_1$  се афлэ де ла пунктул Е ла дистанца де  $\frac{1}{3} AE$ , адикэ де 1 м.

Валоаря форцей резултанте  $\bar{R}_2$  а форцелор радиале репартизате дупэ ун арк се детерминэ ка продусул динтре лунжия

коардей  $\overline{BD}$ , че субынтинде аркул  $\overline{BD}$ , ши интенсивтата сарчиний, рапортате ла о унитате де лунжме, адикэ

$$R_2 = \overline{BD} \cdot q = 4 \cdot 20 = 80 \text{ кн.}$$

Дин кауза симетрией форцелор репартизате линия де акциуне а форцей  $\bar{R}_2$  трече прин центрул аркулуй  $O$ , ымпэрцинд ын пэрць егале унжюл, каре субынтинде аркул.



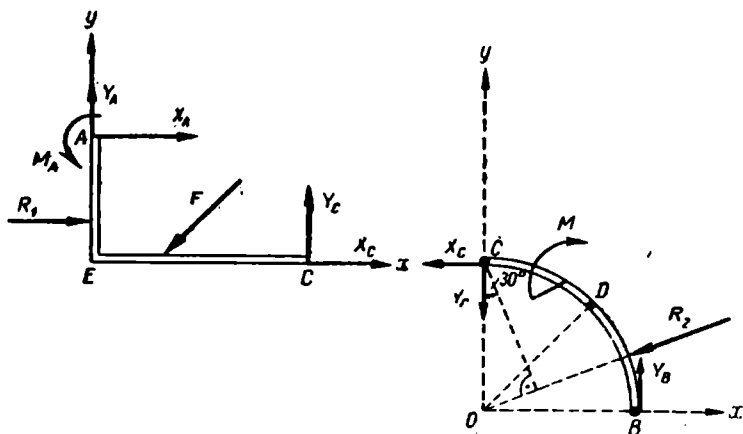
Фиг. 50.

Дакэ форцеле репартизате дупэ арк сынт паралеле, резуланта лор есте егалэ ку продусул динтре интенсивтата  $q$  ши лунжмя аркулуй, яр линия де акциуне а форцей резултанте есте паралелэ ку форцеле дате ши трече прин центрул де греутате а порциуний де арк, дупэ каре сынт репартизате форцеле.

Сэ консидерэм май ынтый екилибрул унуй систем дин доуэ корпурь артикулате, компус дин гринда  $AC$  ши аркул  $BC$  (фиг. 50). Асупра ачестуй груп де корпурь акционязэ форцеле  $\bar{F}_1, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ , куплул де форце ку моментул  $M$ , реакциуня ын ынкастраря  $A$  ши реакциуня ын раземул  $B$ .

Реакциуня ынкастрэрий ын пунктул  $A$ , ын каз жёнерал, дупэ кум се штие, дэ трей некуноскуте: доуэ компоненте але форцей де реакциуне дупэ акселе де координате ши ун момент ал куплулуй де форце; о форце некуноскутэ се афлэ ын пунктул  $B$ . Астфел, се капэтэ патру некуноскуте. Пентру детерминаря лор сынт нумай трей кондиций де екилибру индепенденте. Прия урмаре, системул де корпурь требуе дивизат, апликынд фиекэруй корп ын пунктул  $C$  форцеле де акциуне а унуй корп асупра алтуя, каре сынт егале ын валoare, ыксэ де сенсурь контраре (фиг. 51).

Ын тотал сынт, деч, шасе некуноскуте, луынд ын консидерация шн реакцияле ын артикуляция С. Компунынд кыте трей екуаций де екилибру пентру фиекаре корп, се пот обцине шасе екуаций пентру афларя тутурор некуноскутелор. Ынсэ, деоарече ын проблемэ се чере нумай сэ гэсим реакциуниле ын пунктеле А ши В, адикэ патру некуноскуте, се пот компуне кондицииле де екилибру астфел, ынкыт ын фиекаре дин еле сэ фигурезе ын мэсура посибилитэцилор ну май мулт декыт о некуноскутэ ноуэ ши сэ ну фигурезе реакциунь некуноскуте ын пунктул С.



Фиг. 51.

Пентру фиекаре корп ну есте облигаториу сэ компунем тоате трей кондиций де екилибру, се поате скрие пентру корпул СВ о кондиция де екилибру ын форма сумей моментелор форцелор ын рапорт ку пунктул С. Атунч

$$-M - R_2 r \cos 30^\circ + Y_B r = 0,$$

сау

$$-100 - 80 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + Y_B \cdot 4 = 0,$$

де унде

$$Y_B = \frac{50 + 80\sqrt{3}}{2} \approx 94 \text{ кн.}$$

Дупэ ачаста пентру ынтрег системул де корпурь се пот аплика кондицииле де екилибру ын форма сумей проекциилор форцелор пе акселе Ох ши Оу. Вом кэпэта:

$$X_A + R_1 - F \cos 53^\circ - R_2 \cos 30^\circ = 0,$$

де унде

$$X_A = 99 \text{ кн}$$

ши

$$Y_A - F \sin 53^\circ - R_2 \sin 30^\circ + Y_B = 0,$$

деачея

$$Y_A = 66 \text{ кн.}$$

Пентру а детермина моментул куплулуй де форце  $M_A$  ын ынкастраре сау моментул ынкастрэрий есте суфициент сэ апликэм пентру корпул  $AEC$  кондиция де екилибру ын форма сумей моментелор форцелор ын рапорт ку пунктул  $C$ :

$$F \sin 53^\circ \cdot 1 - R_1 \cdot 1 - X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 + M_A = 0,$$

де унде

$$M_A = 370 \text{ кн} \cdot \text{м.}$$

Дакэ суплиментар есте нечесар сэ калкулэм форцеле  $X_C$  ши  $Y_C$ , атунч требуе луате кондициле де екилибру пентру корпул  $CB$  ын форма сумей проекциилор форцелор пе акселе  $Ox$  ши  $Oy$ . Вом авя

$$-X_C - R_2 \cos 30^\circ = 0,$$

$$Y_C - R_2 \sin 30^\circ + Y_B = 0.$$

Резолвынд екуацииле, кэпэтэм

$$X_C = 69 \text{ кн}; Y_C = 54 \text{ кн.}$$

Пентру а верифика дакэ ам детерминат дрепт реакциуниле ын пунктеле  $A$  ши  $B$  требуе сэ алкэтуим кондиция де екилибру, де екземплу, ын форма сумей моментелор форцелор ын рапорт ку пунктул  $C$  пентру ынтрегул систем де корпурь. Валориле гэ-сите але некуноскутелор требуе сэ трансформе екуация ын идентитате.

Де обичей проблема се консидерэ резолватэ, дакэ куноаштем проекцииле форцелор некуноските пе акселе де координате, деоарече дупэ проекцииле форцелор се детерминэ имедиат ачесте форце ши косинусуриле унгюрилор динтре форце ши акселе де координате.

## ФРЕКАРЯ

Ла мишкарят унуй корп пе супрафаца алтуя ын планул танжент ал супрафецелор се наште о форца де фрекаре де алунакаре, каре депинде де пресиуня динтре корпурь, де асперитэциле лор ши алць факторь.

Дакэ ун корп, де екземплу, о барэ чилиндрикэ, се ростооголэште пе супрафаца унуй алт корп афарэ де форцеле де фрекаре де алунакаре дин кауза деформацией супрафецелор корпурилор, се наште суплиментар ун куплу де форце, каре ымпедикэ ростооголиря барей. Наштеря форцей де фрекаре, че ымпедикэ алунакаря се нумеште адеся фрекаре де женул ынтый, яр апарияция форцелор, че ымпедикэ ростооголиря — фрекаре де женул дой.

## § 1. ФРЕКАРЯ ДЕ АЛУНЕКАРЕ

Фие кэ асупра унуй корп акциянэзэ ун систем план де форце активе ши корпул се гэсеште ын екилибру, венинд ын контакт ку супрафаца алтуй корп, каре сервеште ка легэтурэ пентру корпул консидерат. Дакэ супрафецеле де контакт але корпурилор сынт абсолют нетеде ши корпуриле абсолют рижице, атунч реакцияня супрафецей легэтурий есте ориентатэ дупэ нормала ла танжента комунэ ын пунктул де контакт ши сенсул реакциуний ну депинде ын ачест каз де форцеле активе, че акциянэзэ асупра корпулуй. Нумай валоаря форцей де реакциуне депинде де форцеле активе. Ын реалитате супрафече абсолют нетеде ши корпурь абсолют рижице ну екзистэ. Тоате супрафецеле корпурилор ынтр'ун фел сау алтул презинтэ асперитэць ши тоате корпуриле сынт деформабиле. Ын легэтурэ ку ачаста ши форца де реакциуне  $\bar{R}$  а супрафецей ку асперитэць ын тимпул екилибрулуй депинде де форцеле активе ну нумай дупэ валоаре, чи ши дупэ дирекция ши сенс (фиг. 52).

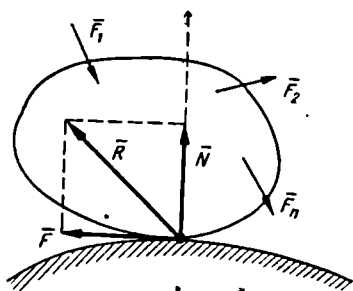
Дакэ реакцияня  $\bar{R}$  а супрафецей ку асперитэць се дескомпуне ын компоненте, уна динтре каре  $\bar{N}$  есте ориентатэ дупэ нормала комунэ ла супрафаца де контакт, яр алта  $\bar{F}$  се гэсеште ын планул танжент ла ачесте супрафече, атунч компонента  $\bar{F}$  а форцей де реакциуне есте *форца де фрекаре де алунакаре*, яр компонента  $\bar{N}$  — реакцияня нормалэ. Форца де фрекаре ши реакцияня нормалэ депинд дупэ валоаре май ынтый де тоате де форцеле активе, каре акциянэзэ асупра корпулуй.

Ын механика теоретикэ се студиязэ де обичей *фрекаря ускатэ* динтре супрафецеле корпурилор, адикэ о астфел де фре-

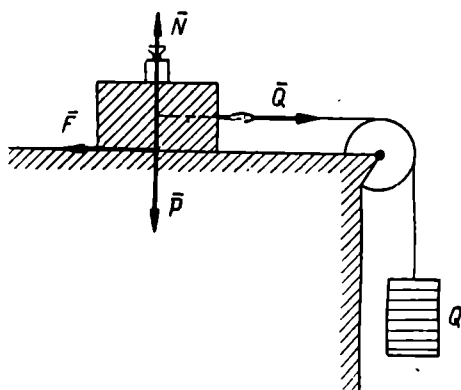
каре кынд ынтре еле ну екзистэ лубрифианць (субстанции де ун-жере). Пентру фрекаря ускатэ требуе сэ деосебим *фрекаря де алунекаре ла репаусул сау екилибрул унуй корп ши фрекаря де алунекаре ла мишкаря* унуй корп пе супрафаца алтуя ку о оарекаре витезэ релативэ.

Ын анул 1781 Кулон а стабилит лежйле де базэ апроксимативе пентру фрекаря ускатэ де алунекаре де репаус. Ултериор лежйле луй Кулон ау фост верификате ын репетате рындурь де кэтре алць черчетэторь. Ынсэ ачесте лежь се конфирмау ын казул, кынд супрафецеле корпурилоу ну се интрепэтрунд уна ын алта.

Лежйле луй Кулон се пот стабилит ку ажуторул унуй апарат, схема кэруя есте датэ ын фигура 53.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Ку ачест апарат, вариинд греутатя, се поате скимба пресиуня нормалэ  $\vec{P}$  (сау реакциуня нормалэ  $\vec{N}$ , егалэ ка валoare ку  $P$ ) ынтре супрафецеле супусе фрекэрий. Модификынд греутатя  $\vec{Q}$ , се поате скимба форца, че тинде сэ миште корпул ын лунгул супрафецей алтуй корп, каре есте о легэтурэ. Евидент, кэ дакэ форца  $\vec{Q} = 0$ , корпул се гэсеште ын екилибру ши форца де фрекаре  $\vec{F}$  есте егалэ ку zero.

Дакэ вом мэри форца  $\vec{Q}$  (ын ачест каз корпул ну алунекэ пе супрафацэ, чи се афлэ ын екилибру), конформ кондицией де екилибру я наштере о форцэ де фрекаре  $\vec{F}$ , каре есте егалэ ку форца активэ  $\vec{Q}$  ши аре сенс опус. Реакциуня нормалэ  $\vec{N}$  есте егалэ ын валoare ку пресиуня нормалэ  $\vec{P}$ . Мэринд форца  $\vec{Q}$  ла о пресиуне нормалэ константэ  $P$ , се поате реализа ши о астфел де позиция, кынд ла о мэрире ултериоарэ фоарте микэ а форцей  $\vec{Q}$ , корпул есе дин старя де екилибру ши есте импус сэ алуначе пе супрафаца легэтурий. Евидент,

кэ ва фи атинсэ позиция лимитэ, ла каре форца де фрекаре ва девени максимэ ши ну ва фи ын старе. сэ екилибрезе форца  $Q$  ла мэрия ей де май департе. Скимбынд форца де пресиуне нормалэ  $P$ , се поате черчета, кум се скимбэ форца де фрекаре лимитэ  $F_{\max}$ . Се поате де асеменя студия инфлуенца супрафещей де контакт асупра форцей де фрекаре лимитэ фэрэ а скимба валоаря пресиуний нормале ши инфлуенца материалулуй корпусилор, карактерулуй прелукрэрий супрафещелор ши алтор факторы. Астфел де експериенце не пермит сэ верификэм лежиле луй Кулон пентру фрекаря ускатэ де алунекаре.

### Лежиле луй Кулон

1. Форца де фрекаре де алунекаре се гэсеште ын планул танжент комун ал супрафещелор де контакт але корпусилор ши есте ориентатэ ын сенсул контрар алунекэрий посибиле а корпусулуй суб акциуня форцелор активе. Мэримя форцей де фрекаре депинде де форцеле активе ши есте купринсэ ынтре зеро ши мэримя са максимэ, каре се атинже ын моментул кынд корпус есе дин позиция де екилибру, адикэ

$$0 \leq F \leq F_{\max}.$$

2. Форца де фрекаре де алунекаре максимэ ну депинде де супрафаца де контакт а корпусилор супсе фрекэрий, рестул кондициилор рэмынынд ачеляшь. Дин ачастэ леже реесе, кэ пентру а урни дин лок, де екземплу, о кэрэмидэ требие аппликатэ уна ши ачеляш форцэ, индиферент де фактул ку каре фацэ се сприжинэ пе супрафацэ, ку чя латэ сау ку чя ынгустэ.

3. Форца де фрекаре де алунекаре максимэ есте пропорционалэ ку пресиуня нормалэ (реакциуня нормалэ), адикэ

$$F_{\max} = fN, \quad (1)$$

унде  $f$  есте ун коефициент фэрэ дименсиунь ши се нумеште коефициент де фрекаре де алунекаре; ел ну депинде де пресиуня нормалэ.

4. Коефициентул де фрекаре де алунекаре депинде де натура корпусулуй ши де старя физикэ а супрафещелор ын контакт, адикэ де мэримя ши карактерул асперитэцилор, умедитэций, температурий ши а алтор кондиций. Валоаря коефициентулуй де фрекаре де алунекаре ын функции де диферите кондиций се стабилеште експериментал. Астфел, де екземплу, коефициентул де фрекаре пентру кэрэмидэ пе бетон есте егал ку 0,76; пентру оцел пе оцел 0,15; пентру стежар пе стежар де-а курмезишул фибрелор 0,54, яр пентру стежар пе стежар ын лунгул фибрелор 0,62.

Лежиле луй Кулон сынт адевэрате ку о апроксимацие ши ла



алунекаря унуй корп пе супрафаца алтуа ку. о оарекаре витезэ релативэ. Ын ачест каз коефициентул де фрекаре де алунекаре депинде де витеза релативэ де алунекаре. Пентру мажоритатя материалелор ел се микшорязэ, кынд витеза релативэ де алунекаре креште, ынсэ пентру унеле materiale, димпотривэ, се мэроште (фрекаря пелий де метал).

Ын калкулеле техниче апроксимативе се консидерэ де обичей кэ коефициентул де фрекаре де алунекаре ну депинде де витеза релативэ де алунекаре.

Спре деосебире де фрекаря ускатэ, фрекаря ын презенца унуй страт де субстанцэ лубрифиантэ ынтре супрафече се детерминэ комплект прин витеза релативэ де алунекаре. Ын ачест каз фрекаря аре лок ну ынтре супрафецеле корпурило, чи ынтре стратуриле де субстанцэ лубрифиантэ. Теория фрекэрий ын стратул де унжере а унуй ликвид се студиязэ ын хидродинамикэ.

### Унгул ши конул де фрекаре

О мулциме де проблеме реферитоаре ла екилибул унуй корп пе о супрафацэ ку асперитэцэ, адикэ ын презенца форцелор де фрекаре, есте комод сэ се резолве жеометрик. Ын ачест скоп есте нечесар сэ ынтродучем ноциуня де унгъ ши кон де фрекаре.

Фие ун корп солид суб акциуня унор форце активе се гэсеште пе о супрафацэ ку асперитэцэ ын старя лимитэ де екилибу, адикэ ынтр'о астфел де старе, кынд форца де фрекаре атинже валоаря са максимэ пентру мэримя датэ а реакциуний нормале (фиг. 54). Ын ачест каз реакциуня тоталэ  $\bar{R}$  а супрафечей ку асперитэцэ есте ынклинатэ фацэ де нормала, дусэ ла планул танжент комун ал супрафецелор ын контакт, суб ун унгъ максим.

Ачест унгъ максим  $\varphi$  динтре реакциуня тоталэ, конструитэ пе форца де фрекаре максимэ, ла о реакциуне нормалэ датэ ши дирекция реакциуний нормале се нумеште *унгъ де фрекаре*.

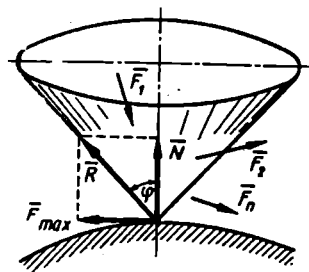
Унгул де фрекаре  $\varphi$  депинде де коефициентул де фрекаре.

Дин фигура 54 есте евидент, кэ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N},$$

ынсэ конформ лежий а трея а луй Кулон

$$F_{\max} = fN,$$

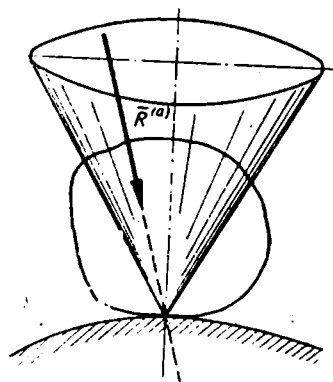


Фиг. 54.

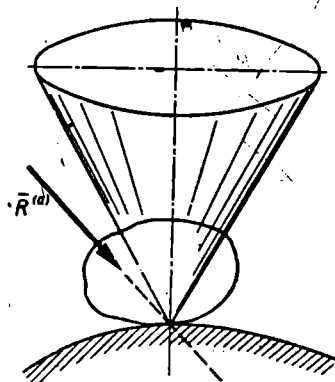


Се пот формула кондицииле де екилибру але унуй корп де пе о супрафацэ ку асперитэць, фолосинд конул де фрекаре. Дакэ форцэле активе, каре акцияызэ асупра унуй корп солид, се редук ла о форцэ резултантэ  $\bar{R}^{(a)}$ , атунч ла екилибрул корпулуй пе о супрафацэ ку асперитэць, резултанта форцелор активе  $\bar{R}^{(a)}$ , конформ аксиомей деспре екилибрул а доуэ форце, апликате унуй корп солид, се екилибрызэ ку реакциуня тоталэ  $\bar{R}$  а супрафеей ку асперитэць (фиг. 55). Реакциуня тоталэ трече прин вырфул конулуй, прин урмаре, прин ачелаш вырф трече ши резултанта форцелор активе. Евидент, ла скимбаря резултантей форцелор активе, корпул се гэсеште ын екилибру пынэ атунч, пынэ кынд компонента  $Q$  а резултантей форцелор активе, ситуатэ ын планул тангент комун ал супрафеецелор де контакт, ну ва депэши валоаря максимэ а форцей де фрекаре  $\bar{F}_{\max}$ .

Казул лимитэ де екилибру ал корпулуй есте атунч, кынд форца  $Q$  есте егалэ ка валоаре ку форца  $\bar{F}_{\max}$ . Ын ачест каз резултанта форцелор активе  $\bar{R}^{(a)}$  есте ориентатэ дупэ женера-тоаря конулуй де фрекаре, деоарече компонента резултантей форцелор активе  $\bar{P}$  дупэ нормала ла супрафаца де контакт есте екилибратэ де реакциуня нормалэ  $\bar{N}$ , дакэ форцэле активе ну ридикэ корпул де пе супрафаца ку асперитэць. Деачея кондицииле де екилибру але унуй корп пе о супрафацэ ку асперитэць се пот формула асфел:



Фиг. 56.



Фиг. 57.

Пентру ка ун корп де пе о супрафацэ ку асперитэць сэ се афле ын екилибру, есте нечесар ши сүфициент, ка линия де акциуне а резултантей форцелор активе, апликате корпулуй, сэ трякэ ын интериорул конулуй де фрекаре сау сэ коинцидэ ку женера-тоаря конулуй, трекунд прин вырфул луй (фиг. 56).

Корпул ну поате фи.скос дин старя де екилибру ку орьче форцэ активэ, дакэ линия ей де акциуне трече ын интериорул конулуй де фрекаре.

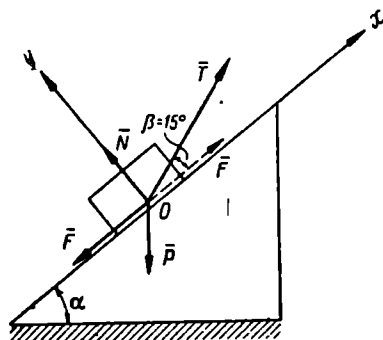
Дакэ линия де акциуне а резултантей форцелор активе ну трече ын интериорул конулуй де фрекаре сау ну коинчиде ку женераоаря луй, корпул ну поате фи ын екилибру пе о су-прафацэ ку асперитэць (фиг. 57).

**Екземпла.** Се дэ ун корп ку греутатя  $P=100\text{н}$ , сусцинут. ын екилибру пе ун план ынклинат ку асперитэць дэ форца  $\bar{T}$  Унгул де ынклинация ал планулуй ынклинат  $\alpha=45^\circ$ . Коефициентул де фрекаре де алунекаре динтре корп ши планул ын-клинат  $f=0,6$ . Форца  $\bar{T}$  акциянэзэ суб ун унгь  $\beta=15^\circ$  фацэ де линия пантей максиме (фиг. 58). Сэ се детермине валоря форцей  $\bar{T}$  ын казул де екилибру ал корпулуй пе планул ын-клинат ку асперитэць.

Резолваре. Асупра корпулуй акциянэзэ форцеле  $\bar{N}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}$  ши форца де фрекаре  $\bar{F}$ . Сын-т-посибиле доуэ казурь лимитэ де екилибру а корпулуй ши респектив доуэ валорь лимитэ але форцей  $\bar{T}$  ши доуэ сенсурь (дупэ планул ынклинат ын жос ши ын сус) але форцей де фрекаре  $\bar{F}$  ын депенденцэ де тендинца

де алунекаре (ын сус пе планул ынклинат сау ын жос). Пентру а алкэтуи екуация де екилибру а форцелор ын казул лимитэ де екилибру нумай о сингурэ датэ, ын-тродучем мэримя  $f_1=kf$ , унде  $k$  аре валоря  $+1$  сау  $-1$ .

Алкэтуинд кондицииле де екилибру ын форма сумей проекции-лор форцелор пе акселе де коордонате, пентру амбеле казурь лимитэ де екилибру, вом авя



Фиг. 58.

$$T \cos \beta - F - P \sin \alpha = 0,$$

$$T \sin \beta + N - P \cos \alpha = 0.$$

Конформ лежий луй Кулэ

$$F = f_1 N = kfN.$$

Резолвынд ачесте екуаций ын рапорт ку  $T$ , кэпэтэм

$$T = \frac{P(\sin \alpha + kf \cos \alpha)}{\cos \beta + kf \sin \beta}.$$

Пентру  $k=+1$

$$T_1 = \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta} = 102 \text{ н}.$$

Пентру  $k = -1$

$$T_2 = \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \beta - f \sin \beta} \approx 35 \text{ н.}$$

Астфел, пентру ка корпул сэ се гэсяскэ ын екилибру форца  $T$  требуе сэ фие

$$35 \text{ н} \leq T \leq 102 \text{ н.}$$

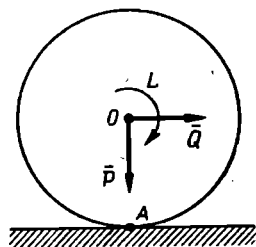
## § 2. ФРЕКАРЯ ДЕ РОСТОГОЛИРЕ

Дакэ корпул консидерат аре форма унуй чилиндру, каре суб акциуня унор форце активе се поате ростоголи пе супрафаца алтуй корп, дин кауза деформациилор супрафецелор ачестор корпурь ын пунктул де контакт яу наштере форце де реакциуне, каре ымпедикэ ну нумай алунекаря, чи ши ростоголиря. Екземпле де асеменя чилиндри сынт диферите роць ла локомотиве, вагоане, аутомобиле, ролеле ши билеле ын рулеменций ку роле ши биле.

Фиё ун чилиндру се ростоголеште пе ун план горизонтал суб акциуня унор форце активе. Дин кауза деформациилор контактул чилиндрлуй ку планул аре лок ын реалитате ну де-а лунгул уней женераatoare, ка ын казул корпурилор рижиде, чи пе о оарекаре супрафацэ. Дакэ форцеле активе сынт апликате симетрик фацэ де секциуня медие а чилиндрлуй, адикэ проваокэ ачеляшь деформаций ын лунгул ынтрёжий женераatoare, атунч се поате студия нумай секциуня медие а чилиндрлуй. Ачест каз есте арэтат май жос.

Форцеле активе, каре акционязэ асупра чилиндрлор ын формэ де роць (фиг. 59), афарэ де форца де греутате  $\vec{P}$ , констэ дин форца  $\vec{Q}$ , апликатэ ын центрул роций, паралел ку танжента комунэ ын пунктул  $A$ , ши ун куплу де форце авынд моментул алжебрик  $L$ , каре тинде сэ ростоголяскэ роата, ын ачест каз роатэ *кондусэ-кондукэтоаре*. Дакэ  $L=0$  ши  $Q \neq 0$ , роата се нумеште *кондусэ*, яр дакэ  $L \neq 0$  ши  $Q=0$ , роата се нумеште *кондукэтоаре*. Роць кондусэ-кондукэтоаре сынт роциле де локомотивэ, каре окупэ локул ал дойля ын компонента тренулуй.

Дакэ форцеле активе, че акционязэ асупра роций, ле вом редуче ын пунктул  $A$ , адикэ ын пунктул де контакт ал чилиндрлуй ку планул, каре ну сынт деформабиле, атунч вом кэпэты ын каз женерал о форцэ ши ун куплу де форце, каре тинд сэ супунэ корпул алунекэрий ши ростоголирий. Требуе сэ деосебим

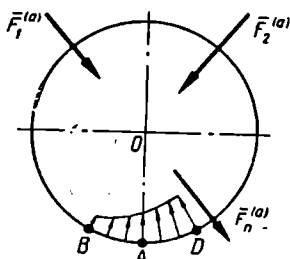


Фиг. 59.

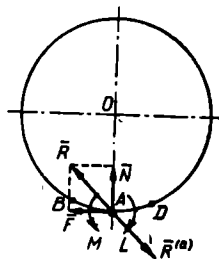
ростоголиря пурэ, кынд пунктул де контакт  $A$  ал чилиндролуу ну алунокэ пе планул фикс, де ростоголиря ку алунокаре, кынд чилиндрул се ротеште ши алунокэ, адикэ пунктул  $A$  ал чинлиндрулуй се мишкэ пе план. Ла алунокаря пурэ, димпотривэ чилиндрул се мишкэ пе план фэрэ а се роти.

Контактул секциуний медий а роций ку планул фикс дин кауза деформацией роций ши а планулуй аре лок дупэ о оарекаре линии  $BD$ . Пе ачестэ линии асупра роций акциянызэ форцеле репартизате де реакциуне (фиг. 60). Дакэ вом редуче форцеле репартизате ын пунктул  $A$ , ын ачест пункт кэпэтэм векторул принципал  $\bar{R}$  ал ачестор форце репартизате авынд компонентеле  $\bar{N}$  (реакциуня нормалэ) ши  $\bar{F}$  (форца де фрекаре ши алунокаре), ши ун куплу де форце ку моментул алжебрик  $M$  (фиг. 61). Ла о репартизаре симетрикэ а форцелор дупэ аркул  $BD$  ын рапорт ку пунктул  $A$  моментул алжебрик  $M$  ал куплулуй де форце есте егал ку zero. Ын ачест каз липсеск форцеле активе, карэ тинд сэ ростоголяскэ чилиндрул ынтр'о оарекаре дирекции.

Сэ редучем форцеле активе ( $\bar{F}_1^{(a)}, \bar{F}_2^{(a)}, \dots, \bar{F}_n^{(a)}$ ) ын пунктул  $A$ . Ын ачест пункт вом кэпэта ун вектор резултант ал ачестор форце  $\bar{R}^{(a)}$  ши ун куплу де форце, моментул алжебрик ал кэруа есте егал ку моментул резултант  $L$  (фиг. 61).



Фиг. 60.



Фиг. 61.

Ын казул екилибрулуй, адикэ кынд чилиндрул ну се ростоголеште ши ну алунокэ пе план, форцеле активе апликате се екилибрызэ ку форцеле де реакциуне а легэтурилор ши, прин урмаре

$$R = -\bar{R}^{(a)}; M = L.$$

Скимбэм форцеле активе апликате чилиндролууй астфел, ка сэ се мэряскэ моментул алжебрик  $L$  ал куплулуй де форце активе, каре тинд сэ ростоголяскэ чилиндрул. Пынэ кынд чилиндрул се афлэ ын екилибру, се мэреште ши моментул алжебрик  $M$  ал куплулуй де форце, нэскут прин акциянэ планулуй фикс асупра чилиндролууй ши каре ымпедикэ ростоголиря луй. Ачест

момент есте егал ка валoare ку моментул  $M$  ынсэ де сенс контрар луй.  $M$  общине валoаря максимэ ын моментул кынд се ынчепе ростогирия чилиндрулуй пе план.

Ау фост стабилите урмэтоареле лежэ апроксимативе пентру моментул алгебрик максим ал куплулуй де форце, каре ымпедикэ ростогирия:

1. Моментул алгебрик максим ал куплулуй де форце, каре се опуне ростогирий, ын лимите дестул де ларжэ есте индепендент де раза чилиндрулуй.

2. Валoаря лимитэ а моментулуй  $M_{\max}$  есте пропорционалэ ку пресиуня нормалэ, прин урмаре, ши ку реакциуня нормалэ  $\bar{N}$ , егалэ ын валoаре ку пресиуня нормалэ:

$$M_{\max} = \delta N. \quad (3)$$

Коефициентул де пропорционалитате  $\delta$  се нумеште *коэффициент де фрекаре де ростогирие* де репаус сау коэффициент де фрекаре де женул дой. Дин формула (3) реесе, жэ  $\delta$  аре дименсиуниле лунжмий.

3. Коефициентул де фрекаре де ростогирие  $\delta$  депинде де материалул чилиндрулуй, ал планулуй ши де старя физикэ а супрафецелор лор. Коефициентул де фрекаре де ростогирие ын прима апроксимацие се поате консидера индепендент де витеза унгуларэ де ростогирие а чилиндрулуй ши де витеза луй де алуекаре пе план. Ла ростогирия роций унуй вагон пе о шинэ де оцел коефициентул де фрекаре де ростогирие  $\delta \approx 5 \text{ мм}$ .

Лежи́ле фрекэрий де ростогирие ка ши лежи́ле фрекэрий де алуекаре сынт жусте пентру пресиунь нормале ну пря марь ши пентру материалеле, дин каре сынт конструите чилиндрул ши планул, пущин деформабиле.

Ачесте лежэ не пермит сэ ну черчетэм деформацииле чилиндрулуй ши але планулуй, консидерынду-ле корпусь рижиде, каре ау ун сингур пункт де контакт. Ын ачест пункт де контакт ын секциуня медие а чилиндрулуй, афарэ де реакциуня нормалэ ши форца де фрекаре требуе апликат ынкэ ун куплу де форце, каре ымпедикэ ростогирия.

Мэримя коефициентулуй де фрекаре де ростогирие есте егалэ ку лунжия  $d$ , каре се калкулязэ ын фелул урмэтор. Компунем реакциуня нормалэ  $\bar{N}$  [ку ун куплу де форце, че ымпедикэ ростогирия. Вом кэпэта ачеяш форцэ  $\bar{N}$ , дар депласатэ паралел ку еа ынсэш ла о дистанцэ

$$d = \frac{M_{\max}}{N}.$$

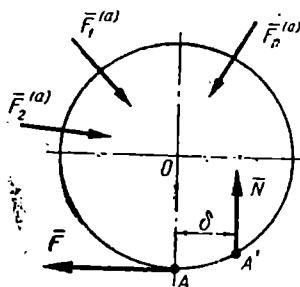
Ын казул лимитэ де екилибру ал чилиндрулуй дистанца  $d$  есте егалэ ку мэримя луй  $\delta$ . Ачэстэ мэриме требуе депусэ ын дирекция, ын каре форцеле активе тинд сэ ростогиляскэ чилиндрул (фиг. 62).

Пентру ка чилиндрул сә ну алуначе, есте нечесар сә сә сатисфакэ кондиция

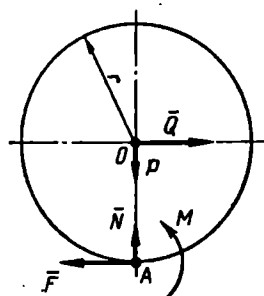
$$F \leq F_{\max} = fN, \quad (4)$$

яр ка сә ну се ростоголяскэ, кондиция

$$M \leq M_{\max} = \delta N. \quad (5)$$



Фиг. 62.



Фиг. 63.

Ка екземплу, сә черчетэм казул туней роцэ кондусе, ла каре пе лынгэ форца де греутате  $\bar{P}$ , есте апликатэ ынкэ о форцэ активэ оризонталэ  $\bar{Q}$  (фиг. 63).

Дакэ чилиндрул се афлэ ын екилибру, чин кондиция де екилибру але унуй систем план де форце, апликат чилиндрулуй, кэпэтэм:

$$\bar{F} = \bar{Q}; \quad N = P; \quad rQ = M,$$

унде ын калитате де пункт моментар есте консидерат пунктул А.

Дакэ липсеште алунекаря дупэ формула (4), луынд ын консидерация кондиция де екилибру, авем:

$$Q = F \leq fP.$$

Ын мод аналог ши ын липса ростоголирий дупэ формула (5) авем:

$$rQ = M \leq \delta P.$$

Астфел, ын липса алунекарий форца  $\bar{Q}$  сатисфаче кондиция

$$Q \leq fP,$$

яр ын липса ростоголирий ачаяш форцэ  $\bar{Q}$  сатисфаче кондиция

$$Q \leq \frac{\delta}{r} P.$$

Де обичей  $\frac{\delta}{r} \ll f$  ши деч, пентру ка чилиндрул сә ынчапэ

ростоголиря есте нечесарэ о форцэ  $\bar{Q}$  мулт май микэ дупэ валoare декыт форца пентру а ынчепе алунекаря. Деачея пе



мэсурэ че форца  $\bar{Q}$  креште чилиндрул ынчеле май ынтый сэ се ростооголяскэ, яр ла мэрия ей де май департе ла ростооголире се адаугэ ши алунекаря.

Дин пункт де ведере ал консумулуй де енержие есте комод сэ ынлокуим алунекаря прин ростооголире. Прин ачаства се експликэ авантажул рулменцилор ку биле ши ку роле фацэ де лагэ-реле де алунекаре, кяр дакэ ын ей ну се микшорязэ фрекаря прин ынтродучеря субстанцелор лубрифианте.

Аналог ку фрекаря де ростооголире се поате черчета ши феноменул наштерий аша нумитей *фрекэрь де пивотаре*, адикэ казул, кынд форцеле активе тинд сэ ротяскэ ун корп, де екземплу де формэ сферикэ, ын журул нормалей ла танжента комунэ а супрафецелор де контакт.

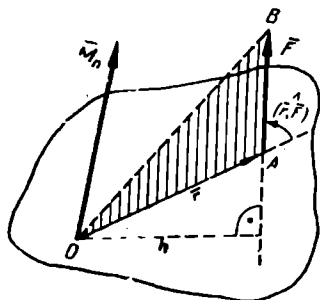
Ын ачест каз се наште ун куплу де форце, каре ымпедикэ пивотаря, моментул алжебрик максим ал кэруя, че апаре ын моментул ынчеперий пивотэрий, де асеменя есте директ пропорционал ку реакциуня нормалэ. Коефициентул де пропорционалитате, адикэ коефициентул де фрекаре де пивотаре, есте де обичей, ку мулт май мик декыт коефициентул де фрекаре де ростооголире.

---

# МОМЕНТЕЛЕ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ УН ПУНКТ ШИ ЫН РАПОРТ КУ О АКСЭ. ТЕОРИЯ КУПЛУРИЛОР ДЕ ФОРЦЕ ЫН СПАЦИУ

## § 1. ВЕКТОРУЛ МОМЕНТ АЛ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ УН ПУНКТ

Се нумеште вектор момент ал уней форце ын рапорт ку ун пункт векторул, апликат ын ачест пункт ши егал дупэ валoare ку продусул динтре форцэ ши брацул де пыргие ал ачестей форце ын рапорт ку пунктул дат. Векторул момент есте перпендикуляр не планул, ын каре сынт ситуате форца ши пунктул моментар, астфел ынкыт дин вырфул луй се поате ведя тендинца форцей де а роти корпул ын сенсул опус ротацийей ачелор де часорник (фиг. 64).



Фиг. 64.

Се нумеште брац де пыргие  $h$  ал уней форце ын рапорт ку ун пункт  $O$  дистанца минимэ де ла ачест пункт пынэ ла линия де акциуне а форцей.

Не ынвоим сэ нотэм векторул момент ал форцей  $\vec{F}$  ын рапорт ку пунктул  $O$  прин  $\vec{M}_O(\vec{F})$ , яр валoаря луй нумерикэ прин  $|\vec{M}_O(\vec{F})|$ . Атвнч конформ дефиницией,

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| \leq Fh.$$

Ка ши пентру моментул алжебрик, векторул момент ал уней форце ын рапорт ку ун пункт есте егал ку ындоитул арией триунгулуй, конструит пе форцэ ши пунктул моментар, адикэ

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = 2 \text{ арий } \triangle OAB$$

ши деч есте жустэ формула

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1)$$

унде  $\vec{r}$  есте ун вектор де позиции (разэ вектоаре), трасат дин пунктул моментар  $O$  ын пунктул де апликация ал форцей сау ын орьче алт пункт ал линей де акциуне а форцей. Пентру а не конвинже ын жустеця формулей (1), есте суфициент сэ демонстрэм, кэ  $\vec{r} \times \vec{F}$  експримэ дупэ валoаре, дирекция ши сенс векторул момент ал форцей ын рапорт ку пунктул  $O$ , дакэ ла алкэтуиря продусулуй векториал вом ефектуа о мишкаре де

транслацие а форцей  $\vec{F}$  ын пунктул  $O$ . Конформ дефиницией продусулуй векториал а дой векторь авем:

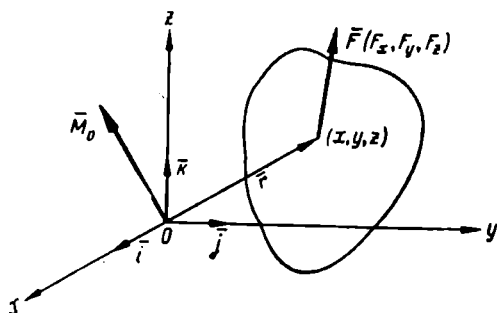
$$|\vec{r} \times \vec{F}| = Fr \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}).$$

Дин фигура 64 се веде, кэ  $r \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) = h$  ши ачасть егалитате есте адевъратэ пентру орьче пункт ал линей де акциуне, унде есте трасат векторул де позицие  $\vec{r}$ . Деч,

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = Fh,$$

чея че коинчиде ку векторул момент ал форцей ын рапорт ку пунктул  $O$ . Векторул  $\vec{r} \times \vec{F}$ , дупэ кум се штиэ, есте перпендикуляр пе планул, ын каре се гэсеск векторий  $\vec{r}$  ши  $\vec{F}$ , адикэ пе планул триунгулуй  $OAB$ , ла каре есте перпендикуляр ши  $\vec{M}_O(\vec{F})$ . Сенсул луй  $\vec{r} \times \vec{F}$  коинчиде де асеменя ку сенсул луй  $\vec{M}_O(\vec{F})$ . Ремаркэм, кэ векторул момент ал уней форце ын рапорт ку ун пункт се консидерэ ун вектор, апликат ын ачест пункт.

Векторул момент ал форцей ын рапорт ку ун пункт ну се скимбэ ла депласаря форцей ын лунгул линей де акциуне. Ел се трансформэ ын zero, ын казул кынд линия де акциуне трече прин пунктул моментар.



Фиг. 65.

Дакэ форца  $\vec{F}$  есте датэ прин проекцииле сале  $F_x, F_y, F_z$  пе акселе де координате ши сынт дате координателе  $x, y, z$  але пунктулуй де апликацие ал ачестей форце (фиг. 65), векторул момент ын рапорт ку орижия де координате, конформ формулей (1), дупэ дескомпунеря пе акселе де координате ва фи

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}, \quad (2)$$

унде  $i, j, k$  сынт векторий унитарь, ориентаць дупэ акселе де координате.

Фолосинд формула (2), се пот евиденция проекцииле луй  $\bar{M}_O(\bar{F})$  пе акселе де координате:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x \bar{M}_O(\bar{F}) &= yF_z - zF_y; \text{пр}_y \bar{M}_O(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \text{пр}_z \bar{M}_O(\bar{F}) = \\ &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3)$$

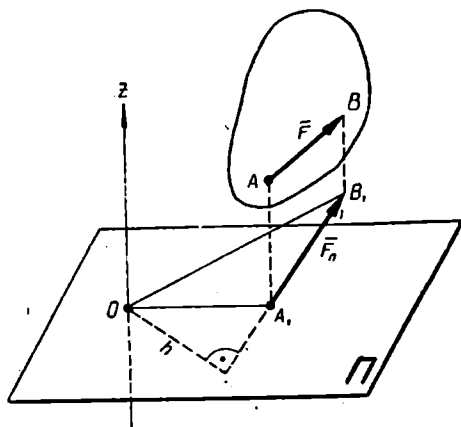
Векторул момент  $\bar{M}_O(\bar{F})$  ши косинусуриле пе каре ле формязэ ел ку акселе де координате вор фи:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{M}_O(\bar{F})| &= \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}; \\ \cos(\bar{M}_O, x) &= \frac{\text{пр}_x \bar{M}_O(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|}; \cos(\bar{M}_O, y) = \frac{\text{пр}_y \bar{M}_O(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|}; \\ \cos(\bar{M}_O, z) &= \frac{\text{пр}_z \bar{M}_O(\bar{F})}{|\bar{M}_O(\bar{F})|}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ын формулеле (4) валoаря нумерикэ а векторулуй  $|\bar{M}_O(\bar{F})|$  се консидерэ позитивэ.

## § 2. МОМЕНТУЛ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ О АКСЭ

Се нумеште момент ал уней форце ын рапорт ку о аксэ моментул алгебрик ал проекцией ачестей форце пе планул, перпендикуляр пе аксэ, ын рапорт ку пунктул де интерсекция ал аксей ку ачест план (фиг. 66).



Фиг. 66.

Моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ се сокоате позитив, дакэ проекция форцей пе планул, перпендикуляр пе аксэ (проекция уней форце пе план есте ун вектор) тинде сэ ротяскэ корпул ын журул дирекцией позитиве а аксей ын сенсул инверс де мишкаре а ачелор де часорник, ши негатив, дакэ тинде сэ ротяскэ корпул ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник. Моментул форцей,

де екземплу, ын рапорт ку акса  $Oz$  се нотязэ прин  $M_z(\bar{F})$ . Азем

$$M_z(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_n) = \pm hF_n, \quad (5)$$

унде  $\bar{F}_\Pi$  есте векторул проекцией форцей  $\bar{F}$  пе планул  $\Pi$ , перпендикулар пе акса  $Oz$ , яр пунктул  $O$  — пунктул де интерсекции ал аксей  $Oz$  ку планул  $\Pi$ .

Дин дефиниция моментулуй уней форце ын рапорт ку о аксэ урмязэ, кэ моментул алгебрик ал форцей ынтродус май сус ын рапорт ку ун пункт се поате консидера ка момент ал форцей ын рапорт ку акса, че трече прин ачест пункт, перпендикуларэ пе планул, ын каре се гэсеште форца ши пунктул моментар. Моментул форцей ын рапорт ку о аксэ се поате експрима прин ария триунгулуй, конструит пе проекция форцей  $\bar{F}_\Pi$  ши пунктул де интерсекции  $O$  ал аксей ку планул, адикэ

$$M_z(\bar{F}) = \pm h F_\Pi = \pm 2 \text{ арий } \triangle O A_1 B_1. \quad (6)$$

Дин формула (6) се пот кэпэта урмэтоареле проприетэць але моментулуй уней форце ын рапорт ку о аксэ:

1. Моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ се трансформэ ын zero, дакэ форца есте паралелэ ку акса. Ын ачест каз проекция форцей пе планул, перпендикулар пе аксэ, есте егалэ ку zero.

2. Моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ есте егал ку zero, дакэ линия де акциуне а форцей интерсектыэ ачастэ аксэ. Ын ачест каз линия де акциуне а проекцией ей пе планул, перпендикулар пе аксэ, трече прин пунктул де интерсекции ал аксей ку планул, ши деч, се трансформэ ын zero брацул де пыргие ал форцей  $\bar{F}_\Pi$  ын рапорт ку пунктул  $O$ .

Ын амбеле казурь акса ши форца сынт ситуате ын ачелаш план. Пе база ачестор доуэ проприетэць се поате спуне, кэ моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ се трансформэ ын zero, дакэ форца ши акса се афлэ ын ачелаш план.

### § 3. РЕЛАЦИЯ ДИНТРЕ МОМЕНТУЛ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ О АКСЭ ШИ ВЕКТОРУЛ МОМЕНТ АЛ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ УН ПУНКТ, СИТУАТ ПЕ АКСЭ

Фолосинд формула (6), авем (фиг. 67)

$$|M_z(\bar{F})| = 2 \text{ арий } \triangle O A_1 B_1. \quad (6')$$

Векторул момент ал форцей  $\bar{F}$  ын рапорт ку ун пункт  $O$ , луат ла интерсекция аксей  $Oz$  ку планул перпендикулар  $\Pi$ , се експрима прин формула

$$|\bar{M}_O(\bar{F})| = 2 \text{ арий } \triangle OAB. \quad (7)$$

Векторул момент  $\bar{M}_O(\bar{F})$  есте перпендикулар пе планул триунгулуй  $OAB$ . Ын мод аналог пентру алт пункт  $O_1$  ал аксей  $Oz$  авем

$$|\bar{M}_{O_1}(\bar{F})| = 2 \text{ арий } \triangle O_1AB, \quad (8)$$

унде векторул момент  $M_O(\bar{F})$  есте перпендикулар пе планул триунгюлуй  $O_1AB$ . Триунгюл  $OA_1B_1$  есте проекция триунгюрилор  $OAB$  ши  $O_1AB$  пе планул  $\Pi$ . Дин жеометрие се штие, кэ ария проекцией уней фигурь плане есте егалэ, ку продусул динтре ария фигурий проектате ши косинусул унгюлуй динтре планеле, ын каре сынт ситуате ачесте фигурь. Унгюл динтре плане се мэсоарэ ку унгюл динтре перпендикулареле, дусе ла ачесте плане. Перпендикулара пе планул триунгюлуй  $OA_1B_1$  есте акса  $Oz$ , яр перпендикулареле пе планеле триунгюрилор  $OAB$  ши  $O_1AB$  сынт респектив векторий момент  $\bar{M}_O(\bar{F})$  ши  $\bar{M}_{O_1}(\bar{F})$ . Астфел

$$\text{ария } \triangle OA_1B_1 = \text{ария } \triangle OAB \cos \alpha,$$

унде  $\alpha$  есте унгюл динтре векторул  $\bar{M}_O(\bar{F})$  ши акса  $Oz$ . Де аич пе база формулелор (6') ши 7 кэпэтэм

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_O(\bar{F})| \cos \alpha = \text{пр}_z \bar{M}_O(\bar{F}), \quad (9)$$

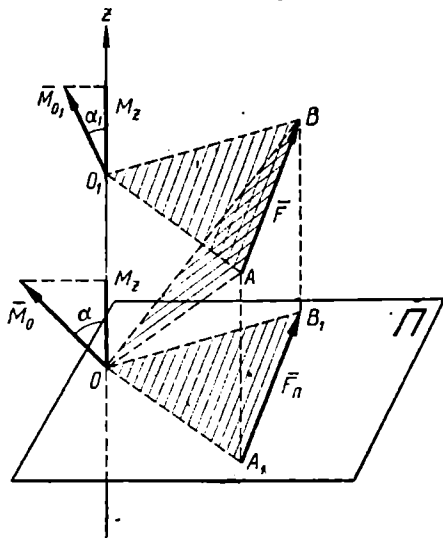
унде семнул луй  $M_z(F)$  се детерминэ комплект прин семнул луй  $\cos \alpha$ . Ын мод аналог

$$\text{ария } \triangle OA_1B_1 = \text{ария } \triangle O_1AB \cos \alpha_1,$$

адикэ

$$M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_{O_1}(\bar{F})| \cos \alpha_1 = \text{пр}_z \bar{M}_{O_1}(\bar{F}), \quad (10)$$

унде  $O_1$  есте орьче пункт де пе акса  $Oz$ .



Фиг. 67.

Формулеле (9) ши (10) експримэ релация динтре моментул форцей ын рапорт ку о аксэ ши векторий момент ай форцей ын рапорт ку пунктеле, ситуате пе ачестэ аксэ.

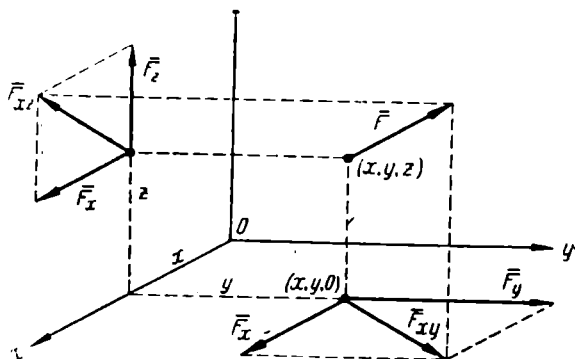
Астфел, моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ есте егал ку проекция пе ачестэ аксэ а векторулуй момент ал форцей ын рапорт ку орьче пункт де пе ачестэ аксэ.

Ачестэ релация динтре моментул форцей ын рапорт ку о аксэ ши векторул момент ал форцей ын рапорт ку ун пункт де пе аксэ се поате фолоси пен-

тру детерминаря моментулуй форцей ын рапорт ку акса.

#### § 4. ФОРМУЛЕЛЕ ПЕНТРУ МОМЕНТЕЛЕ УНЕЙ ФОРЦЕ ЫН РАПОРТ КУ АКСЕЛЕ ДЕ КООРДОНАТЕ

Фолосинд дефиниция моментулуй уней форце ын рапорт ку о аксэ, се пот обцине формуледе пентру калкуларя моментелор форцелор ын рапорт ку акселе де координате ректангуларе, дакэ сынт дате проекцииле форцелор пе акселе де координате ши координателе пунктулуй де апликация а форцей.



Фиг. 68.

Пентру а калкула моментул форцей ын рапорт ку акса  $Oz$  (фиг. 68) требуе сэ проектэм форца  $\vec{F}$  пе планул, перпендикуляр пе ачастэ аксэ, де екземплу, пе планул  $Oxy$ , ши сэ луэм моментул алгебрик ал ачестей проекций а форцей  $\vec{F}_{xy}$  ын рапорт ку пунктул  $O$  де интерсекция а планулуй ку акса. Дескомпунунд форца  $\vec{F}_{xy}$  ын компонентеле  $\vec{F}_x$  ши  $\vec{F}_y$ , паралеле ку акселе  $Ox$  ши  $Oy$ , дупэ регула паралелограмулуй ши апликаунд теорема луй Вариньон пентру моментул алгебрик ал форцей резултанте  $\vec{F}_{xy}$  ын рапорт ку пунктул  $O$ , кэпэтэм

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y),$$

ынсэ

$$M_O(\vec{F}_x) = -yF_x; \quad M_O(\vec{F}_y) = xF_y.$$

Прин умаре

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \quad (11)$$

Пентру а калкула моментул уней форце ын рапорт ку акса  $Oy$ , требуе сэ проектэм форца  $\vec{F}$  пе планул  $Oxz$ . Вом авя

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z. \quad (12)$$

Ын мод аналог моментул форцей ын рапорт ку акса  $Ox$  аре форма

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y. \quad (13)$$

Дефинитив авем

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y; M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x. \quad (14)$$

Ку ажуторул формулелор (14) се поате калкула моментул форцей ын рапорт ку акселе де координате ректангуларе.

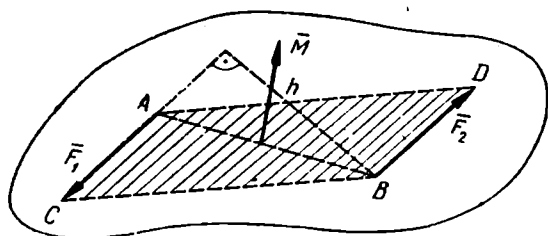
Менционэм, кэ дупэ ачесте формуле се капэтэ семнеле нечесаре пентру  $M_x(F)$ ,  $M_y(F)$ ,  $M_z(F)$ , дакэ субституим проекцииле форцелор  $\bar{F}_x$ ,  $\bar{F}_y$ ,  $\bar{F}_z$  пе акселе де координате ши координателе пунктулуй де апликацие ал форцей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ын еле ку семнул ачестор мэримь.

Моментул форцей ын рапорт ку о аксэ се калкулязэ адеся, фолосинд дефиниция луй аша, дупэ кум ау фост обцинуте формулеле (14).

## § 5. КУПЛУРЬ ДЕ ФОРЦЕ ЫН СПАЦИУ

### Векторул момент ал унуй куплу де форце

Ун куплу де форце апликат унуй корп солид се поате характериза ку ун план де акциуне, ку о валoare а моментулуй куплулуй де форце ши дирекция де ротацие а куплулуй де форце. Тоате ачесте елементе але куплулуй де форце ын спациу се пот експрима принтр'о сингурэ мэриме векториалэ — векторул момент ал куплулуй де форце.



Фиг. 69.

Се нумеште вектор момент ал унуй куплу де форце векторул, мэримя кэруя есте егалэ ку продукул динтре форцэ ши брацул ей де пыргие. Векторул момент ал куплулуй де форце есте перпендикулар пе планул де акциуне ал куплулуй де форце астфел, ынкыт дин вырфул ачестуй вектор се веде тенденца куплулуй де а роти корпул ын сенсул инверс мишкэрий ачелор де часорник. Векторул момент ал куплулуй де форце се апликэ конвенционал ла мижлокул сегментулуй, каре унеште пунктеле де апликацие але форцелор куплулуй (фиг. 69). Ел се поате аплика де асемения ын орьче пункт ал корпулуй, асупра кэруя акциязэ куплул дат.



Вом нота векторул момент ал куплулуй  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  прин  $\vec{M}$  сау прин  $M$   $(F_1, F_2)$ .

Кснформ дефиницией векторул момент ал куплулуй де форце  $|\vec{M}|$  коинчиде ку моментул алже еск ал куплулуй де форце, ши деч,

$$|\vec{M}| = hF_1,$$

унде  $h$  есте брацул де пьргие ал куплулуй де форце.

Векторул момент ал куплулуй де форце есте егал нумерик ку ария паралелограмулуй, конструит пе форцеле куплулуй, адикэ

$$|\vec{M}| = M = hF_1 = \text{ария } \square ACBD.$$

Сэ ремаркэм челе май симпле проприетэць але векторулуй момент ал унуй куплу де форце: валоаря луй есте индепендентэ де депласаря форцелор ын лунгул линиилор де акциуне, ши ел поате фи егал ку zero, дакэ уна дин латуриле паралелограмулуй  $ACBD$  се трансформэ ынтр'ун пункт, адикэ брацул де пьргие ал куплулуй сау форца куплулуй девине нулэ.

Векторул момент ал куплулуй де форце се поате експрима суб форма де продус векториал а дой векторы:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{BA} \times \vec{F}_1. \quad (15)$$

Ынтр'адевэр

$$|\vec{AB} \times \vec{F}_2| = F_2 AB \sin(\vec{AB}, \vec{F}_2),$$

ынсэ

$$AB \sin(\vec{AB}, \vec{F}_2) = h$$

ши деч,

$$|\vec{AB} \times \vec{F}_2| = F_2 h,$$

каре коинчиде ку валоаря векторулуй момент ал куплулуй де форце.

Дирекцииле продуселср векториале  $\vec{AB} \times \vec{F}_2$  ши  $\vec{BA} \times \vec{F}_1$  сынт герпендикуларе пе планул, ын каре се гэсеск факторий продусулуй векториал, прин урмаре, ши пе планул де акциуне ал куплулуй де форце. Еле коинчид ку дирекция векторулуй момент ал куплулуй де форце  $\vec{M}$ .

### Теорема деспре сума моментелор форцелор унуй куплу

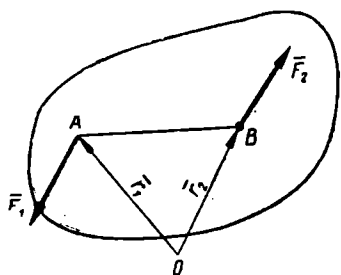
Сума векторилор момент ай форцелор, че формязэ куплул, ын рапорт ку орьче пункт ну депинде де алежеря ачестуй пункт ши есте егалэ ку векторул момент ал ачестуй куплу де форце, адикэ пентру куплул де форце  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  (фиг. 70):

$$\overline{M}_O(\vec{F}_1) + \overline{M}_O(\vec{F}_2) = \overline{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2), \quad (16)$$

унде  $O$  есте ун пункт арбитрар.

Демонстрэм ачастэ теоремэ, калкулынд партя стынгэ а егалитэций (16)

$$\overline{M}_O(\vec{F}_1) + \overline{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2,$$



Фиг. 70.

деоарече пентру ун куплу де форце

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Ынсэ

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{AB}$$

ши ну депинде де фелул кум алежем пунктул  $O$ , прин урмафе,

$$\overline{M}_O(\vec{F}_1) + \overline{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_2,$$

чея че не база формулей (15) коннчиде ку векторул момент ал куплулуй де форце  $\vec{M}$ . Астфел,

$$\overline{M}_O(\vec{F}_1) + \overline{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}.$$

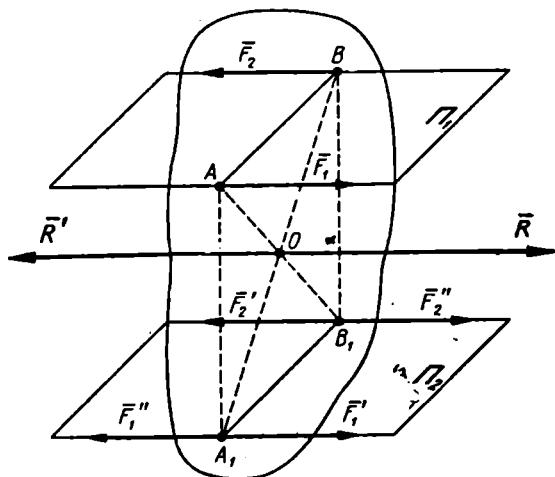
Консидерынд ка пункт  $O$  пунктеле  $A$  ши  $B$ , конформ формулей (16) авем:

$$\overline{M}_A(\vec{F}_2) = \overline{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{M}, \quad (17)$$

адикэ, векторул момент ал унуй куплу де форце есте егал ку векторул момент ал унея дин форцеле куплулуй ын рапорт ку пунктул де апликация ал челейлалте форце а куплулуй.

Ачастэ теоремэ аре о маре импортанцэ ла резолваря проблемелор, ын каре есте нечесар сэ калкулэм сума моментелор форцелор куплулуй ын рапорт ку ун пункт оарекаре. Пентру ачаста есте суфичиент сэ луэм моментул куплулуй, чея че есте адевэрат пентру орьче пункт.

Акциуня унуй куплу де форце асупра унуй корп солид ну се скимбэ ла депласаря ачестуй куплу ынтр'ун план паралел (фиг. 71).



Фиг. 71.

Пентру демонстрация ачестей теореме ла куплул де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  ын пунктеле  $A_1$  ши  $B_1$ , унде перпендикуляреле, кобырте дин пунктеле  $A$  ши  $B$  але планулуй  $\Pi_1$ , се интерсектязэ ку планул  $\Pi_2$ , паралел ку ел, апликэм доуэ системе де форце  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_1)$  ши  $(\bar{F}'_2, \bar{F}'_2)$ , фиекаре дин еле фиинд екиваленте ку зеро, адикэ

$$\bar{F}'_1 = -\bar{F}_1; \bar{F}'_2 = -\bar{F}_2.$$

Алэжем форцеле  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$  астфел, ынкыт еле сэ сатисфакэ кондицииле

$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1; \bar{F}'_2 = \bar{F}_2.$$

Компунем доуэ форце  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$ , каре сынт егалэ ши паралеле. Резултанта лор  $\bar{R}$  есте паралелэ ку ачесте форце, егалэ ку сума лор ши есте апликатэ ла мижлокул сегментулуй  $AB_1$  ын пунктул  $O$ , деорече се компун доуэ форце егалэ ши паралеле. Резултанта  $\bar{R}'$  а форцелор егалэ ши паралеле  $\bar{F}_2$  ши  $\bar{F}_1$  де асемения есте егалэ ку сума лор, паралелэ ку еле ши есте апликатэ ын мижлокул сегментулуй  $BA_1$ , адикэ ын пунктул  $O$ , унде се интерсектязэ диагонале дрептунгулуй  $ABA_1B_1$ .

Деоарече  $\bar{R} = -\bar{R}'$ , системул де форце  $(\bar{R}, \bar{R}')$  есте екивалент ку zero ши поате фи неглижат.

Астфел, куплвл де форце  $(F_1, F_2)$  есте екивалент ку ун куплу идентик  $(F_1, F_2)$ , ынсэ ситуат ын алт план паралел. *Прин урмаре, ун куплу де форце се поате депласа динтр'ун плин ын алт план пѳрлел ку ачеста фѳрэ а скимба акциуня луй асупра корпулуй солид.*

#### Екиваленца куплурилор де форце

Сэ формулэм кондицииле де екиваленца а доуэ куплурь де форце, фолосинд чя май ѳенералэ карактеристикэ а куплулуй де форце — векторул момент.

Се штие, кэ ун куплу де форце се поате роти ши депласа ын планул сэу де акциуне ын орьче фел; де ла ачаста, акциуня куплулуй де форце асупра корпулуй солид ну се скимбэ, дакэ моментул алѳебрик ал куплулуй рэмыне ачелаш. Прин урмаре, векторул момент ал унуй куплу де форце се поате трансла паралел ку сине ын орьче пункт ал корпулуй солид, ситуат ын планул де акциуне ал куплулуй де форце. Пе лынгэ ачаста куплул де форце се поате депласа ынтр'ун план паралел ши деачея векторул момент ал куплулуй се поате депласа паралел ку сине ын орьче пункт ал корпулуй, фѳрэ а скимба акциуня куплулуй асупра корпулуй солид. *Деачея векторул момент ал унуй куплу де форце, че акционязэ асупра унуй корп солид, есте ун вектор либер, адикэ ел се карактеризязэ нумай прин валoare нумерикэ, дирекције ши сенс, яр ка пункт де апликације поате серви орьче пункт ал корпулуй, прин урмаре, векторул момент ал куплулуй де форце ну требуе апликацат нумайдекыт ын мижлокул сегментулуй, каре унеште пунктеле де апликације але форцелор куплулуй.*

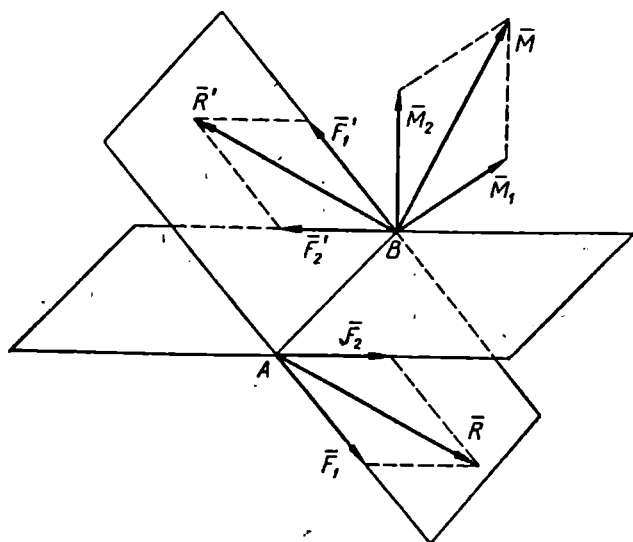
Сэ формулэм кондицииле де екиваленца а куплурилор де форце. *Доуэ куплурь де форце, каре акционязэ асупра унуя ши ачелуяш корп солид, сынт екиваленте, дакэ ау векторий момент егаль ка валoare ши де ачелаш сенс.*

#### Компунеря куплурилор де форце ын спациу

Се штие, кэ дакэ куплуриле де форце, че акционязэ асупра унуй корп солид, сынт ситуате ын ачелаш план, еле пот фи ынлокуите ку ун сингур куплу, авынд ун момент алѳебрик егал ку сума моментелор алѳебриче але куплурилор дате. Есте евидент, кэ тот аша се компун ши куплуриле де форце, ситуате ын плане паралеле, деоарече еле пот фи депласате ын ачелаш план.

Сэ консидерэм казул, кынд куплуриле де форце ну се гэсѳс ын ачелаш план сау ын плане паралеле, ши деч, се афлэ ын

плане каре се интерсектязэ. Вом демонстра, кэ доуэ куплурь де форце, каре акционязэ асупра унуя ши ачелуяш корп ши се афлэ ын плане че се интерсектязэ, пот фи ынлокуите ку ун сингур куплу де форце еквивалент, векторул момент ал кэруя есте егал ку сума векторилор момент ай куплурилор дате.



Фиг. 72.

Фие кэ авем доуэ куплурь де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1')$  ши  $(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$  (фиг. 72) ситуате ын плане, каре се интерсектязэ. Ачесте куплурь де форце се пот кэпэта дин куплуриле де форце, ситуате арбитрар ын плане че се интерсектязэ, прип трнслацие, ротирия ын планул де акциуне, ши вариация симултанэ а брацелор де пыргие ши а форцелор куплурилор. Компунем форцеле ын пунктеле А ши В дупэ регула паралелограмулуй. Дупэ компунере кэпэтэм доуэ форце  $\bar{R}$  ши  $\bar{R}'$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \\ \bar{R}' &= \bar{F}_1' + \bar{F}_2'. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Форцеле  $\bar{R}$  ши  $\bar{R}'$  алкэтуеск ун куплу де форце, деоарече еле сынт апликате ын пункте дйфэритэ ши  $\bar{R} = -\bar{R}'$ , ка резултанте а форцелор компоненте егале, ынсэ де сенсурь контраре але куплурилор.

Астфел, аз компунере а доуэ куплурь де форце, ситуате ын плане, кйре се интерсектязэ, се капэпэ ун куплу еквивалент де форце. Сэ нотэм векторул момент ал куплулуй

де форце  $(\vec{R}, \vec{R}')$  прин  $\vec{M}$ , атунч ын база формулелор (15) ши (18) обцинем

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{R} = \vec{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{BA} \times \vec{F}_1 + \vec{BA} \times \vec{F}_2.$$

Луынд ын консидарации, кэ

$$\vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1; \quad \vec{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2,$$

унде  $\vec{M}_1$  ши  $\vec{M}_2$  сынт векторий момент ай куплурило де форце дате  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$  ши  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ , авем

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2, \quad (19)$$

адикэ векторул момент ал унуй куплу екивалент де форце есте егал ку сума векторилор момент ай куплурило де форце дате. Деч, пентру а компуне доуэ куплурь де форце, ситуате ын плане, каре се интерсектязэ, требуе сэ компунем векторий момент ай лор дупэ регула паралелограмулуй ынтр'ун оарекаре пункт ал корпулуй, де екземплу, ын пунктул  $B$ , аша кум се веде ын фигура 72. Компунеря куплурило де форце, ситуате ынтр'ун сингур план сау ын плане паралеле, есте ун каз партикулар де компунере а куплурило ын планеле каре се интерсектязэ, фииндкэ ын ачест каз векторий момент сынт паралель, ши деч, компунеря векториалэ ва трече ын компунере алжебрикэ.

Апликынд сукчесив регула паралелограмулуй ла фиекаре дин чей дой векторь момент ай куплурило де форце, се поате ынлокуи орьче нумэр де куплурь де форце ын каз женерал принтр'ун сингур куплу, векторул момент ал кэруя  $\vec{M}$  есте егал ку сума векторилор момент ай куплурило дате, адикэ

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (20)$$

Дакэ фачем ачаствэ, компунере график, май алес кынд векторий момент ай куплурило де форце се гэсеск ын ачелаш план, атунч векторул момент ал куплулуй екивалент се репрезинтэ прин латура, каре ынкиде полигонул векториал, конструит дин векторий момент ай куплурило де форце дате.

*Екземплу.* Сэ се афле валоаря векторулуй момент ал унуй куплу екивалент, каре се обцине ла компунеря а доуэ куплурь де форце ку моментеле  $M_1 = 40$  нм ши  $M_2 = 30$  нм, каре акциязэ асупра унуя ши ачелуяш корп солид. Куплуриле де форце сынт ситуате ын плане каре се интерсектязэ, унгюл диедру динтре еле фиинд егал ку  $60^\circ$ .

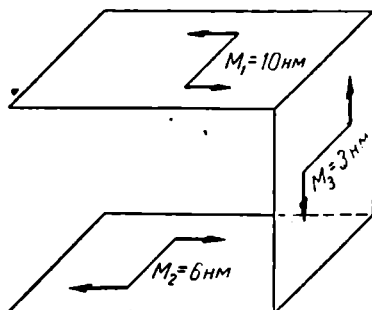
Резолваре. Компунынд дупэ регула паралелограмулуй

векторий момент ай куплурилор де форце дате пентру валоаря векторулуй момент ал куплулуй екивалент  $\bar{M}$ , авем

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \cos(\bar{M}_1, \bar{M}_2)} = \\ = \sqrt{1600 + 900 + 2 \cdot 1200 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3700} \approx 61 \text{ нм},$$

деоарече валоаря унгулуй динтре  $\bar{M}_1$  ши  $\bar{M}_2$  есте егалэ ку валоаря унгулуй диедру динтре планеле де акциуне але куплурилор де форце.

*Екземплу.* Куплуриле де форце  $M_1=10$  нм ши  $M_2=6$  нм ау дирекций контраре де ротацие ши се гэсеск ын плане паралеле. Куплул  $M_3=3$  нм се афлэ ынтр'ун план перпендикулар (фиг. 73). Сэ се детермине моментул куплулуй де форце екивалент.



Фиг. 73.

**Резолваре.** Компунем ал жебрик май ынтый куплуриле де форце, ситуате ын плане паралеле. Кэпэтэм куплул де форце ку моментул  $M_{12} = M_1 - M_2 = 10 - 6 = 4$  нм, деоарече куплуриле де форце ау семне опусе. Компунем векториал куплул де форце, авынд моментул  $\bar{M}_{12}$  ку куплул де форце, че аре моментул  $\bar{M}_3$ . Деоарече унгул динтре  $\bar{M}_{12}$  ши  $\bar{M}_3$  есте дрепт, моментул куплулуй екивалент

$$M = \sqrt{M_{12}^2 + M_3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ нм}.$$

#### Кондицииле де екилибру але куплурилор де форце ын спациу

Дакэ асупра унуй корп солид акцияызэ ниште куплурь де форце, ситуате арбитрар ын спациу, ачесте куплурь се пот ынлокуи ку ун сингур куплу де форце екивалент, векторул момент ал кэруя есте егал ку сума векторилор момент ай куплурилор де форце дате, адикэ

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i,$$

каре репрезинтэ жеометрик ун вектор, че ынкиде полигонул векториал, конструит пе векторий момент ай куплурилор де форце дате. Пентру ка куплуриле де форце, каре акцияызэ асупра унуй

корп солид сз се афле ын екилибру, есте нечесар ши суфичиент, ка валoаря векторулуй момент ал куплулуй де форце еквивалент сз фие егалз ку zero сау ка полигонул векториал, конструит пе векторий момент ай куплурилор дате, сз фие ынкис.

Аша дар  $M=0$ . Де аич урмязз, кз

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \\ M_y &= \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \\ M_z &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Астфел, пентру ка куплуриле де форце, апликате унуй корп солид, сз се афле ын екилибру, есте нечесар ши суфичиент, ка сума алгебрикз а проекциилор векторилор момент ай куплурилор де форце пе фиекаре дин челе трей аксе де координате сз фие егалз ку zero.

Ын казул женерал куплуриле де форце пот фи екилибрате нумай ку ун куплу ши ну пот фи екилибрате ку о форцз сау ку ун оарекаре алт сїстем де форце, че ну формязз ун куплу де форце.



## РЕДУЧЕРЯ СИСТЕМЕЛОР ДЕ ФОРЦЕ ЫН СПАЦИУ ЛА СИСТЕМЕ МАЙ СИМПЛЕ

## § 1. РЕДУЧЕРЯ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ ФОРЦЕ ЛА О ФОРЦЭ ШИ ЛА УН КУПЛУ ДЕ ФОРЦЕ

Лема деспре депласаря паралелэ а уней форце ын спациу,Теорема де базэ а статичий

Орьче форцэ арбитрарэ, апликацэ унуй корп ынтр'ун пункт  $A$  ал луй, поате фи депласатэ фэрэ а скимба акциуня ей асу-пра корпулуй, ын орьче алт пункт  $O$  ал корпулуй, апликынд корпулуй ун куплу де форце ануит; ын ачест каз векторул момент ал куплулуй адзугат есте егал ку моментул форцей  $\vec{F}$ , аликате ын пунктул  $A$  ын рапорт ку пунктул  $O$ , унде еа се депласязэ.

Адмитем кэ унуй корп и се аликэ ын пунктул  $A$  форца  $\vec{F}$ . Ын орьче алт пункт  $O$  ал корпулуй аликэм ун систем де форце  $(\vec{F}', -\vec{F}')$ , еквалент ку zero, унде  $\vec{F}' = \vec{F}$ . Системул дин трей форце  $(\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}')$ , аликат корпулуй солид, есте еквалент ку о сингврэ форцэ  $F$ , каре акционязэ асугра корпулуй:  $\vec{F} \propto (\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}')$ . Дар есте евидент, кэ ачесте трей форце се дескомпун ын форца  $\vec{F}$  ши куплул де форце  $(\vec{F}, -\vec{F}')$  (фиг. 74).

Куплул де форце се карактеризязэ прин векторул момент. Дар векторул момент ал куплулуй де форце есте егал ку векторул момент ал унея дин форце, де екземплу ал форцей  $F$ , ын рапорт ку пунктул де апликацие  $O$  ал алтей форце. Ачест куплу де форце поате фи депласат ын корп ши ынлокунт ку ун алт куплу еквалент авынд ачелаш вектор момент. Астфел,

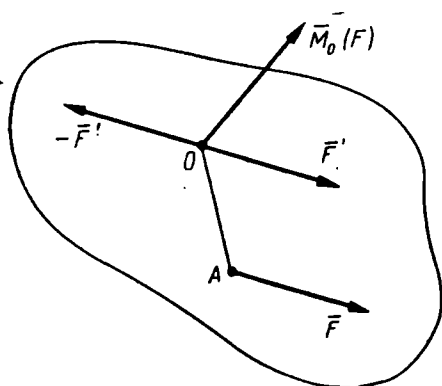
$$\vec{F} \propto (\vec{F}, (\vec{F}, -\vec{F}')),$$

унде

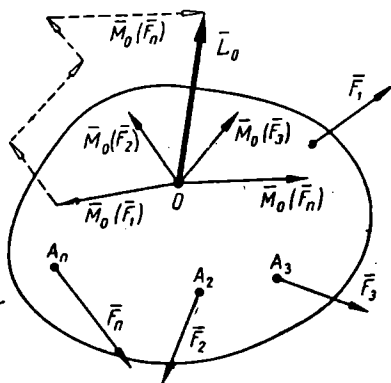
$$\vec{F}' = \vec{F} \text{ ши } \vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}') = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

**Теоремэ:** Ун систем де форце, аликат унуй корп солид, поате фи редус ла о форцэ ши ла ун куплу де форце, адикэ ла астфел де трей форце, уна динтре каре есте егалэ жеометрик ку векторул принципал ал системулуй де форце ши поате фи апликацэ ынтр'ун пункт алес арбитрар — чентрул де редучере; челелалте доуэ форце алкэтуеск ун куплу де форце, векторул момент ал кэруя есте егал ку сума жеометрике а векторилор момент ын рапорт ку чентрул де редучере алес ал тутурор форцелор системулуй.

Векторул, егал ку сума жеометрике а моменталор тутурор форцелор системулуй ын рапорт ку ун оарекаре пункт, се ну-  
 мште *моментул принципал* ал системулуй де форце ын ра-  
 порт ку ачест пункт ши-л нотэм при  $\bar{L}_0$ . При урмаре,  $\bar{L}_0 =$   
 $= \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_i)$ . Моментул принципал ал системулуй де форце  
 есте векторул, каре ынкиде линия фрынтэ, форматэ ла компу-  
 неря векторилор момент ай тутурор форцелор системулуй апли-  
 кат ын пунктеле дате ын рапорт ку центрл де редучере алес  
 (фиг. 75). Пентру демонстрая теоремей деспре редучеря унуй  
 систем де форце ла форцэ ши ла ун куплу де форце апликэм ле-  
 ма деспре депласаря уней форце ын орьче пункт ал корпулуй.



Фиг. 74.



Фиг. 75.

Пентру фиекаре форцэ  $\bar{F}_i$  а системулуй се поате кэпэта о  
 релацие, каре експримэ екиваленца динтре ачастэ форцэ ши  
 челе трей форце — о форцэ ши ун куплу:  $\bar{F}_i \sim \{\bar{F}_i', (\bar{F}_i, -\bar{F}_i')\}$ .  
 Тот системул инициал дин  $n$  форце есте екивалент ку ун сис-  
 тем дин  $3n$  форце, чея че поате фи репрезентат ын форма ре-  
 лацийей:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n) \sim \{(\bar{F}_1', \bar{F}_2', \dots, \bar{F}_n'), (\bar{F}_1, -\bar{F}_1'), (\bar{F}_2, -\bar{F}_2'), \dots, (\bar{F}_n, -\bar{F}_n')\}.$$

Системул дин  $3n$  форце се дескомпуне ын доуэ системе  
 симпле: ун систем констэ дин  $n$  форце  $\bar{F}_i'$  апликате корпулуй  
 ынтр'ун пункт ал луй — ын центрл де редучере алес  $O$ ; при  
 урмаре, конформ теоремей деспре редучеря форцелор конку-  
 ренте ачест систем де форце се поате ынлокуи ку о сингурэ  
 форцэ резултантэ екивалентэ системулуй, апликатэ ын ачелаш  
 пункт ши егалэ жеометрик ку векторул резултант.

Деч,

$$(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}'_3, \dots, \bar{F}'_n) \in \bar{R},$$

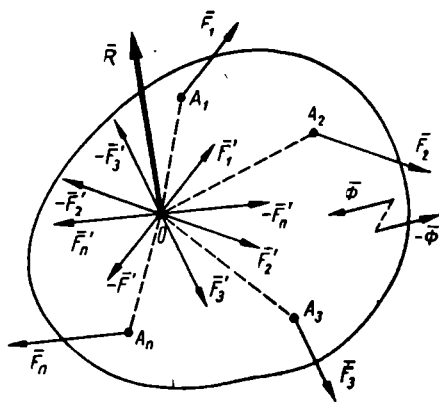
унде

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}'_i.$$

Ынсэ, деоарече  $\bar{F}'_i = \bar{F}_i$  пентру тоате валориле луй  $i$  ачест вектор есте векторул резултант ши ал системулуй де форце дат  $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ . Векторул  $\bar{R}$  не репрезентэ о форце резултантэ нумай пентру системул де форце  $\bar{F}'_i$  апликат ын пунктул  $O$ , ынсэ ну пентру системул де форце дат, каре акциязы асупра корпулуй ын пунктул  $A_i$ .

Алте  $2n$  форце дин системул  $3n$  де форце формязэ ун систем де  $n$  куплурь де форце  $(\bar{F}_i, -\bar{F}'_i)$ . Дупэ теорема компунерий куплурило де форце ын спациу ачест систем де куплурь се поате редуче ла ун сингур куплу. Вом нота форцеле ачестуй куплу [прин  $\bar{\Phi}$  ши  $-\bar{\Phi}$ , прин урмаре

$$\{(\bar{F}_1, -\bar{F}'_1), (\bar{F}_2, -\bar{F}'_2), (\bar{F}_3, -\bar{F}'_3) \dots (\bar{F}_n, -\bar{F}'_n)\} \in (\bar{\Phi}, -\bar{\Phi}).$$



Фиг. 76.

Ын фигура 76 есте репрезентат прочедеул де редучере а унуй систем де форце ла о форце  $\bar{R}$  ши ла ун куплу  $(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi})$ . Ынсэ конформ теоремей деспре компунеря куплурило, векторул момент ал ачестуй куплу резултант есте егал ку сума жеометрике а векторилор момент ай тутутор куплурило:

$$\bar{M}(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^n \bar{M}(\bar{F}_i, -\bar{F}'_i).$$

Моментул фиекэруй куплу есте егал ку моментул унея дин форцеле куплулуй ын рапорт ку пунктул де апликацие ал чейлалте форце, адикэ

$$\bar{M}(\bar{F}_1, -\bar{F}_1) = \bar{M}_O(\bar{F}_1).$$

Прин урмаре,

$$\bar{M}(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) \text{ сая } \bar{M}(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi}) = \bar{L}_O,$$

унде  $\bar{L}_O$  есте моментул принчипал ал системулуй де форце ын рапорт ку чентрул де редучере алес  $O$ .

Астфел, теорема фундаменталэ деспрэ редучеря унуй систем де форце ла трей форце — о форцэ ши ун куплу де форце есте демонстратэ:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \propto \{\bar{R}, (\bar{\Phi}, -\bar{\Phi})\},$$

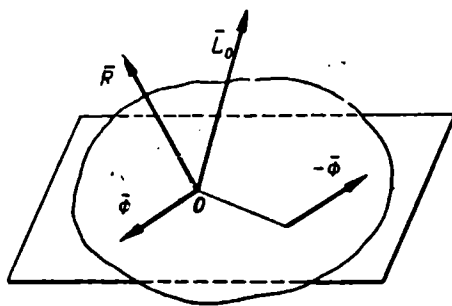
унде

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \text{ яр } \bar{M}(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi}) = \bar{L}_O.$$

Ачастэ теоремэ се поате репрезента ши ынтр'о формэ май симплэ:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \propto (\bar{R}, \bar{L}_O),$$

адикэ фиекаре систем де форце се поате редуче ла ун вектор принчипал ши ун момент принчипал ын рапорт ку ун чентру



Фиг. 77.

алес *арбитра*. Ынсэ требуе сэ авем ын ведере, кэ ачастэ формуларе есте конвенционалэ; моментул принчипал карактеризязэ акциуня унуй оарекаре куплу де форце (фиг. 77).

## § 2. КОНДИЦИИЛЕ ДЕ ЕКИЛИБРУ АЛЕ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ ФОРЦЕ ЫН СПАЦИУ

### Кондицииле де екилибру але унуй систем де форце ын формэ векториалэ

Дин теорема деспре редучеря унуй систем де форце ла о фоґцэ ши ун куплу де форце се пот дедуче кондицииле де екилибру але системулуй де форце, апликат унуй корп. Есте евидент, кэ дакэ системул де форце се гэсеште ын екилибру, атунч се ва афла ын екилибру ши системул еквивалент ку ел дин трей форце, каре констэ динтр'о форцэ ши ун куплу де форце. Ынсэ пентру ка ун астфел де систем де форце сэ фие еквивалент ку zero, есте нечесар ши суфициент сэ се ындеплиняскэ урмэтогреле кондиций: фоґца  $\bar{R}$  требуе сэ фие егалэ ку zero, яр куплул  $(\bar{\Phi}, -\bar{\Phi})$  сэ айбэ ун момент, егал ку zero. Се обцин урмэтоареле кондиций де екилибру але унуй систем де форце арбитраге ын спациу ын форма векториалэ: *пентру ка ун систем де форце апликат унуй корп солид сэ се афле ын екилибру, есте нечесар ши суфициент ка векторул принципал ал системулуй де форце сэ фие егал ку zero ши моментул принципал ал системулуй де форце ын рапорт ку орьче центру де редучере сэ фие де асеменя егал ку zero.* Ку алте кувинте, пентру ка  $(F_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \propto 0$  сынт нечесаре ши суфициенте кондицииле

$$\bar{R} = 0, \bar{L}_O = 0. \quad (1)$$

### Кондицииле аналитиче де екилибру але унуй систем де форце ын спациу

Пентру дедучеря ачестор релаций вом фаче ун астфел де рационамент: дакэ векторул  $\bar{R}$  есте егал ку zero, проекц я луй пе орьче аксэ де асеменя есте егалэ ку zero. Ачаста есте карактеристик ши пентру моментул принципал. Ынсэ фиекаре проекция а моментулуй принципал пе о аксэ оарекаре рэпрезинтэ о сумэ а моментелор тутурор фоґцелор системулуй инициал ын рапорт ку ачастэ аксэ.

Астфел, доуэ кондиций де екилибру ын формэ векториалэ сынт еквиваленте ку урмэтоаре шасе кондиций аналитиче:

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0, L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0. \quad (2)$$

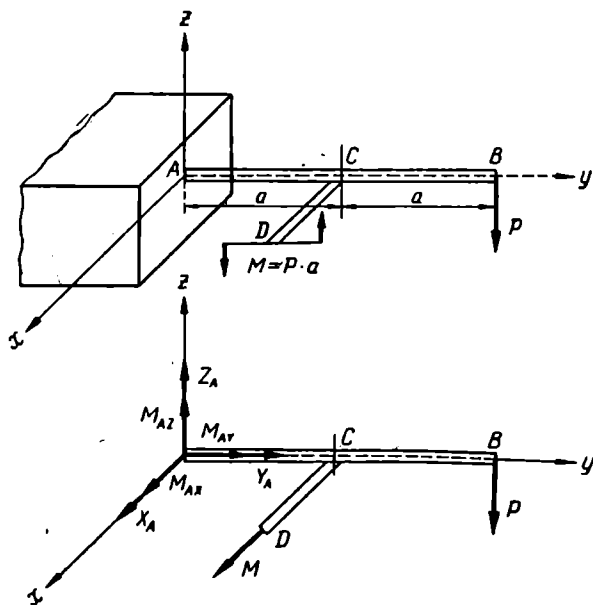
Ынсэ деоарече

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \text{ яр } \bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i),$$

ацесте шасе кондиций де екилибру се вор експрима ын фелул урмэтор:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) &= 0, & \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) &= 0, & \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Кондицииле (3) пот фи формулате ын фелул урмэтор: *пентру ка ун систем арбитрар де форце, апликат унуй корп солид сэ се афле ын екилибру есте нечесар ши суфициент ка трей суме але проекцилор тутурор форцелор не акселе де координате ректангуларе сэ фие егале ку zero-ши трей суме але моментелор тутурор форцелор ын рапорт ку трей аксе де координате де асеменя сэ фие егале ку zero.*



Фиг. 78.

*Екземплу.* Ла гринда  $AB$ , ун капэт ал кэрея есте ынкастрат ын секциуня  $A$ , есте апликатэ ын пунктул  $B$  о форцэ вертикалэ  $P$  (фиг. 78). Ын секция  $C$  есте фиксатэ рижид суб ун унгь дрепт гринда  $CD$ . Ын секциуня капэтулуй гринзий  $CD$  ын планул, паралел ку планул де координате  $Ayz$  акционязэ ун куплу де форце моментул кэруя есте  $M = Pa$ . Дименсиуниле ши дирекция де ротацие а куплулуй де форце сынт индикате ын фигура 78. Сэ се детермине форца ши моментул куплулуй де форце ын ынкастраре.

Резолваре. Елиберэм де легэтурь гринзиле консидерате ымпреунэ  $AB$  ши  $CD$ . Ынкастаря пентру казул системулуй де форце ын спациу дэ наштере уней форце  $\bar{R}_A$  ши унуй куплу де форце ку векторул момент  $\bar{M}_A$ , каре сынт некуноските атыт дупэ валoare, кыт ши дупэ сенс.

Дескомпунынд ачастэ форцэ ши ачест куплу ын компоненте дупэ семиакселе позитиве але акселор де координате (фиг. 78) ын каз жёнерал вом кэпэта шасе некуноските  $X_A, Y_A, Z_A$  пентру форца  $\bar{R}_A$  ши  $M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  — пентру моментул куплулуй  $\bar{M}_A$ . Пентру а детермина ачесте некуноските компунем шасе екуаций де екилибру.

Ла проектаря форцелор пе акселе де координате ну есте невое сэ луэм ын консидерации куплуриле де форце, деоарече сума проекцилор форцелор куплулуй пе орьче аксэ есте егалэ ку зеро. Ын екуация де екилибру пентру моментеле форцелор ын рапорт ку акселе де координате требуе сэ ынтродучем проекцииле векторилор момент ай куплурилор де форце пе ачесте аксе. Пентру комодитатя проектэрий куплул де форце ын секциуня капэтулуй гринзий  $CD$  ыл репрезентэм прин векторул момент  $\bar{M}$ , каре ын казул дат аре дирекция гринзий  $CD$  паралел ку акса  $Ax$ .

Алкэтуинд кондицииле де екилибру, обцинем:

$$X_A = 0; \quad M_{Ax} - P \cdot 2a + M = 0;$$

$$Y_A = 0; \quad M_{Ay} = 0;$$

$$Z_A - P = 0; \quad M_{Az} = 0.$$

Авынд ын ведере, кэ  $M = Pa$  дин ачесте екуаций авем

$$X_A = 0; \quad Y_A = 0; \quad Z_A = P;$$

$$M_{Ax} = Pa; \quad M_{Ay} = 0; \quad M_{Az} = 0.$$

Проблема се консидерэ резолватэ, дакэ сынт детерминате проекцииле форцелор некуноските  $\bar{R}_A$  ши але моментулуй куплулуй  $\bar{M}_A$  пе оарекаре аксе де координате ректангуларе.

**Релацииле динтре моментеле принципале але унуй систем де форце ын рапорт ку доуэ чентре де редучере диферите**

Адмitem, кэ ла редучеря форцелор ынтр'ун чентру  $O$  ам кэпэтит векторий  $\bar{R}$  ши  $\bar{L}_O$ , яр ка резултат ал редучерий ын чентрул  $O_i$  авем  $\bar{R}'$  ши  $\bar{L}_O$ , (фиг. 79). Дар векторул принципал пентру орьче чентру де редучере есте егал ку сума жёометрикэ а форцелор системулуй дат, деч,  $\bar{R}' = \bar{R}$ . Ынсэ моментеле принципале вор фи диферите.

Гэсим экспрессиале моментелор принципале ын рапорт ку доуэ центре ши ле компарэм. Нотэм разеле вектоаре але пунктелор де апликация а форцелор системулуй дат ын рапорт ку ачесте центре респектив прин  $\bar{r}_i$  ши  $\bar{r}'_i$ . Азем

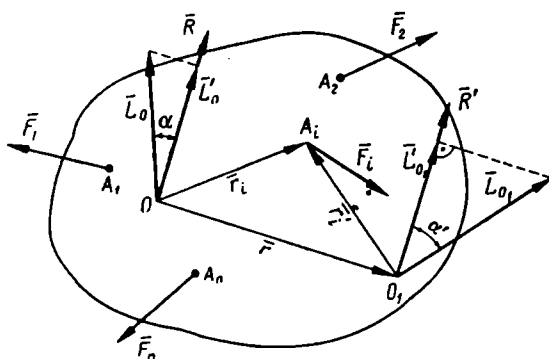
$$\bar{L}_o = \sum_{i=1}^n \bar{M}_o(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{F}_i),$$

ынсэ

$$\bar{r}_i = \bar{r} + \bar{r}'_i,$$

деачея

$$\bar{L}_o = \sum_{i=1}^n [(\bar{r} + \bar{r}'_i) \times \bar{F}_i] = \sum_{i=1}^n (\bar{r} \times \bar{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{r}'_i \times \bar{F}_i).$$



Фиг. 79.

Ла сумаря дупэ  $n$  пункте раза вектоаре  $\bar{r}$ , каре унеште центреле де редучере, се поате скоате ын афара семнулуй сумей. Атунч

$$\bar{L}_o = \bar{r} \times \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n (\bar{r}'_i \times \bar{F}_i).$$

Ынсэ

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}, \quad \sum_{i=1}^n (\bar{r}'_i \times \bar{F}_i) = \bar{L}_{o_1},$$

деачея

$$\bar{L}_o = (\bar{r} \times \bar{R}) + \bar{L}_{o_1},$$

де унде

$$\bar{L}_{o_1} = \bar{L}_o - (\bar{r} \times \bar{R}). \quad (4)$$

Астфел, моментул принципал ал унуй систем де форце ын рапорт ку ал дойля центру де редучере есте егал ку дифференца жеометрике динтре моментул принципал ын рапорт ку центрл ынтый ши моментул векторулуй принципал, апликат ын центрл ал дойля де редучере, ын рапорт ку примул.



### § 3. ИНВАРИАНЦИЙ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ ФОРЦЕ

Се нумеште инвариант ал унуу систем де форце ын рапорт ку скимбаря чентрулуй де редучере мэримя (векториалэ сау скаларэ), каре ну се скимбэ ла тречерея де ла ун чентру де редучере ла алтул, адикэ мэримя, каре аре уна ши ачеш валоаре ын орьче чентру де редучере.

*Примул инвариант. Векторул принципал ал унуу систем де форце ну депинде де чентрул де редучере.*

Ынтр'адевэр, пентру чентрул  $O$  авем

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

ши пентру чентрул  $O_1$  де асемени

$$\bar{R}' = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Деч,  $\bar{R} = \bar{R}'$ . Проекцииле лор пе орьче аксе де координате де асемени вор фи егале ынтре еле.

*Инвариантул ал дойля. Продусул скалар динтре векторул принципал ши моментул принципал ал унуу систем де форце пентру орьче чентру де редучере есте о мэриме константэ.*

Пентру демонстрация фолосим егалитатя (4) ши алкэтуим продусул скалар ал фиекэрей пэрць а егалитэций прин векторул принципал. Обцинем

$$\bar{L}_{O_1} \cdot \bar{R}' = \bar{L}_O \cdot \bar{R} - (\bar{r} \times \bar{R}) \cdot \bar{R}.$$

Ынсэ продусул микст, ын каре фигурызэ дой векторь колинарь (ориентаць дупэ дрепте паралеле), есте ынтотдыуна егал ку zero, деоарече ын ачест каз продусул векториал динтре дой векторь репрезентэ ун вектор нуу, перпендикулар пе ей, адикэ

$$(\bar{r} \times \bar{R}) \cdot \bar{R} = |\bar{r} \times \bar{R}| \cdot |\bar{R}| \cdot \cos 90^\circ \equiv 0.$$

Авынд ын ведере челе спусе май сус, кэпэтэм

$$\bar{L}_{O_1} \cdot \bar{R}' = \bar{L}_O \cdot \bar{R}$$

сау

$$L_{O_1x}R'_x + L_{O_1y}R'_y + L_{O_1z}R'_z = L_{Ox}R_x + L_{Oy}R_y + L_{Oz}R_z.$$

Ал дойля инвариант се поате формула ши ын алтэ формэ: проекция моментулуй принципал пе дирекция векторулуй принципал пентру орьче чентру де редучере есте уна ши ачеш мэриме. Ынтр'адевэр

$$\bar{L}_{O_1} \bar{R}' = |\bar{L}_{O_1}| \cdot |\bar{R}'| \cdot \cos \alpha'; \quad |\bar{L}_O| \cdot |\bar{R}| \cdot \cos \alpha = \bar{L}_O \bar{R}.$$

Ынсэ, деоарече  $|\bar{R}'| = |\bar{R}|$ ,

$$|\bar{L}_O| \cdot \cos \alpha' = |\bar{L}_O| \cdot \cos \alpha.$$

Нотэм прин  $\bar{L}'_O$  проекция моментулуй принципал пе дирекция векторулуй принципал. Атунч

$$\bar{L}'_O = \bar{L}_O.$$

#### § 4. КАЗУРЬ ПАРТИКУЛАРЕ ДЕ РЕДУЧЕРЕ А СИСТЕМЕЛОР ДЕ ФОРЦЕ ЫН СПАЦИУ ЛА СИСТЕМЕ МАЙ СИМПЛЕ

Конформ теоремей де базэ а статичий ун систем дат де форце поате фи редус ла о форцэ ши ун куплу де форце. Казуриле партикуларе посибиле де симплификаре ултериорэ а унуй систем де форце дат се пот ымпэрци ын доуэ класе де базэ, ын функции де инвариантул ал дойля ал системулуй де форце.

Ла класа ынтыя се реферэ системеле де форце, пентру каре инвариантул ал дойля есте диферит де zero; ла класа а доуа—системеле де форце, авынд инвариантул ал дойля егал ку zero. Класа а доуа а системелор де форце се май ымпарте ын казурь партикуларе ын функции де валоаря пе каре о ау факторий, каре фигурызэ ын експресия инвариантулуй ал дойля. Инвариантул ал дойля ал системулуй де форце репрезентэ, дупэ кум штим, ун продус скалар динтре векторул принципал  $\bar{R}$  ал системулуй де форце ши моментул луй принципал  $\bar{L}_O$  ын рапорт ку центрул де редучере алес:

$$\bar{L}_O \cdot \bar{R} = |\bar{L}_O| \cdot |\bar{R}| \cdot \cos \alpha = L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z.$$

Дрепт орижине а акселор де координате ын каре вом проекта моментул ши векторул принципал, вом консидера центрул де редучере  $O$ , алес май ынаинте. Сынт посибиле доуэ казурь, каре ое ексклуд речипрок: продусул скалар есте диферит де zero пентру центрул де редучере дат, ши деч, аре ачеяш валоаре диферитэ де zero, ши ын орьче алт центру де редучере; продусул скалар есте егал ку zero ын центрул дат де редучере, прин умаре, ши ын тоате челелалте центре де редучере.

Сэ консидерэм казул ынтый, кынд инвариантул ал дойля есте диферит де zero:

$$\bar{L}_O \bar{R} \neq 0,$$

адикэ

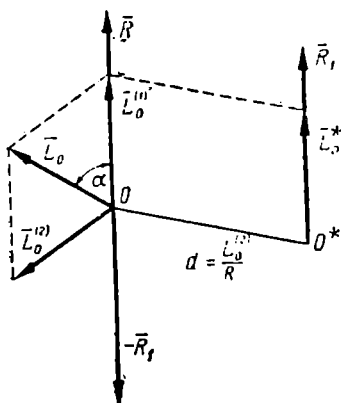
$$|\bar{L}_O| \cdot |\bar{R}| \cdot \cos \alpha \neq 0.$$

Ачаста поате авя лок нумай ын казул, кынд нич унул дин чей дой векторь — нич векторул принципал  $\bar{R}$ , нич моментул принципал  $\bar{L}_O$  ну сынт егаль ку zero ши унгул динтре дирекцииле лор есте диферит де  $90^\circ$  (фиг. 80).

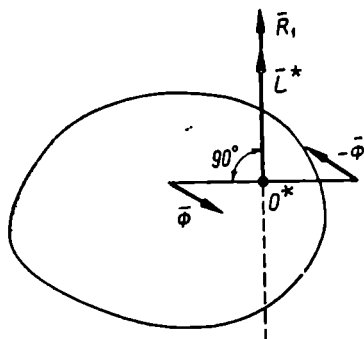
Сэ дескомпунем моментул принципал  $\bar{L}_O$  ын доуэ моменте компоненте конформ теоремей деспре компунеря куплурилор ын спациу. Ын ачест каз ун момент компонент есте егал ку  $\bar{L}_O^{(1)}$  ши есте ориентат дупэ векторул принципал, яр ал дойля момент  $\bar{L}_O^{(2)}$  компонент есте перпендикулар пе векторул принципал (фиг. 80). Астфел,

$$\bar{L}_O = \bar{L}_O^{(1)} + \bar{L}_O^{(2)}.$$

Фиикаре дин ачесте моменте карактеризязэ ун куплу де форце респектив. Прин урмаре, ын лок де челе трей форце инициале асупра корпулуй акциязэ де акумуля чинч форце. Ын партикулар, моментул  $\bar{L}_O^{(2)}$  есте моментул куплулуй де форце, ситуат ын планул, перпендикулар пе  $\bar{L}_O^{(2)}$ ; ачест план трече прин векторул принципал.



Фиг. 80.



Фиг. 81.

Вом репрезента ачест куплу прин астфел де форце, модулле кэрора сынт егале ку модулул векторулуй принципал  $\bar{R}$  ши-л вом нота прин  $(\bar{R}_1; -\bar{R}_1)$ , унде  $\bar{R}_1 = \bar{R}$ , ынсэ атунч брацул де пыргие  $d$  а унуи астфел де куплу, моментул кэруа есте  $\bar{L}_O^{(2)}$  се детерминэ дин кондиция  $d = \frac{|\bar{L}_O^{(2)}|}{R}$ . Ын ачелаш тимп

сенсул векторулуй  $\bar{L}_O^{(2)}$  требуе сэ индиче, кум акциязэ куплул  $(\bar{R}_1, -\bar{R}_1)$  асупра корпулуй. Дупэ ачаста депласэм куплул  $(\bar{R}_1, -\bar{R}_1)$  ын планул сэу астфел, ынкыт форца  $-\bar{R}_1$  сэ фие апликатэ ын пунктул  $O$  ши ориентатэ дупэ ачешаш дряптэ ку векторул принципал  $\bar{R}$ , ынсэ ын сенс контрар. Ын казул дат, дупэ кум се веде дин фигура 80, векторул  $\bar{L}_O^{(2)}$  индикэ, кэ  $\bar{R}_1$  есте ситуатэ ла дряпта пунктулуй  $O$ . Атунч асупра корпулуй ын пунктул  $O$  вор акциона доуэ форце: уна дин еле есте егалэ

ку векторул принципал  $\bar{R}$ , яр алта  $(-\bar{R}_1)$  ку векторул  $-\bar{R}$ . Деоарече амбеле форце акциянээ асупра корпулуй дупэ ачеш дряптэ, еле се екилибрызэ речипрок. Прин урмаре, куплул  $(\bar{R}_1, -\bar{R}_1)$  ши векторул принципал  $\bar{R}$  се редук ла форца  $\bar{R}_1$ , каре акциянээ асупра корпулуй дупэ о линии дряптэ ла дис-  
танца  $d = \frac{L_0^{(2)}}{R}$  де ла центрул де редучере  $O$ . Астфел дин челе

чинч форце, каре акциянээ асупра корпулуй, ау рэмас нумай трей—форца  $\bar{R}_1$  ши куплул де форце, моментул кэруя есте егал ку векторул  $\bar{L}_0^{(1)}$ .

Депласэм моментул  $L_0^{(1)}$  ка пе ун вектор либер пе линия де акциуне а форцей  $\bar{R}_1$  ши сэ арэтэм кэ челе трей форце  $(\bar{R}_1, L_0^{(1)})$ , каре яу наштере ла редучеря ынтрегулуй систем де форце ын центрул  $O$ , се вор редуче ла трей форце, ынсэ репартизате ын корп астфел, кэ доуэ дин еле формязэ ун куплу ынтр'ун план, перпендикулар пе форца а трея. Асеменя трей форце формязэ ун *торсор* де редучере сау о динамэ. Деч, системул де форце инициал есте редус ла ун торсор  $(\bar{R}_1, \bar{L}^*)$ , унде  $\bar{L}^* = \bar{L}_0^{(1)}$  есте моментул принципал ал системулуй де форце ын рапорт ку центрул де редучере  $O^*$  (фиг. 81).

Дряпта ын корп, пе каре сынт ситуате векторул принципал ал системулуй де форце ши моментул принципал, каре алкэтуеск торсорул, се нумеште *акса торсорулуй* сау акса централэ а системулуй де форце.

Сэ алкэтуим екуацииле аксей централе ын системул де координате ку орижиня ын центрул де редучере алес  $O$ . Нотынд прин  $\bar{r}(x, y, z)$  векторул де позиции а пунктулуй  $O^*$ , ситуат пе акса централэ, кэпэтэм доуэ релаций:

$$\bar{L}^* = \bar{L}_0 - (\bar{r} \times \bar{R}) \text{ ши } \bar{L}^* = k\bar{R},$$

унде  $k$  есте ун коэффициент де пропорционалитате.

Экспримынд релацииле дате ын проекций ын системул де координате алес ши елиминынд  $k$ , обцинем екуация аксей централе:

$$\frac{L_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{L_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{L_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}.$$

Ын ачесте екуаций  $x, y, z$  сынт координате куренте але пунктелор аксей централе;  $L_x, L_y, L_z, R_x, R_y, R_z$ —валориле нумериче куноскуте але проекциилор векторулуй ши моментулуй принципал ай системулуй де форце ын рапорт ку центрул де редучере алес инициал  $O$ . Деоарече векторул  $\bar{R}_1$  есте ун вектор алунокэтор, яр  $\bar{L}^*$  ун вектор либер, ын калитате де центру  $O^*$  се поате луа орьче пункт де пе акса централэ.

Менционэм де асемня, кэ челе трей форце, каре алкэтуеск торсорул, пот фи редусе ла доуэ форце неконкуренте, адикэ ла форце, каре ну се афлэ ын ачелаш план. Депласэм ын ачест скоп куплул де форце астфел, ка уна дин форцеле куплулуй  $\vec{F}$  сэ фие апликатэ ын пунктул де апликацие ал векторулуй принципал  $\vec{R}_1$ . Компунем  $\vec{F}$  ку  $\vec{R}_1$  ши ле ынлокуим ку о сингурэ резултантэ  $\vec{F}^*$ , каре ымпреунэ ку о алтэ форцэ а куплулуй  $(-\vec{F})$  формязэ ун систем дин доуэ форце неконкуренте.

Сэ консидерэм ун алт каз посибил, кынд инвариантул ал дойля есте егал ку zero, адикэ  $\vec{L}_O \vec{R} = 0$  сау  $|\vec{L}_O| |\vec{R}| \cos \alpha = 0$ . Аич пот авя лок трей казурь. Адмитем, кэ  $\vec{R} \neq 0$  ши  $\vec{L}_O \neq 0$ , ынсэ  $\cos \alpha = 0$ , адикэ  $\alpha = 90^\circ$ . Ку алте кувинте, ын центрул де редучере инициал луат арбитрар векторул ши моментул принципал сынт дифериць де zero, ынсэ речипрок перпендикулярь. Атунч проекция моментулуй принципал пе дирекция векторулуй принципал ва фи егалэ ку zero:  $\vec{L}_O^{(1)} = 0$  (фиг. 82). Дакэ, ынсэ, вом луа ка центру де редучере орьче пункт, ситуат пе акса централэ, векторул  $\vec{L}^*$  егал ку  $\vec{L}_O^{(1)}$ , де асемня ва фи нул. Деч, ын торсорул алкэтуит дин трей форце рэмыне о сингурэ форцэ  $\vec{R}_1$ , каре акциязэ асупра корпулуй дупэ акса централэ а системулуй де форце. Дакэ, ынсэ, уна дин форце ва фи еквивалентэ ку ынтрегул систем де форце, ынсямнэ кэ ачастэ форцэ есте о форцэ резултантэ пентру системул де форце дат ши вом нота-о прин  $\vec{R}^*$ .

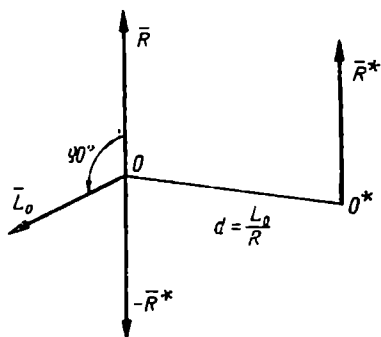
Астфел, дакэ моментул принципал ал системулуй есте перпендикуляр пе векторул принципал, ачест систем де форце се редуче ла о форцэ резултантэ. Ын специал, ачастэ афирмация есте карактеристикэ пентру системеле плане де форце, черчетате дин пункт де ведере ал статичий ын спациу.

Дакэ пентру орьче систем план де форце вом консидера дрепт центру де редучере орьче пункт дин планул форцелор, евидент, моментул принципал ва фи перпендикуляр пе векторул принципал. Дин ачастэ каузэ нич ун систем план де форце ну поате фи редус ла ун торсор. Системул де форце поате фи редус ла ун куплу де форце, дакэ  $\vec{R} = 0$  ши  $\vec{L}_O \neq 0$  ши, ын сфыршит, системул де форце се поате гэси ын екилибру: кынд  $\vec{R} = 0$ ,  $\vec{L}_O = 0$ . Тот одатэ, дакэ ын унул дин центреле де редучере  $\vec{R} = 0$  ши  $\vec{L}_O = 0$ , пе база инварианцилор системулуй ын орьче алт центру де редучере

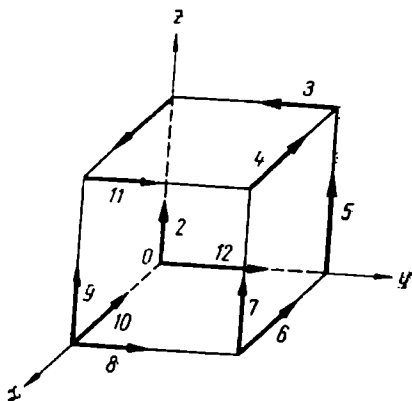
$$\vec{R}' = 0 \text{ ши } \vec{L}_O' = 0.$$

Сэ консидерэм ун екземплу де редучере а унуй систем де форце ла форма каноникэ. Дупэ мукииле унуй куб де лунжме

а акцияяз доуэспрезече форце егале ка модуль  $|\bar{F}_i| = P$  (фиг. 83). Редучем ачест систем ла форма каноникэ (адикэ ла ун торсор сау ла унул дин казуриле луй партикуларе). Дрепт примул чентру де редучере вом лауа вырфул кубулуй  $O$ .



Фиг. 82.



Фиг. 83.

Конструим системул де координате ку орижния ын ачест пункт. Гэсим проекцииле пе акселе де координате а вектурулуй принципал  $R_x, R_y, R_z$  ши а моментулуй принципал  $L_x, L_y, L_z$  ку ажуторул формулелор

$$R_x = \sum_{i=1}^{12} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{12} F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^{12} F_{iz};$$

$$L_x = \sum_{i=1}^{12} M_x(\bar{F}_i); \quad L_y = \sum_{i=1}^{12} M_y(\bar{F}_i); \quad L_z = \sum_{i=1}^{12} M_z(\bar{F}_i).$$

Вом авя

$$\sum F_{ix} = -2P; \quad \sum F_{iy} = 2P; \quad \sum F_{iz} = 4P;$$

$$L_x = 2Pa; \quad L_y = -2Pa; \quad L_z = 4Pa.$$

Гэсим акум параметрий торсорулуй:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 2P\sqrt{6},$$

де асеменя

$$\bar{L}_0 \bar{R} = \bar{L}^* \cdot \bar{R} = L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z,$$

унде  $L^*$  есте проекция луй  $\bar{L}_0$  пе векторул принципал,

$$L^* = \frac{L_x R_x + L_y R_y + L_z R_z}{R},$$

адикэ  $L^*$  есте о мэриме алгебрикэ.

Прин урмаре, субституинд ын экспресия пентру  $L^*$  валориле респективе, гэсим

$$L^* = \frac{2}{3} \sqrt{6} Pa.$$

Алкэтуим екуацииле аксей централе а системулуй де форце дат, каре ау форма

$$\frac{L_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{L_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{L_z - (xR_y - yR_x)}{R_z}.$$

Пентру системул дат де форце ачесте екуаций яу аспект

$$\frac{2Pa - (4Py - 2Pz)}{-2P} = \frac{-2Pa - (-2Pz - 4Pz)}{2P} = \frac{4Pa - (2Px + 2Py)}{4P}.$$

Симплификэм тоате екуацииле прин  $P$  ши прин 2:

$$\frac{a - 2y + z}{-1} = \frac{-a + z + 2x}{1} = \frac{2a - x - y}{2}.$$

Пентру симплификаря де май департе репрезентэм фиекаре екуацие апарте

$$x - y + z = 0,$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{y}{2} + z - 2a = 0.$$

Дин ачесте доуэ екуаций обцинем

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 2a = 0.$$

Алэтурэм екуация  $x - y + z = 0$ . Астфел, акса централэ а системулуй де форце се гэсеште ла интерсекция а доуэ плане унул динтре жаре трече прин орижина системулуй де координате, яр алтул есте паралел ку акса  $z$ . Пентру а детермина координате-ле пунктулуй де интерсекции а аксей централе ку планул  $xy$ , требуе ын ачесте екуаций сэ консидерэм  $z = 0$ . Кэпэтэм

$$x - y = 0, \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 2a = 0,$$

де унде  $x = y = \frac{2}{3}a$ , адикэ пунктул кэутат се афлэ пе бисектоаря унгулуй де координате.

## § 5. ТЕОРЕМА ЛУЙ ВАРИНЬОН

Теорема луй Вариньон се поате демонстра ши пентру ун систем де форце ын спациу прин ачеш методэ, каре с'а фолосит ла демонстрация ын статика планэ. Аич ын лок де моментеле алгебриче вом луа векторий момент ай форцелор ын рапорт ку ун оарекаре пункт ал спациулуй. Астфел, *дакэ ун систем де форце ын спациу се редуче ла о форцэ резултантэ, векторул момент ал ачестей резултанте ын рапорт ку орьче пункт ал корпулуй есте егал ку моментул резултант ын рапорт ку ачеш пункт ал тутурор форцелор системулуй*:

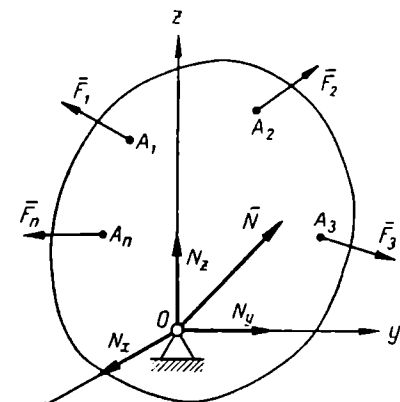
$$\bar{M}_O(\bar{R}^*) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \bar{L}_O.$$

Дин теорема луй Вариньон ын форма векториалэ ын рапорт ку ун пункт кэпэтэм немижлочит теорема луй Вариньон ши ын рапорт ку о аксэ, адикэ *моментул резултанттей унуй систем де форце ын рапорт ку о аксэ есте егал ку сума алгебрикэ а моментелор тутурор форцелор системулуй ын рапорт ку ачеш аксэ*.

## § 6. КАЗУРЬ ПАРТИКУЛАРЕ ДЕ ЕКИЛИБРУ АЛЕ УНУЙ КОРП СОЛИД

Екилибрул унуй корп солид, каре аре ун пункт фикс.

Фие унуй корп оарекаре  $S$ , фиксат ын пунктул  $O$ , ый есте апликат ун систем арбитрар де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n)$  (фиг. 84). Астфел, корпул есте супус уней легэтурь (ку ажуторул артикуляцией сфериче), каре чере ка орьче акциуне а унуй систем де форце апликат корпулуй сэ миште корпул астфел ка пунктул  $O$  сэ рэмынэ тот тимпул фикс. Ынсэ корпулуй и се пот аплика ши системе де форце, каре ну скот корпул дин старя де екилибру. Сэ гэсим кондицииле, пе каре требуе сэ лэсатисфакэ системеле де форце дате.



Фиг. 84.

Вом нота прин  $\bar{N}$  реакция уня легэтурий ын пунктул  $O$ , яр проекцииле ей пе акселе де координате респектив прин  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ . Конформ кондициилор де екилибру, пентру ун систем арбитрар се пот алкэгуи шасе екуаций де екилибру. Авынд ын ведере, кэ реакция уня  $\bar{N}$  ну



креазэ ун момент ын журул акселор де координате алесе, кэ-пэтэм урмэтоареле кондиций де екилибру:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_{ix} + N_x &= 0; & \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_y &= 0; & \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_z &= 0; & \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) &= 0.\end{aligned}$$

Ултимеле трей екуаций експримэ кондицииле де екилибру нумай пентру форцеле активе, жаре ну пот да наштере ла моменте де ротацие ын журул акселор, каре трек прин пунктул фикс. Дин примеле трей екуаций гэсим проекцииле реакциуний легэтурий, ши деч, ши реакциуня комплетэ.

#### Екилибрул унуй корп солид ку доуэ пункте фиксе сау ку о акс фиксэ

Ын ачест каз ун корп оарекаре поате сэ се ротяскэ ын журул уней аксе фиксе, фиксате ын доуэ пункте  $A$  ши  $B$ . Фие форцеле дате, сынт нотате ка ши май ынаинте прин  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ , яр реакциуниле легэтурилор респектив прин  $\bar{N}_A$  ши  $\bar{N}_B$ . Дескомпунем фиекаре реакциуне ын трей компо-ненте. Атунч, ка ши ын казул ынтый, се пот алкэтуи шасе екуаций де екилибру пентру форцеле екстериоаре:

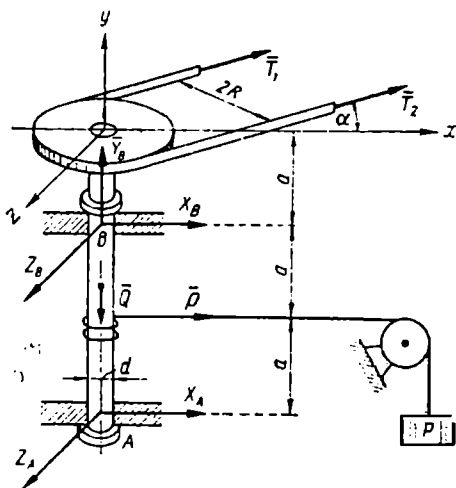
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n F_{ix} + N_{Ax} + N_{Bx} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) - N_{By}h &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_{Ay} + N_{By} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) + N_{Bx}h &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_{Az} + N_{Bz} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) &= 0.\end{aligned}$$

Орижня системулуй де координате се я ын пунктул фикс  $A$ . Мэримя  $h$  есте дистанца динтре пунктеле фиксе.

Ултима дин челе шасе екуаций ну инклубе форцеле де реакциуне. Деачея пентру детерминаря лор авем нумай чинч екуаций, адикэ проблема есте статик недетерминатэ. Реакциуниле дупэ акселе  $x$  ши  $y$  се калкулязэ дин прима, а доуа, а патра ши а чинчя екуацие, яр пентру детерминаря реакциу-ний дупэ акса де ротацие  $Az$  авем нумай о сингурэ екуацие, а трея, дин каре се поате афла сума лор. Сэ адмитем, кэ есте

датэ реакциуня  $N_{Bz}$  ши ануме  $N_{Bz}=0$ . Ын практикэ не акселе де ротацие се фиксэзэ о краподинэ, каре аре трей компоненте некуноскуте але реакциуний легэтурий, прекум ши ун лагэр аксиал чилиндрик фэрэ фрекаре, каре ымпедикэ девьеря аксей де ротацие де ла вертикалэ. Ын ачест каз проблема девине статик детерминатэ ши се резолвэ пынэ ла сфыршит. Реакциунь некуноскуте вор фи чинч:  $N_{Ax}$ ,  $N_{Ay}$ ,  $N_{Az}$ ,  $N_{Bx}$ ,  $N_{By}$ . Ул-тима екуацие де екилибру поате фи нумитэ кондиция де екилибру, ши нумай форцеле активе требуе сэ сатисфакэ ачастэ кондицие.

Ремаркэм, кэ нумэрул кондициилор де екилибру депинде ши де фелул системулуй де форце апликат корпулуй солид ши де



Фиг. 85.

нумэрул граделор де либертате але корпулуй, адикэ де посибилитэциле мишкэрий луй, пермисе де легэтуриле, ла каре есте супус корпул. Ун корп солид поате авя чел мулт шасе граде де либертате (трей мишкэрь де трансляцие дупэ трей дирекций ын спациу ши трей ротаций ын рапорт ку трей аксе). Ын каз женерал авем де асеменя шасе кондиций де екилибру. Корпул, каре аре пункт фикс, поседэ трей граде де либертате; нумэрул максим ал кондициилор де екилибру пентру фор-

целе активе есте трей; пентру корпуриле ку ун сингур град де либертате — о сингурэ кондицие.

**Екземплу.** Ун арборе вертикал авынд о роатэ де трансмисие ку греутатя де 2 кн есте фиксат ын рулменций А ши В, аша кум есте арэтит ын фигура 85. Арбореле се пуне ын мишкаре де ротацие ку о куря трекутэ песте роата де трансмисие.

Рамификациле паралеле але курелий сынт ситуате ын ачелаш план ку роата де трансмисие ши сынт ынклинате фацэ де акса  $Ox$  суб ун унгь  $\alpha = +45^\circ$ . Тенсиуна рамификацией кондукэтоаре  $T_2 = 3$  кн, яр а челей кондусе  $T_1 = 1,5$  кн. Ку ажуторул уней фрынгий, каре се ынфэшоарэ не арборе, се ридикэ о греутате  $P$  (униформ ши ынчет).

Сэ се детермине валоаря максимэ а греутэций  $P$ , каре се поате ридика, прекум ши реакциуня ряземелор А ши В, дакэ се дэ: диаметрул арборелуй  $d = 10$  см,  $R = 45$  см,  $a = 50$  см. Фрекаря ын рулменць се неглижазэ. Нотэм реакциуниле ын ряземе

ку литере марь, жореспунзэтор акселор де координате ши ку индичь жос, респектив ряземелор.

Резолваре. Кондицииле де екилибру сынт:

$$\sum F_{ix}=0; X_A + X_B + T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha + P=0. \quad (\text{а})$$

$$\sum F_{iy}=0; Y_B - Q=0; Y_A=0. \quad (\text{б})$$

$$\sum F_{iz}=0; Z_A + Z_B - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha=0. \quad (\text{в})$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i)=0; -3aZ_A - aZ_B=0. \quad (\text{г})$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i)=0; -T_1 R + T_2 R - P \frac{d}{2}=0. \quad (\text{д})$$

$$\sum M_z(\bar{F}_i)=0; 3aX_A + aX_B + 2aP=0. \quad (\text{е})$$

Аич  $Q$  есте греутатя арборелуй.

Дин (б) гэсим

$$Y_B=2 \text{ кН};$$

дин (д)

$$P=\frac{2R(-T_1+T_2)}{d}; P=1,5 \cdot 9=13,5 \text{ кН};$$

дин (г)

$$Z_B=-3Z_A; \quad (\text{ж})$$

дин (е)

$$X_B=-2P-3X_A; \quad (\text{з})$$

дин (а)

$$X_A - 2P - 3X_A + P + (T_1 + T_2) \cos \alpha = 0$$

ши

$$X_A = \frac{(T_1 + T_2) \cos \alpha - P}{2} = \frac{4,5 \frac{\sqrt{2}}{2} - 13,5}{2} = -5,16 \text{ кН};$$

дин (з)

$$X_B = -27 + 15,48 = -11,52 \text{ кН};$$

дин (в) ши (ж)

$$Z_A - 3Z_A - (T_1 + T_2) \sin \alpha = 0; Z_A = -\frac{(T_1 + T_2) \sin \alpha}{2};$$

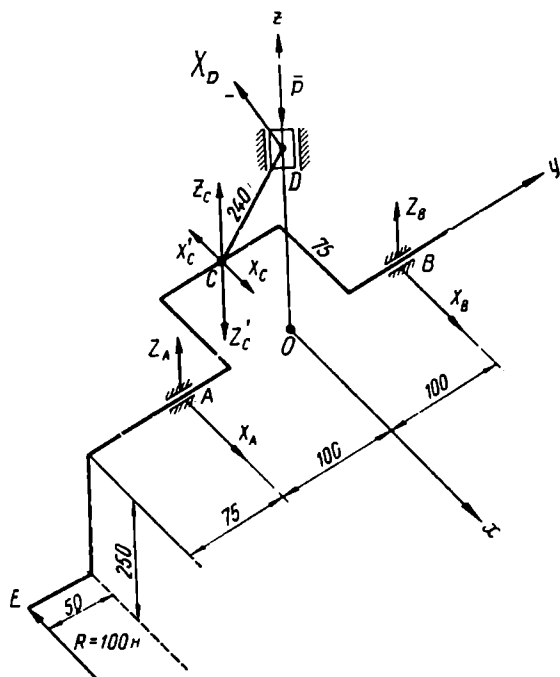
$$Z_A = -\frac{4,5 \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = -1,59 \text{ кН};$$

дин (ж)

$$Z_B = 3 \cdot 1,59 = 4,77 \text{ кН}.$$

*Екземплу.* Ын фигура 86 есте репрезентатэ схема унуй мотор жу комбустие интернэ ку ун сингур чилиндру. Биела  $DC$  есте унитэ прин артикулацие ын пунктул  $D$  ку ун пистон ын чилиндру, яр ын пунктул  $C$  ку ун арборе котит.

Сэ се детермине реакциуниле ын рулеменций  $A$  ши  $B$ , дакэ куноаштем форца де пресиуне  $P$  асупра пистонулуй, яр резистенца  $R$ , ынвинсэ де арбореле котит ын пунктул  $E$ , есте егалэ ку  $R=100$  н. Дименсиуниле линиаре ынгит дате ын миллиметри. Фрекаря се negliжэзэ.



Фиг. 86 .

**Резолваре.** Ачест систем механик констэ дин доуэ корпурь: биелэ ши арбореле котит. Се сокоате, кэ системул се гэсеште ын екилибру ын моментул дат, адикэ ла о мэрире микэ а форцей  $P$  арбореле капэтэ аччелерацие.

Нотэм ын пунктул  $C$  де артикулацие а биелей ку арбореле котит форцеле  $X_C$  ши  $Z_C$ , апликате биелей дин партя арборелуй дупэ дирекцииле индикате ын фиг. 86. Форцеле, апликате арборелуй котит дин партя биелей, ле нотэм прин  $X'_C$  ши  $Z'_C$  ши ле ориентэм ын дирекций контраре.

Валориле нумериче але форцелор респективе сынт егале конформ лежий акциуний ши реакциуний  $X_C=X'_C$ ,  $Z_C=Z'_C$ .

Жустея сенсурило алесе але форцелор консидерате се верификэ ла резолваря екуациилор респективе.

Черчетэм екилибрул биелей (фиг. 87) ын планул  $zOx$  (ла биелэ сынт апликате форцеле:  $P, X_D, Z_C, X_C$ )

$$\sum F_{ix}=0; \quad X_D=X_C; \quad (1)$$

$$\sum F_{iz}=0; \quad Z_C=P; \quad (2)$$

$$\sum M_c(F_i)=0; \quad 75P=\sqrt{240^2-75^2} \cdot X_D. \quad (3)$$

Дин ачесте екуаций гэсим

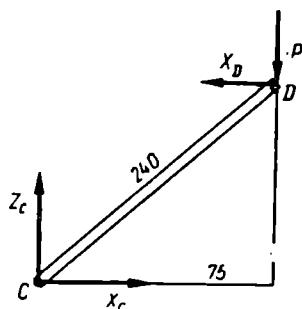
$$\frac{P}{X_D} = \frac{Z_C}{X_C} = \frac{15\sqrt{231}}{75} = 3,04. \quad (4)$$

Черчетэм екилибрул арборелуй котит (ла арбореле котит сынт апликате форцеле:  $R, Z_A, X_A, Z_B, X_B, Z'_C, X'_C$ )

$$\sum F_{iz}=0; \quad Z'_C=Z_A+Z_B; \quad (5)$$

$$\sum F_{ix}=0; \quad X'_C+R=X_A+X_B; \quad (6)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i)=0; \quad 75Z'_C=250R. \quad (7)$$



Фиг. 87.

Де аич

$$Z'_C = \frac{100 \cdot 250}{75} = 334 \text{ н}; \quad (7')$$

$$\sum M_z(\bar{F}_i)=0; \quad 225R+100X_B=100X_A,$$

де аич

$$X_A - X_B = 2,25R. \quad (8)$$

Дин (6) ши (8) гэсим

$$X_A = \frac{x'_C + 3,25R}{2}.$$

Дин (4) ши (7')

$$X_C = \frac{334}{3,04} = 110 \text{ н},$$

де унде

$$X_A = \frac{110 + 3,25R}{2} = 217,5 \text{ н}.$$

Дин (6) авем

$$X_B = X'_C + R - X_A \text{ сая } X_B = 110 + 100 - 217,5 = -7,5 \text{ н.}$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = 0; \quad 100Z_A = 100Z_B. \quad (9)$$

Дин (9) ши (5)

$$Z_A = Z_B = \frac{Z'_C}{2} = \frac{334}{2} = 167 \text{ н.}$$

Ам гэсит тоате реакциуниле:

$$X_A = 217,5 \text{ н,} \quad X_B = -7,5 \text{ н.}$$

$$Z_A = 167 \text{ н,} \quad Z_B = 167 \text{ н.}$$

---

## СИСТЕМЕ ДЕ ФОРЦЕ ПАРАЛЕЛЕ ЫН СПАЦИУ

## § 1. РЕДУЧЕРЯ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ ФОРЦЕ ПАРАЛЕЛЕ ЫН СПАЦИУ ЛА УН СИСТЕМ МАЙ СИМПЛУ

Сэ консидерэм ун каз партикулар де редучере ла о формэ май симплэ а унуй систем арбитрар де форце ын спацуу, апликат унуй корп солид ши ануме а унуй систем де форце паралеле ын спацуу.

Фие авем ун систем де форце паралеле ын спацуу  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  (фиг. 88). Луэм центрул де редучере  $O$  дрепт орижиня системулуй де координате, яр акса  $z$  вом ориента-о паралел ку форцеле системулуй.

Гэсим векторул принципал ал системулуй де форце; пентру проецииле луй пе акселе де координате кэпэтэм ын каз же-нерал

$$R_x = \sum F_{ix} = 0; R_y = \sum F_{iy} = 0; R_z = \sum F_{iz} \neq 0.$$

Деч, векторул принципал ал системулуй де форце есте ори-ентат ын казул дат дуп акса  $z$ . Ын фигура 88 векторул принципал  $\vec{R}$  есте индикат пресупунынд кэ  $\sum F_{iz} > 0$ .

Сэ детерминэм проекци-иле моментулуй принципал ал системулуй де форце пе акселе де координате ын ра-порт ку пунктул  $O$ , адикэ  $L_x, L_y, L_z$ .

Пентру  $L_x$  кэпэтэм

$$L_x = \sum M_x(\vec{F}_i) \neq 0.$$

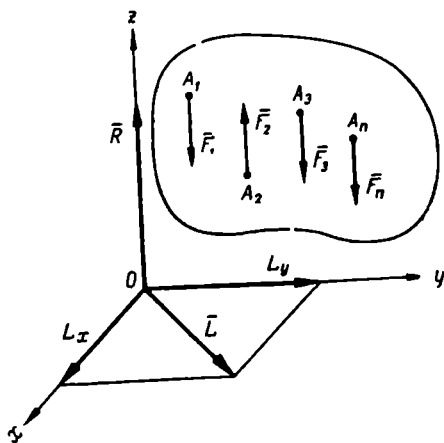
Ын мод аналог

$$L_y = \sum M_y(F_i) \neq 0.$$

Апой

$$L_z = \sum M_z(F_i) = 0,$$

деоарече дин кауза паралелизмулуй форцелор нич уна дин еле ну наште моменте ын рапорт ку акса  $z$ . Ын фигура 88 момен-тул принципал ал системулуй де форце ын рапорт ку пунк-тул  $O$ , адикэ векторул  $\vec{L}$  есте репрезентат пресупунынд кэ



Фиг. 88.

$L_x > 0$ ,  $L_y > 0$ . Деоарече  $L_z = 0$ , моментул принципал ал системулuy де форце ын рапорт ку пунктлу  $O$  се ситуязэ ын плану  $xOy$  ши, прин урмаре есте перпендикулар пе векторул принципал  $\bar{R}$ , ориентат дупэ акса  $z$ , адикэ  $\bar{L} \perp \bar{R}$ .

Резултатул обцинут есте адеврат пентру казул женеал ал унуй систем де форце паралеле ын спациу ( $\sum F_{iz} \neq 0$ ,  $L \neq 0$ ), казул кынд векторул принципал ши моментул принципал ну сынт перпендикуларь ынтре ей се ексCLUDE. Дин теория женеалэ де редучере а унуй систем де форце ын спациу се штие, кэ ын казул кынд векторул принципал ну есте перпендикулар пе моментул принципал, системул де форце се редуче ла ун торсор. Де аич се поате траже конклузия: *ун систем де форце паралеле ын спациу ну поате фи редус ла ун торсор, чи поате фи редус ла о форцэ резултантэ, ла ун куплу резултант сау се афлэ ын екилибру.*

Сэ консидерэм казул де екилибру а унуй систем де форце паралеле ын спациу.

Пентру ачест каз  $R = 0$  ши  $L = 0$ ; дин ачесте кондиций кэпэ-тэм

$$\sum F_{iz} = 0, L_x = 0, L_y = 0.$$

Субституинд  $L_x$  ши  $L_y$  прин експресниле лор, дате прин моментеле форцелор консидерате, обцинем дефинитив кондицииле де екилибру але унуй систем де форце паралеле ын спациу

$$\sum F_{iz} = 0, \sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \sum M_y(\bar{F}_i) = 0.$$

Ачесте кондиций вор фи, евидент, кондицииле нечесаре ши суфициенте пентру екилибрул форцелор. Формулэм кондицииле кэпэте.

*Пентру ка ун систем де форце паралеле ын спациу сэ се афле ын екилибру. есте нечесар ши суфициент, ка сума алжебрикэ а проекцилор тутурор форцелор пе акса, паралелэ ку линииле де акциуне але форцелор, сэ фие егалэ ку zero ши сума алжебрикэ а моментелор тутурор форцелор ын рапорт ку фиекаре дин челе доуэ аксе де координате, каре ну-с паралеле ку линииле де акциуне але форцелор, де асеменя сэ фие егалэ ку zero.*

Авем трей екуаций де екилибру але унуй систем де форце паралеле ын спациу, ши деч, проблемеле статик детерминате ку привире ла екилибрул унуй аша систем де форце ну пот концине май мулт де трей некуноските.

## § 2. ЧЕНТРУЛ УНУЙ СИСТЕМ ДЕ ФОРЦЕ ПАРАЛЕЛЕ

Сэ консидерэм май ынтый доуэ форце паралеле  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  ориентате ын ачеяш дирекције. Нотэм пунктеле лор де апликације прин  $A_1$  ши  $A_2$ . Ачесте форце, дупэ кум се штие, ау о



форцэ резултантэ де ачелаш сенс ши егалэ ка валoare ку сума лор  $\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ . Пунктул де апликация ал резултантей  $C$ , ситуат пе сегментул  $A_1A_2$ , ымпарте ачест сегмент ын пэрць инверс пропорционале ку форцеле, адикэ  $\frac{A_1C}{CA_2} = \frac{F_2}{F_1}$  (фиг. 89).

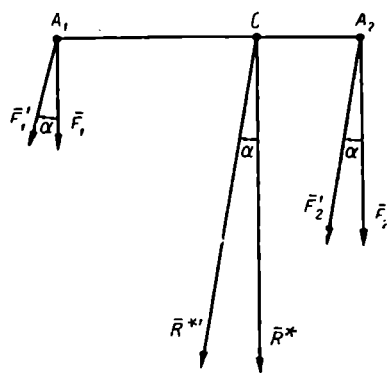
Ротим форцеле  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  ын журул пунктелор де апликация ку ачелаш унгь ши ын ачаяш дирекция фэрэ а скимба мэримиле лор. Обцинем доуэ форце паралеле  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$ .

Форца резултантэ а ачестор форце ва трече прин пунктул  $C$ , деораче еа ымпарте сегментул  $A_1A_2$  ын пэрць, инверс пропорционале ку мэримиле форцелор  $F'_1$  ши  $F'_2$ . Мэримя ачестей резултанте  $\bar{R}^{*'} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$  ши есте ориентатэ ын дирекция форцелор  $\bar{F}'_1$  ши  $\bar{F}'_2$ . Резултанта  $\bar{R}^*$  се ынтоарче ын журул пунктулуй  $C$  ку ачелаш унгь, ка ши форцеле  $\bar{F}_1$  ши  $\bar{F}_2$  ын журул пунктелор лор де апликация.

Есте евидент, кэ пентру орьче систем де форце паралеле, каре се редуче ла о форцэ резултантэ, ла ынтоарчеря тутурор форцелор ын журул пунктелор лор де апликация ку ачелаш унгь ши ын ачелаш сенс де ла дирекция инициалэ резултанта се ынтоарче ку ачелаш унгь ын журул пунктулуй де апликация, обцинут прин компунеря консекутивэ а форцелор паралеле.

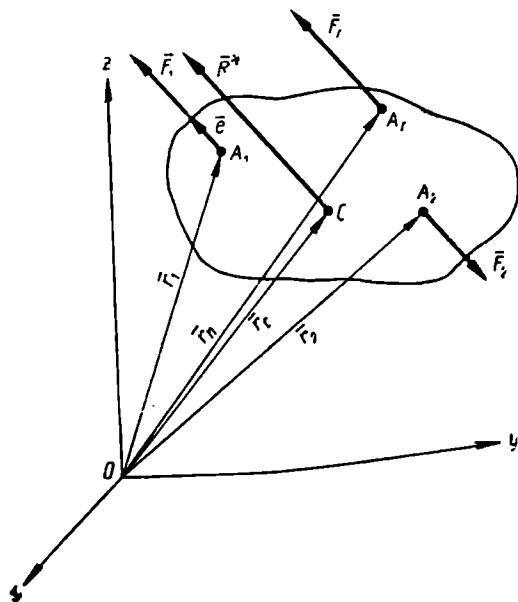
Пунктеле де апликация але форцелор ну се скимбэ, прин урмаре, аич векторий форцелор сынт концентраць сау фиксаць. Астфел,

пе линия де акциуне а форцей резултанте авем ун пункт бине детерминат, ын журул кэруя се ынтоарче форца резултантэ ла ротирия тутурор форцелор ын журул пунктелор лор де апликация ку ачелаш унгь ши ын ачелаш сенс де ла дирекция лор инициалэ. Ачест пункт се нумеште *центрул системулуй де форце паралеле*: се нумеште центру ал унуй систем де форце паралеле  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  пунктул, прин каре трече линия де акциуне а форцей резултанте а системулуй де форце паралеле  $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n$  ориентате арбитрар авынд ачеляшь пункте де апликация ши ачеляшь валорь, ка ши ын системул  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ . Тот одатэ форцелор де ачаяш дирекция ши сенс дин системул  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  ле кореспунд форце де ачаяш дирекция ши сенс дин системул  $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n$ .



Фиг. 89.

Сэ детерминэм координателе центрлуй унуй систем де форце паралеле. Фие  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ун систем де форце паралеле, яр  $A_1, A_2, \dots, A_n$  пунктеле де апликация але форцелор. Нотэм векторий де позиция ай ачестор пункте ын рапорт ку орижиня системлуй де координате прин  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ . С есте центрл ачестуй систем де форце паралеле,  $\vec{r}_C$  — векторул де позиция ал пунктулуй С (фиг. 90).



Фиг. 90.

Ынтродучем векторул унитате  $\vec{e}$  каре аре ачеш дирекция ши сенс, де екземплу, ка ши форца ынтия. Вом авя

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}, \vec{F}_2 = F_2 \vec{e} \dots \vec{F}_n = F_n \vec{e} \text{ ши } \vec{R}^* = \sum F_i \vec{e},$$

унде  $F_1, F_2, \dots, F_n$  сынт валориле алгебриче але форцелор.

Конформ теоремей луй Вариньон авем

$$\vec{M}_O(\vec{R}^*) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \text{ сау } \vec{r}_C \times \vec{R}^* = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

Ынлокуим ын ултима егалитате векторий форцелор прин експрессиеле лор, каре концин векторий унитате  $\vec{e}$ , атунч

$$\vec{r}_C \times \sum F_i \vec{e} = \sum (\vec{r}_i \times F_i \vec{e}) \text{ сау } \sum F_i \vec{r}_C \times \vec{e} = \sum (F_i \vec{r}_i \times \vec{e}).$$

Тречем тоць термений ачестей егалитэць ын ачеяш парте-  
ши скоатем ын фаца парантезей векторул унитате  $\bar{e}$ . Обцинем

$$(\sum F_i \bar{r}_c - \sum F_i \bar{r}_i) \times \bar{e} = 0.$$

Продусул векториал есте егал ку zero пентру орьче  $\bar{e}$ , ади-  
кэ пентру орьче сенс ал форцелор паралеле.

Колиниаритатя векторилор ын казул де фацэ се ексклуде,  
деоарече векторул ынтый аре о дирекциё бине детерминатэ,  
яр векторул ал дойля  $\bar{e}$  поате авя орьче дирекциие. Ынсэ  $\bar{e} \neq 0$ ,  
прин урмаре,

$$\sum F_i \bar{r}_c - \sum F_i \bar{r}_i = 0$$

ши

$$\bar{r}_c = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}. \quad (1)$$

Формула (1) се апликэ ла детерминаря векторулуй де по-  
зицие а центрулуй системулуй де форце паралеле.

Проектынд амбеле пэрць але ачестей егалитэць пе акселе  
де координате, кэпэтэм формулеле пентру координателе центру-  
луй системулуй де форце паралеле:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (2)$$

Сумеле  $\sum F_i x_i$ ,  $\sum F_i y_i$ ,  $\sum F_i z_i$  се нумеск моменте статиче  
але системулуй де форце паралеле ын рапорт ку планеле  $yOz$ ,  
 $xOz$  ши  $xOy$ .

Дин формула (2) обцинем, де екземплу,

$$\sum F_i x_c = \sum F_i x_i$$

сау авынд ын ведере кэ  $R^* = \sum F_i$ ,

$$R^* x_c = \sum F_i x_i,$$

адикэ моментул статик ал унуй систем де форце паралеле ын  
рапорт ку ын план оарекаре есте егал ку моментул статик ал  
форцей резултанте ын рапорт ку ачелаш план, дакэ ын калита-  
те де пункт де апликация ал ей консидерэм центрул системулуй  
де форце паралеле.

## ЧЕНТРУЛ ДЕ ГРЕУТАТЕ АЛ КОРПУРИЛОР

## § 1. ДЕТЕРМИНАРЯ ЧЕНТРУЛУЙ ДЕ ГРЕУТАТЕ АЛ УНУЙ КОРП

Асупра тутурор корпурило, ситуате ын сфера де атракције а Пэмынтулуй, акционязэ форца де атракције а луй. Дакэ дивизэм ун корп ын партикуле елементаре де волуме мичь, асупра фиекэрей партикуле акционязэ форца де атракције а Пэмынтулуй. Ла студия мултор феномене, че ау лок суб акциуня форцей де атракције а Пэмынтулуй, се поате консидера, кэ Пэмынтул репрезинтэ о сферэ оможэнэ. Атунч атракция Пэмынтулуй, каре акционязэ асупра орькэруй пункт материал, се репрезинтэ принтр'о форцэ, апликате ачестуй пункт материал ши ориентатэ спре чентрул Пэмынтулуй.

Сэ консидерэм ун корп, ситуат немижлочит пе супрафаца Пэмынтулуй ши сэ адмitem, кэ дименсиуниле ачестуй корп сынт атыт де мичь ын компарации ку раза Пэмынтулуй, ынкыт путем сокоти, кэ форцеле де атракције а Пэмынтулуй, каре акционязэ асупра партикулелор корпулуй, сынт паралеле ынтре еле.

Сэ формулэм дефиниция пречисэ а чентрулуй де греутате ал унуй корп, луынд ын консидерации челе спусе май сус. *Се нумеште чентру де греутате ал унуй корп солид пунктул, каре репрезинтэ чентрул форцелор де греутате паралеле, апликате диферитор партикуле але корпулуй.* Чентрул де греутате ал унуй корп рижид ва фи ун пункт инвариабил ын рапорт ку корпул.

Чентрул де греутате репрезинтэ ун пункт жеометрик. Ын мулте казурь чентрул де греутате ал корпулуй се поате гэси ын спациу, ын афара корпулуй, де екземплу, чентрул де греутате ал унуй черк де бутой, ал унуй корп чилиндрик, мэржинит де супрафещеле ку разеле  $R_1$  ши  $R_2$ . Чентрул де греутате се поате афла ын корпул ынсэшь ши коинчиде ку унул дин пунктеле луй.

Сэ консидерэм ун корп де волум  $\tau$ . Дивизэм ачест корп ын партикуле елементаре ши нотэм греутатя фиекэрея прин  $\Delta P_i$ . Обцинем ун систем де форце де греутате паралеле ку чентрул форцелор паралеле  $C$ . Ачест чентру ал форцелор паралеле есте токмай чентрул де греутате ал корпулуй (фиг. 91). Линия де акциуне а форцей де греутате  $\bar{P}$  трече прин чентрул де греутате.

Дупэ кум се штие, позиция чентрулуй форцелор паралеле се поате детермина ку ажуторул формулей

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \Delta P_i \bar{r}_i}{\sum \Delta P_i}, \quad (1)$$

унде сумаря се фаче дупэ тоате партикулеле корпулуй. Аич  $\bar{r}_C$

есте векторул де позиции ал чентрулуй де греутате,  $\vec{r}_i$  векторул де позиции ал партикулей  $i$  дин ачест корп. Нумиторул репрезентэ греутатя корпулуй  $\sum \Delta P_i = P$ .

Форца де греутате а уней партикуле есте егалэ ку продукул динтре маса партикулей  $\Delta m_i$  ши акчелерация  $g$ , адикэ  $\Delta P_i = \Delta m_i g$ .

Дакэ партикула аре ун волум  $\Delta \tau_i$ ,

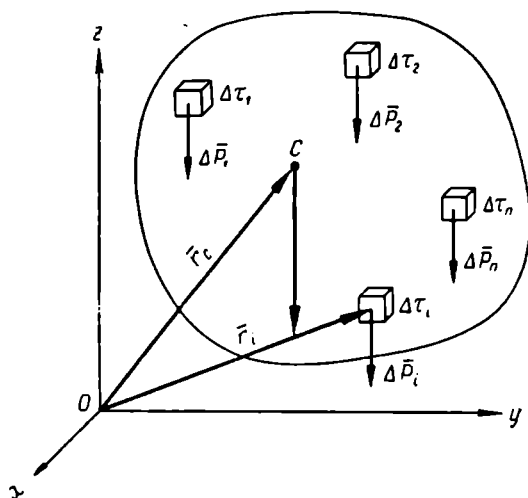
$$\Delta m_i = \rho_i \Delta \tau_i,$$

унде  $\rho_i$  есте денситатя де волум.

Дакэ корпус репрезентэ о супрафацэ материалэ, атунч

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta \sigma_i$$

ши  $\rho_i$  ва фи денситатя де супрафацэ, яр  $\Delta \sigma_i$  — ун елемент де супрафацэ, експримат ын унитэць де арие.



Фиг. 91.

Ын казул уней линей материалэ

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta l_i,$$

унде  $\rho_i$  есте денситатя линиарэ,  $\Delta l_i$  ун елемент де лунжимер.

Дакэ корпус консидерат есте ун корп оможен, денситатя  $\rho_i$  есте константэ ши еа се симплификэ ын формула (1).

Формулеле, каре детерминэ позиция чентрулуй де греутате

ал волумелор ла лимитэ се експримэ прин интегралеле де волум:

$$\begin{aligned}\bar{r}_C &= \frac{\iiint_{(\tau)} \bar{r} d\tau}{\tau}; & x_C &= \frac{\iiint_{(\tau)} x d\tau}{\tau}; \\ y_C &= \frac{\iiint_{(\tau)} y d\tau}{\tau}; & z_C &= \frac{\iiint_{(\tau)} z d\tau}{\tau},\end{aligned}$$

унде  $\tau$  есте волумул корпулуй;

$\bar{r}_C$  — векторул де позиции ал центрулуй де греутате;  
 $x_C, y_C, z_C$  — координателе центрулуй де греутате.

Пентру детерминаря центрулуй де греутате ал супрафецелор се фолосеск формулеле:

$$\begin{aligned}\bar{r}_C &= \frac{\iint_{(\sigma)} \bar{r} d\sigma}{\sigma}; \\ x_C &= \frac{\iint_{(\sigma)} x d\sigma}{\sigma}; & y_C &= \frac{\iint_{(\sigma)} y d\sigma}{\sigma}; & z_C &= \frac{\iint_{(\sigma)} z d\sigma}{\sigma},\end{aligned}\quad (3)$$

унде  $\sigma$  есте ария ынтрежий супрафеце.

Пентру детерминаря центрулуй де греутате ал линиилор се фолосеск формулеле:

$$\begin{aligned}\bar{r}_C &= \frac{\int_{(l)} \bar{r} dl}{l}; \\ x_C &= \frac{\int_{(l)} x dl}{l}; & y_C &= \frac{\int_{(l)} y dl}{l}; & z_C &= \frac{\int_{(l)} z dl}{l},\end{aligned}\quad (4)$$

унде  $l$  есте лунжия линей.

Нумэрэторий дин формулеле де май сус се нумеск *моментеле статиче де волум, де супрафецэ сау де лунжия* а корпулуй ын рапорт ку ун пункт (мэриме векториалэ) сау ын рапорт ку планеле де координате.

Ын партикулар, пентру о фигурэ материалэ планэ, ситуатэ

ын планеле  $x$ ,  $y$ , експрессиеле моментелор статиче але супра-  
фецей респектив ын рапорт ку  $Oy$  ши  $Ox$  ау форма:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{(\sigma)} x d\sigma &= x_c \sigma, \\ \iint_{(\sigma)} y d\sigma &= y_c \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

## § 2. МЕТОДЕЛЕ ДЕ ДЕТЕРМИНАРЕ А ЧЕНТРУЛУЙ ДЕ ГРЕУТАТЕ

### Чентреле де греутате але унор фигурь оможене симетриче

Фолоситнд проприетэциле интегралелор линиаре, де супрафа-  
цэ ши де волум, се пот стабили ушор урмэтоареле принчилий:

а) Дакэ ун корп солид оможен аре ун план де симетрие  
жеометрике, чентрул де греутате ал ачестуй корп се гэсеште ын  
ачест план де симетрие.

б) Дакэ ун корп солид оможен аре о аксэ де симетрие жео-  
метрике, чентрул де греутате се гэсеште пе ачаствэ аксэ.

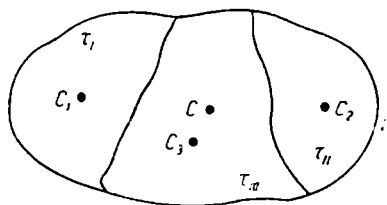
в) Дакэ ун корп солид оможен аре ун чентру де симетрие  
жеометрике, чентрул де греутате ал корпулуй коинчиде ку чен-  
трул де симетрие.

### Метода дивизэрий унуй корп ын пэрць

Позиция чентрулуй де греутате се поате детермина, дакэ  
дивизэм корпул ын астфел де пэрць фините, чентреле де  
греутате але кэра сынт куноскуте. Адмитем, кэ авем трей  
пэрць:  $\tau_I$ ,  $\tau_{II}$ ,  $\tau_{III}$ . Чентреле де греутате але ачестор пэрць ле  
нотэм прин  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (фиг. 92).

Греутатя ынтрегулуй корп се  
репартизияэ ла трей форце дифе-  
рите. Позиция чентрулуй де греу-  
тате ал ынтрегулуй корп се поате  
детермина дупэ формула

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{r}_1 \tau_1 + \bar{r}_2 \tau_{II} + \bar{r}_3 \tau_{III}}{\tau},$$



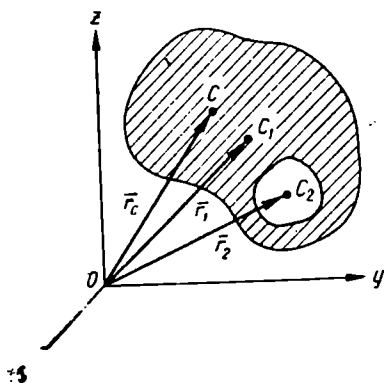
Фиг. 92.

унде

$$\tau = \tau_I + \tau_{II} + \tau_{III}.$$

Пентру координателе  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  але чентрулуй де греутате  
обцинем формуле аналоаже. Ын ачелаш мод се поате детер-  
мина ши позиция чентрелор де греутате але супрафецелор ши  
линиилор, каре се дивизияэ ын пэрць фините.

Адмитем, кэ ун корп солид аре кавитэць, адикэ спацииле дин каре есте скоасэ маса лор. Фие, де екземплу, о кавитате (фиг. 93) аре ун волум  $\tau_{II}$ ; координателе центрулуй ей де греутате  $C_2$  (дакэ ачастэ кавитате ва фи ымплутэ ку субстанцэ) сынт  $(x_2, y_2, z_2)$ , яр  $\vec{r}_2$  есте векторул де позиции ал центрулуй ей де греутате.



Фиг. 93.

Нотэм центрул де греутате ал корпулуй ымплут ын реалитате ку субстанцэ (фэрэ  $\tau_{II}$ ) прин  $C$ , яр волумул ачестуй корп —  $\tau$ . Сэ не имажинэм, кэ кавитатя есте ымплутэ. Консидерэм корпул плин (фэрэ кавитате), волумул кэруя ыл нотэм прин  $\tau_I$

$$\tau_I = \tau + \tau_{II},$$

яр центрул де греутате ал ачестуй корп ыл нотэм прин  $C_1$ . Фолосинд метода дивизэрий ачестуй корп ын пэрць, путем скрие експресия векторулуй де позиции ал центрулуй де греутате ал волумулуй  $\tau_I$  ын форма:

$$\vec{r}_I = \frac{\tau \vec{r}_C + \tau_{II} \vec{r}_2}{\tau_I},$$

де аич

$$\vec{r}_C = \frac{\tau_I \vec{r}_I - \tau_{II} \vec{r}_2}{\tau_I - \tau_{II}}.$$

Астфел, ам детерминат векторул де позиции ал центрулуй де греутате ал корпулуй ку кавитате.

Пентру координателе центрулуй де греутате авем формулеле

$$x_C = \frac{x_1 \tau_I - x_2 \tau_{II}}{\tau_I - \tau_{II}}; \quad y_C = \frac{y_1 \tau_I - y_2 \tau_{II}}{\tau_I - \tau_{II}}; \quad z_C = \frac{z_1 \tau_I - z_2 \tau_{II}}{\tau_I - \tau_{II}}. \quad (6)$$

Дакэ ун корп аре доуэ кавитэць, ла нумэрэторул ши нуми-торул експресиилор де май сус се адаугэ ынкэ кыте ун термен ку сэмнул минус ш. а. м. д.



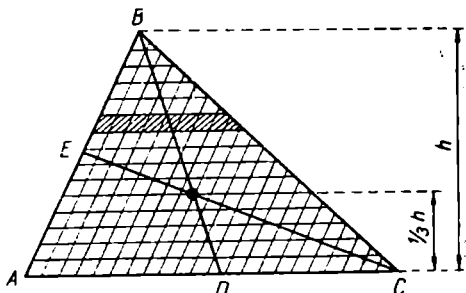
### § 3. ЧЕНТРЕЛЕ ДЕ ГРЕУТАТЕ АЛЕ УНОР КОРПУРЬ СИМПЛЕ

#### Чентрул де греутате ал арией унуй триунгь ши ал унуй арк де черк

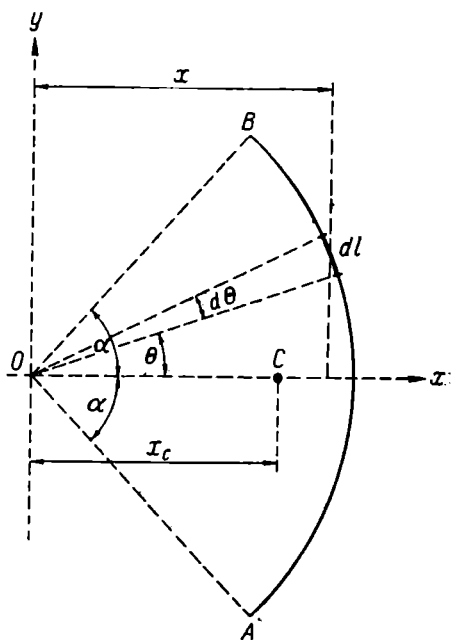
Сэ дивизем ун триунгь ын фыший де лэциме микэ, паралеле ку уна дин латуриле триунгюлуй. Фиекаре фышие (фиг. 94) се поате консидера кэ аре формэ дрептунгюларэ, деоарече арииле триунгюрилор рэмаса ла маржиниле ей репрезинтэ ниште мэримь инфинит де мичь де ординул дой ын компарацие ку ария ынтрежий фыший. Чентрул де греутате ал фиекэрей фыший се афлэ ла мижлокул ей.

Астфел греутатя триунгюлуй ын ынтрежиме се репартизиязэ ын лунгул медианей респективе а триунгюлуй, каре трече прин мижлокул тутурор фышиилор. Алтфел, фиекаре пункт ал медианей аре о греутате егалэ ку греутатя фышией респективе. Прин урмаре, чентрул де греутате ал триунгюлуй есте ситуат пе медиана  $BD$ .

Дивизем акум триунгюлуй ын фыший паралеле ку латура  $BA$ . Чентрул де греутате се гэсеште пе медиана  $CE$ . Деачея чентрул де греутате се афлэ ла интерсекция медианелор. Пунктул де интерсекция ал медианелор, дупэ кум се штие, есте ситуат ла дистанца де о треиме дин медиана респективэ де ла мижлокул фиекэрей базе а триунгюлуй, сау ла дистанца де  $\frac{1}{3} h$  де ла базэ, унде



Фиг. 94.



Фиг. 95.

$h$  есте ынэлцимя триунгюлуй де ла база респективэ.

Ремаркэм, кэ прин ачастэ методэ ну се поате афла позиция чентрулуй де греутате ал корпулуй, маса кэруя есте репартизатэ

дупэ периметрул триунгюлуй. Ын асемения каз требуе детерминат центрул де греутате ал унуй систем де трей масе пункти-форме, пунктеле кэруя сынт ситуате ын мижлокуриле латурилоу триунгюлуй (ын казул кынд ачеста е оможен) ши маселе кэруя сынт егале ку маселе латурилоу респективе але триунгюлуй.

Сэ детерминэм позиция центрулуй де греутате ал унуй арк де черк оможен, каре аре ун унг ла центру 2а. Центрул де греутате С се гэсеште пе акса де симетрие, консидагатэ дрепт акса x; требуе сэ детерминэм  $x_C$  (фиг. 95). Експрессия моментулуй статик ал аркулуй ын рапорт ку акса у ва фи:

$$I x_C = \int_{AB} x dl.$$

Ынтродучем координателе поларе:

$$x = R \cos \theta, \quad dl = R d\theta, \quad l = 2R\alpha.$$

Атунч

$$2R\alpha x_C = \int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta,$$

де унде

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (7)$$

Центрул де греутате ал аркулуй унуй семичерк се детерминэ пентру  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , адикэ

$$x_C = \frac{2R}{\pi}.$$

#### Центрул де греутате ал супрафцей унуй сектор де черк ши ал волумулуй унуй кон.

Дивизэм секторул де черк ын сектоаре елементаре де ачеш мэриме. Деоарече фиекаре сектор есте фоарте мик, се поате консидаера база луй (аркул де черк елементар) ректилиние. Деша чентрул де греутате ал фиекэруй сектор есте ситуат ла дистанца де  $\frac{1}{3}h$  де ла базэ сау ла  $\frac{2}{3}h$ , адикэ ла  $\frac{2}{3}R$  де ла вырфул О. Астфел, греутатя ынтрегулуй сектор се репартизияэ униформ дупэ аркул де черк ку раза де  $\frac{2}{3}R$  ши унгюл ла центру 2а. Центрул де греутате ал аркулуй де черк се гэсеште дупэ формула де май сус, каре пентру ачест каз аре форма:

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (8)$$

Сэ детерминэм центрул де греутате ал волумулуй унуй кон, каре аре о аксэ де симетрие (фиг. 96). Орижина де координате

се гэсеште ын ырыфул конулуй. Ориентэм акса  $z$ , пе каре есте  
ситуат чентрул де греутате ын интериорул конулуй. Вом авя

$$\tau z_C = \int_{(\tau)} z d\tau; \quad \tau = \frac{1}{3} \sigma h,$$

унде  $\sigma$  есте ария базей конулуй,  $h$ —ынэлцимя луй;

$$d\tau = \sigma' dz,$$

унде  $\sigma'$  есте ария секциуний конулуй ку координата  $z$ .

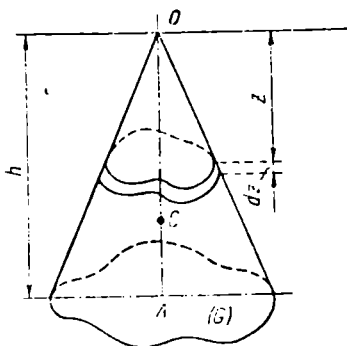
Аич

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{z^2}{h^2},$$

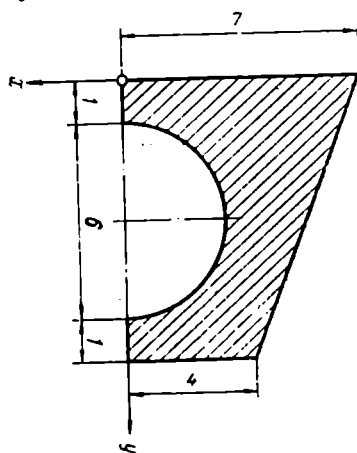
деч

$$d\tau = \frac{\sigma}{h^2} z^2 dz; \quad \frac{1}{3} \sigma h z_C = \int_0^h z \frac{\sigma}{h^2} z^2 dz,$$

унде  $z_C = \frac{3}{4} h$ , сокотинд де ла ырыфул конулуй, сау  $\frac{1}{4} h$  де ла  
чентрул де греутате ал базей конулуй.



Фиг. 96.



Фиг. 97.

Сэ детерминэм позиция чентрулуй де греутате ал супрафе-  
цей хашурате а унуй деталу (фиг. 97). Ачастэ супрафецэ поа-  
те фи консидератэ ка о фигурэ компусэ динтр'ун дрептунг ку  
ынэлцимя де 8 чм ши база 4 чм, дин каре есте тэят дин партя  
стынгэ ун семичерк жу раза де 3 чм, яр ын партя дряптэ есте  
адэугат ун триунг ку ынэлцимя де 8 чм ши база 3 чм. Арилле  
ачестор фигурь ши координателе чентрелор де греутате сынт:

$$\sigma_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ чм}^2; \quad x_1 = -2 \text{ чм}; \quad y_1 = 4 \text{ чм}; \quad \sigma_2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{8}{2} = 12 \text{ чм}^2; \quad x_2 = -5; \quad y_2 = \frac{8}{3} \text{ чм};$$

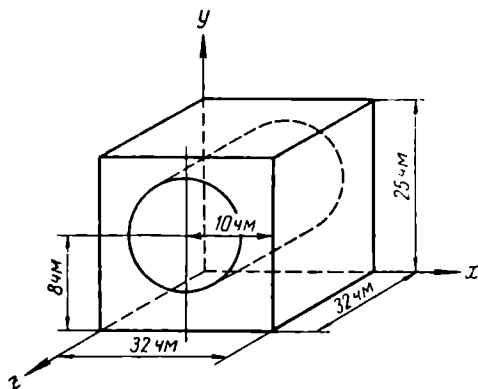
$$\sigma_3 = -\pi \frac{(3)^2}{2} = -14 \text{ чм}^2; \quad x_3 = -\frac{4}{\pi} \text{ чм}; \quad y_3 = 4 \text{ чм};$$

$$x_C = \frac{\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \sigma_3 x_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} =$$

$$= \frac{(32) \cdot (-2) + (12) \cdot (-5) + \left(-\frac{9\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\pi}\right)}{29,9} = -3,54 \text{ чм};$$

$$y_C = \frac{(32) \cdot (4) + (12) \cdot \left(\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{9\pi}{2}\right) \cdot 4}{29,9} = 3,46 \text{ чм}.$$

Ун блок ал уней инсталаций (фиг. 98) констэ динтр'о барэ де формэ дрептунгуларэ ку дименсиуниле  $32 \times 32 \times 25$  чм. Бара есте фэкутэ динтр'ун алиаж спечиал дин парафинэ. Ын барэ есте сфределитэ о гаурэ ку диаметрул де 10 чм ши адынчимя де 15 чм. Ын гаурэ есте ынтродус ун доп металик ку греутатя



Фиг. 98.

де 100 н. Сэ се афле центрул де греутате ал ынтрегулуй блок. Есте евидент, кэ пентру афлэря центрулуй де греутате ал унуй корп неоможен требуе сэ апликэм доуэ методе: метода дивизэрий ын пэрць ши метода маселор негативе. Ымпэрцим корпул ын доуэ пэрць: партя де парафинэ а блокулуй ши допул металик. Гэсинд центреле лор де греутате, афлэм центрул де греутате ал ынтрегулуй блок.

Пентру а детермина центрул де греутате ал корпулуй ынтий, адикэ ал корпулуй ку кавитате, апликэм метода маселор негативе. Ынсэ, ну есте невое, евидент, сэ кэутэм апарте центрул де греутате ал корпулуй ку кавитате. Се поате гэси позиция центрулуй де греутате а трей корпурь, динтре каре унул есте

бара де парафинэ плинэ, алтул — кавитатя ши ал трейля — допул металик. Ын казул ачеста координателе центрулуй де греутате а допулуй коинчид ку координателе центрулуй де греутате а кавитэций. Греутатя спецификэ а парафиней ү есте егалэ ку  $7,5 \cdot 10^{-3} \text{ н/чм}^3$ .

Сэ калкулэм греутатя барей ын ынтрежиме:

$$P_1 = \gamma \cdot s \cdot h = 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 32 \cdot 25 = 192 \text{ н.}$$

Греутатя парафиней скоасе дин кавитате

$$P_2 = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 8,85 \text{ н.}$$

Греутатя допулуй металик

$$P_3 = 100 \text{ н.}$$

Фолосинд дателе деспре позиция допулуй (везь фиг. 98), алкэтуим ын преалабил о табелэ ку ажуторул кэрея гэсим координателе центрулуй де греутате ал ынтрегулуй систем.

Табела 1

Елементул	$P, \text{ н}$	$x, \text{ чм}$	$Px, \text{ нчм}$	$y, \text{ чм}$	$Py, \text{ нчм}$	$z, \text{ чм}$	$Pz, \text{ нчм}$
Бара . . . . .	192	16	3070	12,5	2400	16	3070
Парафина скоасэ дин кавитате . . . . .	—8,85	22	—195	8	—70,8	24,5	—217
Допул металик . . . . .	100	22	2200	8	800	24,5	2450
Сума . . . . .	283,2		5085		3130		5300

Пентру а афла координателе центрулуй де греутате апликэм формулеле

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

сау

$$x_c = \frac{192 \cdot 16 - 8,85 \cdot 22 + 100 \cdot 22}{192 - 8,85 + 100} = \frac{3070 - 195 + 2200}{283,2} \approx 18 \text{ чм.}$$

Ын мод аналог

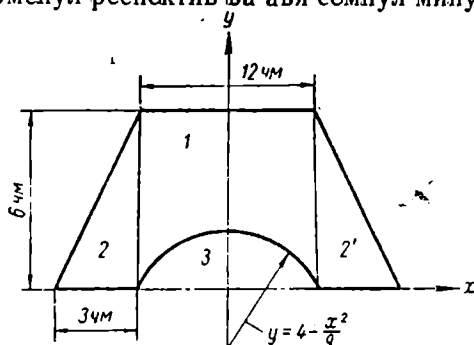
$$y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i} = \frac{3130}{283,2} \approx 11 \text{ чм;}$$

$$z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} = \frac{5300}{283,2} \approx 18,7 \text{ чм.}$$

Сэ се детермине позиция центрулуй де греутате ал фигурий, каре репрезентэ о пьесэ фасонатэ (фиг. 99).

Конформ принципулуй симетрии центрул де греутате комун се гэсеште пе акса де симетрие а фигурий, адикэ пе акса  $Oy$ .

Фолосим метода дивизэрий ын пэрць: партя а тreja есте о кавитате, деч, терменул респектив ва авя сёмнул минус.



Фиг. 99.

Пентру детерминаря центрулуй де греутате ал уней кавитэць де формэ параболикэ апликэм формула\*:

$$y_3 = \frac{\sum \Delta \sigma_i y'_i}{\sigma_3} = \frac{\sum y_i \Delta x_i}{\sigma_3}$$

де унде

$$\sigma_3 y_3 = \frac{1}{2} \int_{-6}^{+6} y^2 dx = \int_0^6 y^2 dx$$

сау

$$\begin{aligned} \sigma_3 y_3 &= \int_0^6 \left( 16 - \frac{8}{9} x^2 + \frac{x^4}{81} \right) dx = \left[ 16x - \frac{8}{27} x^3 + \frac{x^5}{405} \right]_0^6 \\ &= 96 - 64 + \frac{96}{5} = 51,2 \text{ чм}^3. \end{aligned}$$

$$y_C = \frac{\sigma_1 y_1 + 2\sigma_2 y_2 - \sigma_3 y_3}{\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}; \quad \sigma_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ чм}^2; \quad \sigma_1 y_1 = 72 \cdot 3 = 216 \text{ чм}^3;$$

$$\sigma_2 = \sigma'_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ чм}^2; \quad \sigma_2 y_2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ чм}^3;$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 2 \int_0^6 y dx = 2 \int_0^6 \left( 4 - \frac{x^2}{9} \right) dx = 2 \left( 4x - \frac{x^3}{27} \right) \Big|_0^6 \\ &= 2 \left( 24 - \frac{8 \cdot 27}{27} \right) = 32 \text{ чм}^2. \end{aligned}$$

Авем дефинитив

$$y_C = \frac{216 + 2 \cdot 18 - 51,2}{72 + 18 - 32} = \frac{201}{58} = 3,46 \text{ чм}.$$

\* Дрепт элемент де супрафацэ луэм ун дрептунгь авынд ынэлцимя, егала ку  $y_i$ , ши база  $\Delta x_i$ . Центрул де греутате ал унуй асеменя дрептунгь элементар аре ордоната  $y'_i = \frac{y_i}{2}$ .

**II**

# **КИНЕМАТИКА**





## ПРИНЦИПИЛЕ ДЕ БАЗЭ АЛЕ ЧИНЕМАТИЧИЙ ПУНКТУЛУЙ

## § 1. ДИФЕРИТЕ МОДУРЬ ДЕ ДЕФИНИРЕ А МИШКЭРИЙ ПУНКТУЛУЙ

Чинематика, дупэ кум се штие, студиязэ мишкаря пунктулуй сау а корпулуй индепендент де каузеле, каре проваокэ сау скимбэ ачестэ мишкаре, адикэ фэрэ а чине сама де форце.

Прин мишкаря механикэ а унуй пункт се ынцележе скимбаря позицией пунктулуй сау а корпулуй ын спациу. Мишкаря пунктулуй сау а корпулуй аре лок ын спациу ын функции де тимп. Аич спациул се пресупуне спациу тридименсионал ал луй Еуклид. Проприетэциле луй ын тоате пунктеле ши ын тоате дирекцииле сынт ачеляшь ши ну депинд де корпуриле дин ачест спациу ши де мишкэриле лор. Ун астфел де спациу се нумеште *абсолют*.

Пентру а карактериза мишкаря унуй пункт оарекаре сау а унуй корп, требуе сэ компарэм позицииле лор ку позиция унуй алт корп, нумит *корп де реферинцэ*. Системул де координате, легат фикс ку корпул де реферинцэ, се нумеште *систем де реферинцэ*. Дакэ позиция пунктулуй сау а корпулуй ын системул де реферинцэ консидерат ну се скимбэ, адикэ ну вариязэ координателе пунктулуй сау координателе тутурор пунктелор корпулуй, атулч пунктул сау корпул се гэсеште ын репаус ын рапорт ку системул де реферинцэ луат. Дакэ, ынсэ, позиция пунктулуй сау а корпулуй ын рапорт ку системул де реферинцэ алес се скимбэ, адикэ се скимбэ координателе пунктулуй сау координателе унор оарекаре пункте але корпулуй, атулч пунктул сау корпул се мишкэ ын рапорт ку ачест систем де реферинцэ. Мишкаря пунктулуй сау а корпулуй есте тотдяуна о мишкаре релативэ (ын рапорт ку ун оарекаре систем де реферинцэ). Де екземплу, дакэ позиция пунктулуй се дэ прин трей координате картезиене ын системул де координате, легат инвариабил ку пэмынтул, атулч ла скимбаря ачестор координате пунктул се мишкэ ын рапорт ку пэмынтул.

Тимпул се консидерэ ачелаш ын тоате системеле де реферинцэ индепендент де мишкаря лор. Ачест тимп се нумеште *абсолют*. Моментул, де ла каре се ынчепе сокотиря тимпулуй се поате алеже ын кореспундере ку кондицииле проблемей.

Унитэциле де мэсурэ а дистанцей ши а тимпулуй де асеменя се пот алеже ын кореспундере ку кондицииле проблемей. Унитатя де базэ а тимпулуй есте секунда (*сек*), а дистанцей — метрул (*м*).

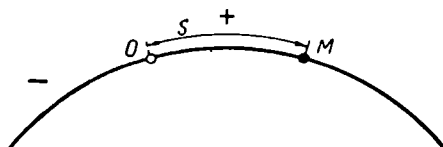
Ын чинематикэ мишкаря се консидерэ дефинитэ ын рапорт ку ун оарекаре систем де реферинцэ. А дефини мишкаря унуй пункт сау а унуй корп ын рапорт ку ун оарекаре систем де ре-

феринцэ — ынсямнэ а да кондицииле, каре пермит де а детермина позиция пунктулуй сау а корпулуй фацэ де ачест систем де реферинцэ ын орьче момент.

Чинематика се девиде ын чинематика пунктулуй ши чинематика корпулуй солид.

### Модул натурал де дефинире а мишкэрий унуй пункт

Ла ачест мод де дефинире а мишкэрий се дэ траектория пунктулуй, адикэ линия, пе каре се мишкэ пункт. Траектория поате фи датэ принтр'о екуацие ын рапорт ку системул де реферинцэ консидерат, сау прин алте карактеристичь жеометриче. Де екземплу, ла студия мишкэрий пунктулуй пе супрафаца пэмынтулуй дрепт траекторие се поате консидера ун оарекаре меридиан, о паралелэ сау о оарекаре алтэ линие дин системул де координате легат фикс ку пэмынтул.



Фиг. 100.

Позиция пунктулуй пе траектория датэ се детерминэ ын фелул урмэтор. Ун пункт оарекаре ал траекторией се консидерэ дрепт пункт инициал пентру мэсураря дистанцей. Пе траекторие се стабилеште сенсул позитив ши негатив де мэсураре а дистанцей. Позиция пунктулуй пе траекторие се детерминэ прин дистанца  $\cup OM = s$  (фиг. 100), мэсурат пе траекторие ши луат ку семнул респектив.

Пентру а детермина валоаря дистанцей есте нечесар сэ алежем о унитате де мэсурэ а дистанцелор. Пентру а мэсура тимпул есте нечесар сэ алежем о унитате де мэсурэ а тимпулуй ши ун момент инициал де ла каре ынчепе мэсураря луй. Де обичей дрепт момент инициал пентру мэсураря тимпулуй се консидерэ моментул, кынд ынчепе мишкаря.

Ла мишкаря пунктулуй дистанца  $s$  вариязэ ын функции де тимпул  $t$ . Деачея мэримя  $s$  есте о функции де тимп, адикэ  $s = f(t)$ .

Ачастэ депендинцэ  $s = f(t)$  се нумеште *лежя дистанцелор* сау екуация мишкэрий пунктулуй пе траекторие. Функция  $s = f(t)$  есте континуэ.

Дакэ се куноаште екуация мишкэрий пунктулуй пе траекторие  $s = f(t)$ , мишкаря пунктулуй се консидерэ дефинитэ. Се поате гэси позиция пунктулуй ын орьче момент. Пентру ачаста ын екуация мишкэрий  $s = f(t)$  субституим валоаря тимпулуй  $t$  ши

обцинем валoаря  $s$ . Депунынд дистанца  $s$  де ла пунктул инициал де мэсураре а дистанцей ын уна сау алтэ парте, ын функции де семнул луй  $s$ , гэсим позиция пунктулуй.

Модул консидерат де дефинире а мишкэрий пунктулуй се нумэште натурал; ел поате фи нумит де асемения мод де дефинире а мишкэрий пунктулуй прин траекторие ши екуация мишкэрий пе еа.

Есте импортант сэ менционэм, кэ пентру екуация мишкэрий  $s=f(t)$  требуе алесе анумите унитэць де мэсурэ а дистанцей ши тимпулуй. Фолосинд алте унитэць екуация ва фи алта.

### Дефинира мишкэрий пунктулуй ын координате картезиене ректангуларе

Сэ рапортэм корпул де референць ла ун систем де координате картезиене ортогонал (фиг. 101). Алежем унитэциле де мэсурэ а дистанцей ши а тимпулуй ши моментул инициал де мэсураре а тимпулуй. Координателе пунктулуй ын мишкаре вариязэ ын функции де тимп, адикэ еле сынт функций континуге де тимп.

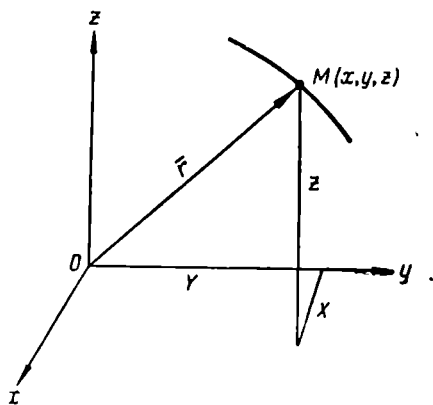
$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Екуациле (1) детерминэ мишкарэ пунктулуй. Субституинд ын екуация (1) валoаря тимпулуй  $t$ , обцинем координателе пунктулуй  $x$ ,  $y$  ши  $z$ . Ачесте координате детерминэ позиция пунктулуй.

Екуациле (1) се нумеск екуациле мишкэрий пунктулуй ын координателе картезиене ректангуларе. Ачесте екуаций сынт екуациле параметриче але траекторией пунктулуй. Дупэ еле се детерминэ ушор екуация траекторией пунктулуй ын координателе картезиене. Ын ачест скоп дин екуациле (1) требуе сэ елиминэм тимпул. Се поате, де екземплу, сэ експримэм дин екуация ынтыя валoаря луй  $t$  прин  $x$  ши сэ субституим ачестэ експрессие ын екуациле а доуа ши а трея. Обцинем атунч доуэ екуаций, каре лягэ координателе  $y$ ,  $x$  ши  $z$ ,  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Екуациле (2) сынт екуациле траекторией унуй пункт ын координателе картезиене.



Фиг. 101.

Қынд пунктул се мишкэ пе о курбэ ын план акселе  $x$  ши  $y$  се пот луа ын планул курбей. Агунч координата  $z$  ва фи ын-тотдяуна егалэ ку зеро ши екуацииле мишкэрий вор фи:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Елиминьнд дин екуацииле (3) тимпул  $t$ , обцинем екуация траекторией пунктулуй ын координателе картезиене ректангуларе  $F(x, y) = 0$ .

Модул консидерат де дефинире а мишкэрий пунктулуй се реферэ ла модуриле де дефинире прин координате.

### Модул векториал де дефинире а мишкэрий пунктулуй

Позиция унуй пункт се поате карактериза принтр'ун вектор де позиции  $\vec{r}$  ын рапорт ку орижиня системулуй де координате картезиене ректангуларе, легат фикс ку корпул де реферинцэ.

Ла мишкаря пунктулуй векторул де позиции  $\vec{r}$  ышь скимбэ валора ын дирекция ши, деч, есте функции де тимп, адикэ

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (4)$$

Екуация (4) се нумеште екуация векториалэ а мишкэрий пунктулуй. Еа се дедуче симплу, дакэ куноаштем мишкаря пунктулуй ын координателе картезиене ректангуларе, адикэ се штиу екуацииле (1). Ын ачест каз

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

сау

$$\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}, \quad (5)$$

унде  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  сынт версорий акселор де координате.

Екуация (5) есте о екуация векториалэ а мишкэрий пунктулуй.

## **§ 2. ВИТЕЗА.**

### Витеза медие ши витеза реалэ а унуй пункт

Фие позиция унуй пункт  $M$  се детерминэ ын моментул  $t$  прин векторул де позиции  $\vec{r}$ , яр ын моментул  $t + \Delta t$  прин векторул де позиции  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  (фиг. 102).

Рапортул динтре крештерэ векторулуй де позиции ал пунктулуй  $\Delta\vec{r}$  ши интервалул де тимп  $\Delta t$  се нумеште витеза медие вектор ын интервалул де тимп  $\Delta t$

$$\vec{v}_{\text{мед}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Витеза медие вектор  $\bar{v}_{\text{мса}}$  есте ориентатэ дупэ секанта  $MM_1$  (фиг. 102).

Трекынд ла лимитэ пентру  $\Delta t \rightarrow 0$ , обцинем векторул витезей реале  $v$  а пунктулуй ын моментул  $t$ . Ачест вектор есте апликат ын пунктул  $M$ , ориентат дупэ танжента ла траектория пунктулуй ын позиция  $M$  (дирекция секантей  $MM_1$  ла лимитэ пентру  $\Delta t \rightarrow 0$  коинчице ку дирекция танжентей) ши евидент есте егал ку  $\frac{d\bar{r}}{dt}$ .

Прин урмаре,

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (6)$$

адикэ векторул витезей реале а пунктулуй есте егал ку деривата ынтыя а векторулуй де позиции ын рапорт ку тимпул ши есте ориентат дупэ танжента ла траектория пунктулуй ын дирекция мишкэрий.

Гэсим модулул векторулуй витезей реале обцинуте:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

унде  $ds$  есте диференциала аркулуй де траектории а пунктулуй.

Есте евидент, кэ

$$\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = 1.$$

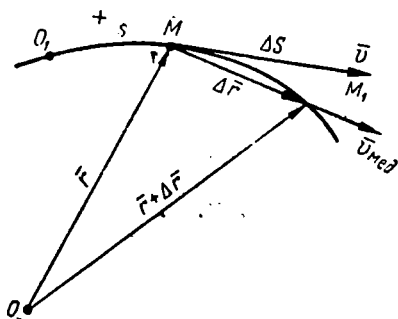
ка лимита рапортулуй унуь арк инфинит де мик, кэтре коарда че-л субынтинде. Сенсул векторулуй  $\frac{d\bar{r}}{ds}$  се стабилеште цинынд са-

ма де фаптул, кэ векторул  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$  есте ориентат дупэ  $\Delta \bar{r}$ , кынд

$\Delta s > 0$  ши ын сенс. контрар луй  $\Delta \bar{r}$ , пентру  $\Delta s < 0$ , адикэ векторул  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$  есте ориентат дупэ коарда ын сенсул мэририй арку-

луй  $s$  ал траекторией. Прин урмаре, [векторул  $\frac{d\bar{r}}{ds}$  фиинд лимита

луй  $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$  есте ориентат дупэ танжента, дусэ ла траектория пунктулуй ын сенсул мэририй аркулуй, адикэ ын сенсул по-



Фиг. 102.

зитив ал траекторией ши ну депинде де дирекция мишкэрий пунктулуй.

Нотэм прин  $\vec{\tau}$  векторул унитате, ориентат дупэ танжента дусэ ла траектория пунктулуй ын сенсул позитив. Атуич  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$  ши дентру витеза реалэ а пунктулуй обцинем:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (7)$$

Нотэм деривателе ын рапорт ку тимпул прин пункте, пусе де асупра функцией деривабиле, де екземплу,  $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$ ,  $\frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  ш. а. м. д.

Фолосинд ачесте нотаций але деривателор, обцинем

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{\tau}. \quad (7')$$

Дин формула (7) се веде, кэ векторул витезэ  $\vec{v}$  а пунктулуй есте егал ку продусул динтре мэримя скаларэ  $\dot{s}$  ши векторул унитате  $\vec{\tau}$ .

Деч, мэримя скаларэ  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  есте проекция векторулуй витезэ а пунктулуй пе танжента, дусэ ла траектория луй. Сенсул позитив пе танжентэ се детерминэ прин векторул  $\vec{\tau}$ , ориентат, дупэ кум се штие, ын сенсул позитив ал траекторией.

Нотэм ачастэ проекция прин  $v_{\tau}$ . Атуич

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = v_{\tau} \text{ ши } \vec{v} = v_{\tau} \vec{\tau}. \quad (8)$$

Фие мишкаря пунктулуй есте дефинитэ принтр'ун мод натурал, адикэ прин траекторие ши екуация мишкэрий пе еа  $s=f(t)$ . Мэримя  $\dot{s}=f'(t)$  поате фи атыт позитивэ, кыт ши негативэ, ши семнул ей се поате афла симплу.

Фие  $\dot{s}=f'(t)>0$ , деривата  $f'(t)$  пентру  $t$  дат есте позитивэ. Прин урмаре, функция  $f(t)$  пентру ачест  $t$  есте крескэтоаре, адикэ дин позиция че кореспунде моментулуй  $t$  пунктул се мишкэ ын сенсул позитив ал траекторией.

Есте евидент, кынд  $\dot{s}=f'(t)<0$  пунктул се мишкэ ын сенсул негатив ал траекторией. Унитэциле витезей сынт м/сек, чм/сек, км/орэ ш. а. м. д.

### Витеза унуй пункт ын координате картезиене ректангуларе

Фие мишкарят унуй пункт есте дефинитэ ын координателе картезиене ректангуларе прин екуацииле

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

Скрием екуация векториалэ а мишкэрий пунктулуй ын фелул урмэтор:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}.$$

Гэсим векторул витезэ а пунктулуй. Ел есте егал ку дери- вата векторулуй де позиции а пунктулуй ын рапорт ку тимпул:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \text{ сау } \vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}.$$

Дин експресия обцинутэ ̄пентру  $\vec{v}$  гэсим проекцииле витезей пунктулуй пе акселе де координате:

$$v_x=\dot{x}, \quad v_y=\dot{y}, \quad v_z=\dot{z}. \quad (9)$$

Сэ формулэм резултатул обцинут: *проекцииле витезей унуй пункт пе акселе де координате сынт егале ку дери- вателе ынтыя але координателор респективе але пунк- тулуй ын рапорт ку тимпул.*

Дупэ ачесте формуле се детерминэ мэримя ши дирекция векторулуй витезэ ал пунктулуй:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \text{ сау } v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2};$$

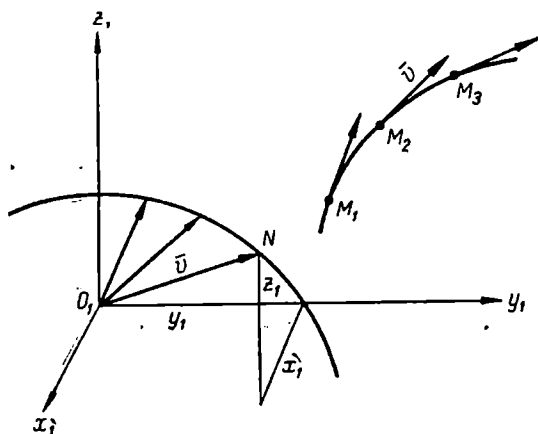
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}, \\ \cos \beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{v}, \\ \cos \gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ын формулеле (10)  $\alpha$ ,  $\beta$  ши  $\gamma$  сынт унгюриле де ориентацие а векторулуй витезэ.

### Ходографул витезей

Сэ нотэм кытэва позиций консекутиве  $M_1, M_2, M_3, \dots$  але унуй пункт пе траектория луй ши векторий витезэ а пунктулуй ын ачесте позиций (фиг. 103). Делласэм векторий витезэ, фэрэ а

скимба мэримиле ши дирекцииле лор, ын пунктул  $O$ . Дакэ вом фаче ачаста пентру тоате позицииле пунктулуй пе траекторие, атунч екстремитэциле векторилор витезэ се вор ситута пе о оарекаре линии континуэ — ходографул витезей. Се нумеште *ходографул витезей* локул жеометрик ал екстремитэцилор векторилор витезэ, дусе динтр'ун сингур пункт, нумит пол, пентру тоате позицииле пунктулуй пе траекторие.



Фиг. 103.

Екуация ходографулуй витезей ын казул кынд мишкаря пунктулуй есте дефинитэ ын координателе ректангуларе се поате кэпэта, дакэ вом депласа витезеле ын орижиня  $O_1$  а системулуй де координате  $x_1, y_1, z_1$ , акселе кэруя сынт паралеле ку акселе системулуй  $x, y, z$ , ын каре есте дефинитэ мишкаря.

Луэм ун пункт оарекаре  $N$  пе ходографул витезей. Нотэм координателе ачестуй пункт прин  $x_1, y_1, z_1$  (фиг. 103). Векторул де позиции а пунктулуй  $N$  есте егал ку  $\vec{O_1N} = \vec{v}$ , унде  $\vec{v}$  есте векторул витезэ а пунктулуй ла мишкаря луй пе траекторие.

Скрием екуацииле мишкэрий пунктулуй ын фелул урмэтор:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t), \\y &= f_2(t), \\z &= f_3(t).\end{aligned}$$

Пентру координателе пунктулуй  $N$  кэпэтэм

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= v_x = \dot{x} = f'_1(t), \\y_1 &= v_y = \dot{y} = f'_2(t), \\z_1 &= v_z = \dot{z} = f'_3(t).\end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Екуацииле (11) сынт екуацииле мишкэрий пунктулуй  $N$  пе ходографул витезей. Елиминэм дин ачесте екуаций тимпул  $t$  ши обцинем екуацииле ходографулуй витезей ын координателе картезиене ректангуларе.

Менционэм, кэ пентру а кэпэта екуацииле траекторией тре-буе сэ елиминэм тимпул  $t$  дин екуацииле мишкэрий, яр пентру а обцине екуацииле ходографулуй витезей — дин деривателе ачестор екуаций ын рапорт ку тимпул.

Индикэм казуриле евиденте: ла мишкаря униформэ а унуй пункт пе о оарекаре курбэ ходографул витезей есте о курбэ пе сфера де о разэ, егалэ ку витеза. Пентру мишкаря ректилиние униформэ ходографул витезей есте ун пункт. Пентру мишкаря ректилиние вариатэ ходографул витезей есте ун сегмент де дряп-тэ финит сау инфинит, паралел ку траектория пунктулуй.

### § 3. АКЧЕЛЕРАЦИЯ

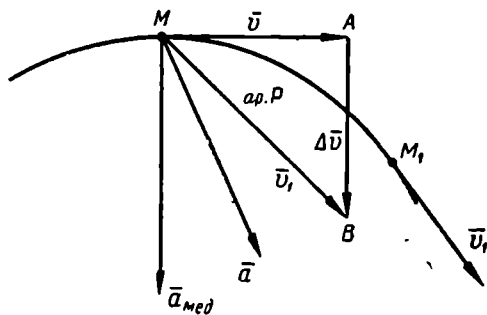
#### Акчелерация медие ши акчелерация реалэ а унуй пункт

Сэ консидерэм доуэ моменте де тимп  $t$  ши  $t + \Delta t$ . Ын мо-ментул  $t$  ун пункт окупэ позиция  $M$  ши аре витеза  $\bar{v}$ . Ын мо-ментул  $t + \Delta t$  пунктул окупэ позиция  $M_1$  ши аре витеза  $\bar{v}_1$  (фиг. 104). Детерминэм крештерэ витезей  $\Delta \bar{v}$ . Пентру ачаста депласэм векторул  $\bar{v}_1$  ын пунктул  $M$ . Уним екстремитэциле векторилор  $\bar{v}$  ши  $\bar{v}_1$  ши кэпэтэм  $\Delta \bar{v} = \overline{AB}$ .

Рапортул динтре крештерэ векторулуй витезэ  $\Delta \bar{v}$  ши ин-тервалул де тимп  $\Delta t$  се нумеште *акчелерация ме-дие* ын интервалул де тимп  $\Delta t$ .

Ла лимитэ, кынд  $\Delta t \rightarrow 0$  обцинем акчелерация ре-алэ (инстантанее), адикэ акчелерация пунктулуй ын моментул  $t$  сау по-зиция  $M$ :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$



Фиг. 104.

Деоарече векторул витезэ есте деривата ынтия а вектору-луй де позиции ын рапорт ку тимпул, авем дефинитив

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (12)$$

адикэ векторул акчелерацие а унуй пункт есте егал ку деривата ынтыя а векторулуй витезэ а пунктулуй ын рапорт ку тимпул сау ку деривата а доуа а векторулуй де позиции а пунктулуй ын рапорт ку тимпул.

Ла детерминаря акчелерацией с'а луат ын консидерацие скимбаря витезей дупэ валоаре, сенс ши дирекция ши деачея адеся еа се нумеште акчелерацие комплетэ а пунктулуй.

Сэ стабилим позиция векторулуй акчелерацие ын рапорт ку траектория. Нотэм прин  $P$  планул триунгулуй  $MAB$  (фиг. 104).

Менционэм, кэ векторул  $\vec{v}_1 \parallel P$  ши векторул  $\vec{a}_{\text{мед}}$ , дус дин пунктул  $M$ , се гэсеште ын планул  $P$ . Кынд  $\Delta t \rightarrow 0$ , планул  $P$  се ротеште ын журул тангентей  $MA$ , рэмынынд паралел ку векторул витезэ а пунктулуй ын позиция а доуа, ши ла лимитэ окупэ о позиция бине детерминатэ ын рапорт ку траектория пунктулуй. Планул, каре репрезинтэ позиция лимитэ а планулуй  $P$ , се нумеште план оскулатор ал курбей (траекторией) ын пунктул  $M$ . Векторул  $\vec{a}_{\text{мед}}$  се афлэ тот тимпул ын планул  $P$ . Ла лимитэ, кынд  $\Delta t \rightarrow 0$  векторул  $\vec{a}_{\text{мед}}$  формязэ векторул акчелерацие  $\vec{a}$ , ситуат ын позиция лимитэ а планулуй  $P$ , адикэ ын планул оскулатор ал траекторией ын пунктул  $M$ .

Афарэ де ачаста, векторул  $\vec{a}_{\text{мед}}$ , авынд дирекция векторулуй  $\Delta \vec{v}$ , есте ориентат спре конкавитатя траекторией. Ачаста есте карактеристик ши пентру лимитэ, адикэ пентру векторул акчелерацие  $\vec{a}$ . Деч, векторул акчелерацией комплете а пунктулуй се афлэ ын планул оскулатор ал траекторией пунктулуй ши есте ориентат спре конкавитатя траекторией.

Акчелерация се мэсоарэ ын  $\text{м/сек}^2$ ,  $\text{см/сек}^2$  ш. а. м д.

### Акчелерация ын координате картезиене, ректангуларе

Пентру ун пункт, мишкаря жэруя есте датэ де екуаций ын координате картезиене ректангуларе, валоаря, дирекция ши сенсул акчелерацией се детерминэ дупэ формула (12). Кэпэтэм

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k},\end{aligned}$$

сау, нотынд деривателе а доуа ын рапорт ку тимпул ку доуэ пункте, пусе де асупра,

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}. \quad (13)$$

Дин експресия (13) обцинем пентру проекцииле векторулуй  $\vec{a}$  пе акселе де координате

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}, \quad (14)$$

адикэ проекцииле векторулуй акчелерацие а пунктулуй пе акселе де координате сынт егале ку деривателе а доуа а координателор респективе але пунктулуй ын рапорт ку тимпул. Дупэ ачесте проекций детерминэм мэрия ши дирекция векторулуй акчелерацие:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\ddot{a}}; \quad \cos \beta_1 = \frac{\ddot{y}}{\ddot{a}}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{\ddot{z}}{\ddot{a}}, \quad (15)$$

унде  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  сынт унгиуриле директоаре але векторулуй акчелерацие.

### Дериваря унуй вектор констант дупэ модул

Сэ консидерэм векторул  $\bar{b} = \bar{b}(u)$ , унде  $u$  есте о мэрие скаларэ вариабилэ. Адмitem, кэ векторул  $\bar{b}$  аре модулул констант  $|\bar{b}| = b = \text{const}$  ши, прин урмаре, се скимбэ нумай дирекция луй.

Конформ дефиницией дериватей:

$$\frac{d\bar{b}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\bar{b}(u + \Delta u) - \bar{b}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{b}}{\Delta u}$$

Пентру а детермина  $\Delta \bar{b}$  дин пунктл  $O$  дучем векторий  $\bar{b}(u)$  ши  $\bar{b}(u + \Delta u)$  ши уним екстремитэциле векторилор  $A$  ши  $B$  (фиг. 105). Конформ ипотезей

$$|\bar{b}(u + \Delta u)| = OB = b \text{ ши } |\bar{b}(u)| = OA = b.$$

Прин урмаре, триунгюл  $OAB$  есте исосчел. Нотэм унгиул  $AOB$  прин  $\Delta \varphi$  ши-л нумим унгь де ротацие а векторулуй. Дин  $\triangle AOB$  гэсим

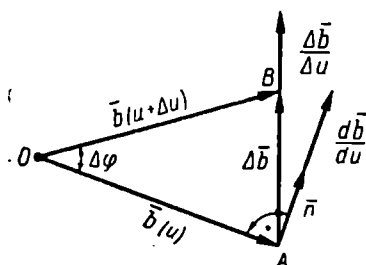
$$|\Delta \bar{b}| = AB = 2b \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2}.$$

Пентру модулул дериватей  $\frac{d\bar{b}}{du}$  авем

$$\left| \frac{d\bar{b}}{du} \right| = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{2b \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta u} \right| = b \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta u} \right| = b \cdot \left| \frac{d\varphi}{du} \right|.$$

Ремаркэм, кэ  $\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \varphi}{2}$  тинде кэтре  $\frac{\pi}{2}$ , кынд  $\Delta u \rightarrow 0$ . Де

аич векторул  $\frac{db}{du}$  есте перпендикулар пе векторул деривабил  $\bar{b}$ . Астфел, модулул ши дирекция векторулуй  $\frac{d\bar{b}}{du}$  сынт стабилизире. Ынтродучем векторул унитате  $\bar{n}$ , колиниар ку векторул  $\frac{d\bar{b}}{du}$  ши



Фиг. 105.

ориентат ын дирекция крештерий унгулуй де ротацие а векторулуй.

Атунч кэпэтэм дефинитив

$$\frac{d\bar{b}}{du} = b \cdot \frac{d\varphi}{du} \cdot \bar{n}. \quad (16)$$

Астфел деривата унуй вектор де модул констант ын рапорт ку ун оарекаре аргумент скалар есте егалэ ку продусул динтре модулул векторулуй ши деривата унгулуй де ротацие а векторулуй ын рапорт ку ачест аргумент ши векторул унитате, перпендикулар пе векторул деривабил ши ориентат ын дирекция мэририй унгулуй де ротацие.

#### Акцелерациле танженциалэ ши нормалэ але унуй пункт

Дупэ кум се штие,  $\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}$  сау  $\bar{v} = v \cdot \bar{\tau}$ . Детерминэм акцелерация пунктулуй ка фиинд деривата векторулуй витезэ а пунктулуй ын рапорт ку тимпул:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s}^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds},$$

унде  $ds$  есте дифференциала аркулуй де траекторие.

Деривата  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  се детерминэ дупэ формула (16), деоарече  $|\bar{\tau}| = 1$  ши

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = |\tau| \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n}_1,$$

унде  $\bar{n}_1$  есте ун вектор унитате, перпендикулар пе векторул  $\bar{\tau}$  ши деч, ориентат дупэ о оарекаре нормалэ ла траекторие.

Мэримя  $\frac{d\varphi}{ds}$ , адикэ лимита рапортулуй унгулуй де ротацие ал тангентей кэтре лунжия аркулуй де курбэ есте курбура курбей ын пунктул дат сау мэримя инверсэ разей курбей ын пунктул дат, адикэ  $\frac{1}{\rho}$ .

$$\bar{a} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{s^2}{\rho} \cdot \bar{n}_1.$$

Сэ пречизэм акум дирекция векторулуй  $\bar{n}_1$ . Партя стынгэ а ултимей егалитэць — векторул акчелерацие ал пунктулуй, се гэсеште ын планул оскулатор ал курбей ын пунктул респектив. Партя дряптэ а ачестей егалитэць есте сума жеометрике а дой векторь, динтре каре примул  $\ddot{s} \cdot \bar{\tau}$  есте ориентат дупэ танжента ла траектория пунктулуй, ши деч, се гэсеште ын ачелаш план оскулатор. Де аич векторул ал дойля  $\frac{s^2}{\rho} \bar{n}_1$  де асеменя се гэсеште ын ачелаш план оскулатор.

Прин урмаре, векторул  $\bar{n}_1$  есте ориентат дупэ нормалэ ла траектория, ситуатэ ын планул оскулатор. Ачастэ нормалэ се нумеште нормала принчипалэ. Нотэм прин  $\bar{n}$  векторул унитате пе нормала принчипалэ (спре конкавитате).

Атунч пентру векторул акчелерацие

$$\bar{a} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{s^2}{\rho} \bar{n}, \quad (17)$$

сау, штинд, кэ  $s = v$ ,

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}. \quad (17')$$

Конформ формулелор (17) сау (17') векторул акчелерацие ал пунктулуй есте егал ку сума жеометрике а дой векторь речи-прок перпендикулярэ, унул динтре каре есте ориентат дупэ танжента ла траекторие, яр алтул дупэ нормала принчипалэ. Аич  $\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \bar{\tau}$  есте векторул акчелерацией танженциале а пункту-

луй;  $\bar{a}_N = \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$  — векторул акчелерацией нормале а пунктулуй.

Сэ консидерэм нормала ла траектория пунктулуй, каре есте перпендикулярэ пе планул оскулатор ал траекторией. Ачастэ нормалэ се нумеште **бинормалэ**. Нотэм векторул унитате ал бинормалей прин  $\bar{b}$  ши-л детерминэм дин егалитатя  $b = \bar{\tau} \times \bar{n}$ . Аст-фел, ын фиекаре пункт ал курбей авем трей дрепте реципрок перпендикуларе: танжента, нормала принчипалэ ши бинормала.

Системул де координате ку орижиня ынтр'ун пункт де пе курбэ, авынд дрепт аксе танжента, нормала принчипалэ ши бинормала се нумеште триедру натурал.

Ын фиекаре пункт ал курбей путем конструи ун триедру натурал.

Пентру проекцииле векторулуй акцелерации ал пунктулуй пе акселе триедрулуй натурал ын позиция респективэ а пунктулуй пе траекторие кэпэтэм дин формулеле (17) ши (17'):

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_b = 0$$

сау

$$a_\tau = \ddot{s}, a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, a_b = 0. \quad (18)$$

Менционэм, кэ векторул акцелераций танженциале се проектязэ нумай пе танжента, дусэ ла траекторие ын мэримя натуралэ ку семнул плус сау минус. Векторул акцелерацией нормале се проектязэ нумай пе нормала принципалэ дусэ ла траекторие ши нумай ку семнул плус. Валоаря алжебрикэ а витезей пунктулуй( $\dot{s}$ ) пентру  $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} > 0$  се мэреште, яр пентру  $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} < 0$  се микшорязэ.

Мэримиле  $a_\tau$  ши  $a_n$  се нумеск де обичей акцелерацииле *танженциалэ* ши *нормалэ* але пунктулуй.

Дупэ ачесте проекций детерминэм мэримя ши дирекция векторулуй акцелерации а пунктулуй:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ сау } a = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{\tau}) = \frac{a_\tau}{a}, \cos(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{a_n}{a} \quad (19)$$

Детерминаря акцелерацией дупэ формулеле (19) есте конвенбилэ, дакэ мишкаря пунктулуй есте дефинитэ ын мод натурал. Ын фигура 106 есте репрезентат триедрул натурал, витеза, акцелерацииле комплетэ, танженциалэ ши нормалэ але пунктулуй.

Пентру диферите казурь партикуларе але мишкэрий унуй пункт авем: пентру мишкаря ректилиние униформэ ши мишкаря курбилиние униформэ, адикэ кынд  $v_\tau = \text{const}$

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0,$$

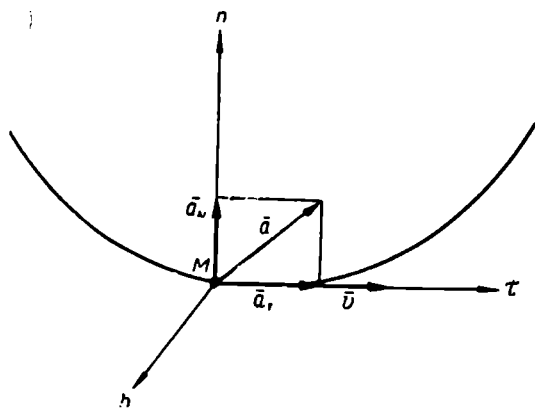
пентру мишкаря ректилиние униформэ ши вариатэ

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

деоарече раза курбий  $\rho$  есте инфинит де маре.

Ла мишкаре ректилиние вариатэ, есте евидент, кэ авем нумай акцелерация танженциалэ.

Ла мишкаря курбилинне вариатэ екзистэ акчелерация тан-  
женциалэ ши чя нормалэ.



Фиг. 106.

Резултателе обцинуте ле ынтродучем ын табела 2.

Табела 2

Фелул мишкэрий	$a_t$	$a_n$	$a$	Траектория, векторул витезэ ши векторул акчелерации
Мишкаре ректили- ние униформэ	0	0	0	
Мишкаре ректили- ние вариатэ	$a_t$	0	$a_t$	
Мишкаре курби- линне униформэ	0	$a_n$	$a_n$	
Мишкаре курби- линне вариатэ	$a_t$	$a_n$	$\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$	

Акчелерация танженциалэ а пунктулуй есте егалэ ку 0, адикэ  $a_t = \frac{dv_t}{dt} = 0$  пентру орьче мишкаре униформэ ши ын моментеле, кынд витеза алжебрикэ  $v_t = \dot{s}$  аре о валoare стационарэ (ын партикулар максимум сау минимум).

Акчелерация нормалэ а пунктулуй есте егалэ ку 0, адикэ  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$  пентру орьче мишкаре ректилиние, ын моментеле кынд витеза  $v$  есте егалэ ку 0 ши ын пунктеле де инфлексиуне але траекторией.

Витеза пунктулуй вариязэ дупэ мэриме ши дирекциие. Пентру а карактериза вариация витезей дупэ валoare требуе, евидент, сэ консидерэм казул мишкэрий ректилиний вариате, кынд се скимбэ нумай мэримя витезей, ын ачест каз  $a_\tau \neq 0$ ,  $a_n = 0$ , яр кынд витеза есте о мэриме константэ  $a_\tau = 0$ . Деачея акчелерация танженциалэ карактеризязэ вариация витезей нумай дупэ мэриме.

Ын казул мишкэрий курбилиний униформе витеза вариязэ нумай дупэ дирекциие ши  $a_\tau = 0$ ,  $a_n \neq 0$ , адикэ акчелерация нормалэ карактеризязэ вариация витезей нумай дупэ дирекциие.

### Мишкаря униформ вариатэ а унуй пункт

Мишкаря унуй пункт се нумеште униформ вариатэ, дакэ акчелерация танженциалэ а пунктулуй есте константэ. Нотынд прин  $v$  мэримя алгебрикэ а витезей  $\dot{s}$ , обцинем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

Интегрынд, гэсим

$$dv = a_\tau dt, \quad v = a_\tau t + C_1.$$

Константа арбитрарэ  $C_1$  о детерминэм дин кондицииле инициале, кынд  $t = 0$ ,

$$v = v_0,$$

унде  $v_0$  есте витеза инициалэ а пунктулуй (моментул инициал де сокотире а тимпулуй се пресупуне, кэ коинчиде ку ынчепутул мишкэрий). Обцинем

$$v_0 = C_1 \text{ ши } v = v_0 + a_\tau t. \quad (20)$$

Детерминэм дистанца  $s$ :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t, \quad ds = v_0 dt + a_\tau t dt \text{ ши } s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} + C_2.$$

Константа арбитрарэ  $C_2$  требуе детерминатэ дин кондицииле инициале. Адмitem, кэ пентру  $t = 0$   $s = 0$ , адикэ пунктул инициал де мэсураре а дистанцелор коинчиде ку позиция инициалэ а пунктулуй.

Пентру ачесте кондиций авем:

$$0 = C_2 \text{ ши } s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (21)$$

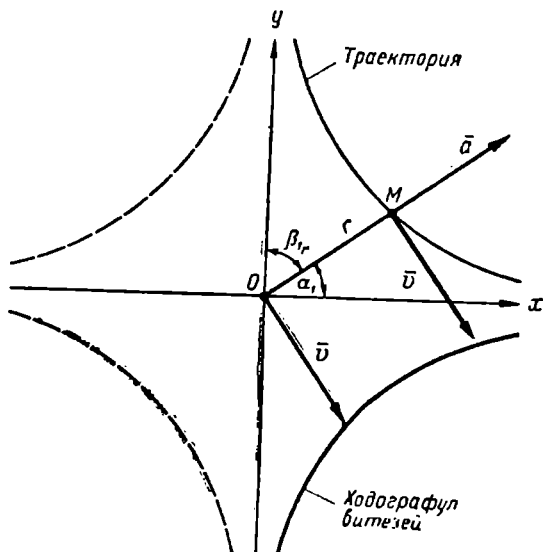


Витезеле ши дистанцеле ла мишкаря униформэ вариатэ се пот детермина ку ажуторул формулелор (20) ши (21). Ремаркэм, кэ ын формулеле мишкэрий униформ вариате фигурязэ нумай акцелерация танженциалэ.

*Екземплул 1.* Мишкаря унуй пункт есте датэ де екуацииле

$$x = d \cdot e^{kt}; \quad y = f \cdot e^{-kt}; \\ d > 0, \quad f > 0, \quad k > 0.$$

Требуе сэ детерминэм траектория пунктулуй, витеза ши акцелерация пунктулуй ын функции де позиция луй, екуация ходографулуй витезей пунктулуй.



Фиг. 107.

Мишкаря пунктулуй есте датэ ын координате ректангуларе. Пентру а детермина екуация траекторией требуе сэ елиминэм дин екуацииле мишкэрий тимпул  $t$ . Ынмулцинд пэрциле стынжъ ши пэрциле дрепте але екуациилор мишкэрий, обцинем екуация траекторией

$$xy = d \cdot f.$$

Траектория есте о хиперболэ екиаксиалэ; акселе де координате сынт асимптотеле хиперболей; дакэ  $d > 0$ ,  $f > 0$  рамуриле хиперболей сынт ситуате ын кадранул ынтый ши ал трейля (фиг. 107).

Витеза пунктулуй о детерминэм дупэ проекцииле ей пе акселе де координате. Пентру проекцииле витезей авем

$$v_x = \dot{x} = dke^{kt}, \quad v_y = \dot{y} = -fke^{-kt}.$$

Модулул витезей ши косинусуриле директоаре але векторулуй витезей се калкулязэ дупэ формулеле:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = k \sqrt{(de^{kt})^2 + (-fe^{-kt})^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{dke^{kt}}{v}, \quad \cos \beta = \frac{\dot{y}}{v} = -\frac{fke^{-kt}}{v}.$$

Ам обцинут модулул ши дирекция витезей пунктулуй ын функции де тимп. Конформ кондициилор проблемей витеза требуе афлатэ ын функции де позиция пунктулуй, адикэ ын функции де координате.

Субституинд ( $de^{kt} = x$  ши  $fe^{-kt} = y$ ) ши пунынд  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ , унде  $r$  есте модулул векторулуй де позиции ал пунктулуй, гэсим

$$v = k \sqrt{x^2 + y^2} = kr;$$

$$\cos \alpha = \frac{kx}{kr} = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = -\frac{ky}{kr} = -\frac{y}{r}.$$

Пентру проекциле акчелерацией пе акселе де координате авем

$$a_x = \ddot{x} = dk^2e^{kt} = k^2x, \quad a_y = \ddot{y} = fk^2e^{-kt} = k^2y,$$

ши деч авем

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2} = k^2r; \quad \cos \alpha_1 = \frac{\ddot{x}}{a} = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\ddot{y}}{a} = \frac{y}{r}.$$

Афлэм екуация ходографулуй витезей. Нотэм координателе куренте але пунктелор ходографулуй витезей прин  $x_1$  ши  $y_1$ . Дин дефиниция ходографулуй витезей

$$x_1 = v_x = dke^{kt}, \quad y_1 = v_y = -fke^{-kt}.$$

Ынмулцинд ачесте екуаций ынтре еле, гэсим екуация ходографулуй витезей

$$x_1 y_1 = -dfk^2.$$

Ходографул витезей есте о хиперболэ екиаксиалэ (акселе ачестей хиперболе ну сынт егале ку акселе траекторией), рамуриле хиперболей сынт ситуате ын кадранул ал дойля ши ал патруля. Фачем конструкция (фиг. 107).

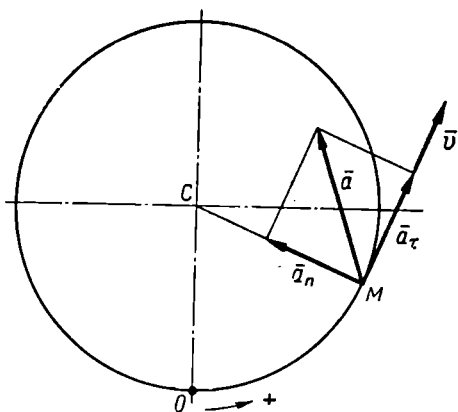
Дин екуациле мишкэрий пентру кондициле  $d > 0$ ,  $f > 0$  урмязэ, кэ пентру орьче момент  $x > 0$ ,  $y > 0$ , адикэ пунктул тот тимпул се афлэ ын кадранул ынтый. Пе рамуриле траек-

торией луэм ын кадранул ынтый о позиции арбитрарэ а пунктулуй  $M$  ку координателе  $x$  ши  $y$  ши векторул де позиции  $\vec{r}$ . Конструим векторул витезей. Дин экспресииле пентру  $\cos \alpha$  ши  $\cos \beta$  обсервэм, кэ  $\cos \alpha > 0$  ши  $\cos \beta < 0$ , адикэ  $\alpha$  есте ун унгъ аскуцит,  $\beta$  — ун унгъ обтуз. Ориентэм векторул витезэ  $\vec{v}$  дупэ танжента ла траекторие асфел, ка сэ сатисфакэ ачесте кондиций. Ачелаш резултат се поате кэпэта ши дин екуацииле мишкэрий. Требуе сэ ремаркэм, кэ ла крештеря тимпулуй  $t$  валоаря луй  $x$  крешите, яр а луй  $y$  се микшорязэ.

Конструим векторул акчелерацие а пунктулуй. Дин экспресииле пентру  $\cos \alpha_1$  ши  $\cos \beta_1$  урмязэ, кэ  $\alpha_1$  ши  $\beta_1$  синт унгюриле директоаре але векторулуй де позиции  $\vec{r} = \vec{OM}$  а пунктулуй. Прин урмаре, векторул акчелерацие а пунктулуй есте ориентат дупэ векторул де позиции.

Дин экспресииле пентру  $x_1$  ши  $y_1$  се веде, кэ тотляуна  $x_1 > 0$ ,  $y_1 < 0$ , адикэ екстремитатя векторулуй витезэ дескрие о рамурэ де гиперболэ, ситуатэ ын кадранул ал патруля.

**Екземплул 2.** Мишкаря унуй пункт пе о чиркумферинцэ де разэ  $R = 10$  чм есте датэ де екуация  $s = 2t^2 - 2t + 6$  ( $s$  се мэсоарэ ын чм,  $t$  — ын сек). Пунктул инициал  $O$  де мэсураре а



Фиг. 108.

дистанцей есте екстремитатя инфериоарэ а диаметрулуй вертикал; сенсул позитив ал мэсурэрий дистанцей се сокоате контрар ротацией ачелор де часорник. Моментул инициал де ла каре се ынчепе сокотиря тимпулуй койнчиде ку моментул, кынд ынчепе мишкаря. Сэ се детермине витезэ ши акчелерация пунктулуй песте 2 сек дупэ ынчепутул мишкэрий (фиг. 108).

Мишкаря пунктулуй есте датэ ын мод натурал. Детерминэм витезэ ка деривата дистанцей ын рапорт ку тимпул  $v = s' = 4t - 2$ , пентру моментул  $t = 2$  сек гэсим  $v = 6$  чм/сек.

Акчелерация пунктулуй се афлэ дупэ акчелерация танженциалэ ши чя нормалэ:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s} = 4 \text{ чм/сек}^2, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ чм/сек}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{16 + 12,96} = 5,38 \text{ чм/сек}^2.$$

Пентру а конструи векторул витезэ ши векторул акчелерацие а пунктулуй детерминэм позиция пунктулуй пентру моментул  $t=2$  сек. Пентру ачаста ын екуация мишкэрий субституим  $t$  прин валоаря са ши кэпэтэм  $s=2\cdot 4-2\cdot 2+6=10$  чм. Акум дин пунктул 0 ын сенсул позитив ал сокотирий дистанцелор депунем пе траекторие дистанца де 10 чм ши кэпэтэм позиция пунктулуй  $M$ .

$$\text{Ын фигура } 108 \quad \angle OCM = \frac{s}{R} = 1 \text{ рад.}$$

Пе танжента дусэ ла траекторие ын пунктул  $M$  ын сенсул позитив (деоарече пентру моментул консидерат  $\ddot{s} > 0$ ) депунем векторул витезэ  $\vec{v}$ .

Дупэ ачаста конструиим акчелерацииле нормалэ, танженциалэ ши комплетэ а пунктулуй. Акчелерация танженциалэ о ориентэм ын сенсул позитив ал траекторией, деоарече  $\ddot{s} > 0$ .

*Екземплул 3.* Мишкаря унуй пункт есте датэ де екуация  $x=2t$ ,  $y=2t^2$ . Сэ се детермине раза де курбурэ а траекторией пентру позиция пунктулуй ын моментул  $t=1$  сек ( $t$ -ын сек;  $x$  ши  $y$  ын чм).

Раза де курбурэ а траекторией пунктулуй фигурязэ ын экспресия акчелерацией нормале  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ . Де аич  $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ . Требуе сэ детерминэм витеза ши акчелерация нормалэ. Детерминэм витеза дупэ проекцииле ей пе акселе де координате

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4 + 16t^2} = 2\sqrt{1 + 4t^2}.$$

Куноскынд витеза пентру моментул  $t$ , детерминэм акчелерация танженциалэ:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \cdot 8 \cdot t}{2\sqrt{1+4t^2}} = \frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Детерминэм акчелерация комплетэ а пунктулуй дупэ проекцииле ей пе акселе де координате:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 4 \text{ чм/сек}^2.$$

Дупэ акчелерация комплетэ ши чя танженциалэ афлэм акчелерация нормалэ:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{16 - \frac{64t^2}{1+4t^2}} = \frac{4}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Пентру раза де курбурэ а траекторией авем

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4(1+4t^2) \sqrt{1+4t^2}}{4} = (1+4t^2)^{3/2}.$$

Дупэ ачасть формулэ се детерминэ разэ де курбурэ а траекторией пунктулуй ын орьче момент  $t$ . Пентру  $t = 1$  сек гэсим

$$\rho = 5\sqrt{5} \text{ чм.}$$

#### § 4. ВИТЕЗА ШИ АКЧЕЛЕРАЦИЯ ПУНКТУЛУЙ ЫН КООРДОНАТЕ ПОЛАРЕ

Сэ консидерэм казул мишкэрий плане. Луэм акса поларэ ын планул траекторией, яр позиция пунктулуй о детерминэм прин координателе поларе  $r$  ши  $\varphi$  (фиг. 109). Ла мишкаря пунктулуй координателе  $r$  ши  $\varphi$  се скимбэ ку скимбаря тимпулуй, адикэ

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t). \quad (22)$$

Екуацииле (22) сынт екуацииле мишкэрий унуй пункт ын координателе поларе пентру казул мишкэрий плане.

Ынтродучем векторий унитате: векторул  $\bar{r}_0$  ориентат дупэ векторул де позиции а пунктулуй, ши векторул  $\bar{\rho}_0$  перпендикуляр пе ел ши ориентат ын сенсул крештерий унгулуй  $\varphi$ . Вом авя  $\bar{r} = r\bar{r}_0$ .

Детерминэм витеза  $\bar{v}$  а пунктулуй ка 'деривата разей вектоаре а пунктулуй ын рапорт ку тимпул:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = r \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt} \bar{r}_0.$$

Деривата  $\frac{d\bar{r}_0}{dt}$  о гэсим ка деривата унуй вектор констант дупэ модул. Кэпэтэм

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} \bar{r}_0 + r \frac{d\varphi}{dt} \bar{\rho}_0.$$

Дин ачасть формулэ се веде, кэ векторул витезэ а пунктулуй есте егал ку сума жеометрикэ а дой векторь, унул динтре каре есте ситуат пе векторул де позиции а пунктулуй  $\bar{r} = \overline{OM}$ , яр ал дойля есте перпендикуляр пе ачест вектор де позиции. Пентру проекцииле векторулуй витезэ пе дирекция векторулуй де позиции а пунктулуй ши пе дирекция, перпендикулярэ пе ачасть разэ вектоаре, авем

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \text{ ши } v_\rho = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi}. \quad (23)$$

Ачесте проекций се нумеск респектив витезеле радиалэ ши чя трансверсалэ а пунктулуй. Еле се детерминэ симплу дин екуацииле де мишкаре а пунктулуй.

Куноскынд витезеле радиалэ ши трансверсалэ се поате детермина мэрима ши дирекция витезей пунктулуй

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} \text{ сая } v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2},$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\bar{v}, \bar{r}_0) &= \frac{\dot{r}}{v}, \\ \cos(\bar{v}, \bar{p}_0) &= \frac{r\dot{\varphi}}{v} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Акчелерация пунктулуй се детерминэ ка деривата векторулуй витезэ ын рапорт ку тимпул:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\bar{r}_0 + r\dot{\varphi}\bar{p}_0) = \\ &= \ddot{r}\bar{r}_0 + \dot{r}\frac{d\bar{r}_0}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\bar{p}_0 + r\ddot{\varphi}\bar{p}_0 + r\dot{\varphi}\frac{d\bar{p}_0}{dt}. \end{aligned}$$

Деривата  $\frac{d\bar{p}_0}{dt}$  о гэсим ка деривата унуй вектор констант дупэ модул:

$$\frac{d\bar{p}_0}{dt} = |\bar{p}_0| \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot (-\bar{r}_0) = -\dot{\varphi}\bar{r}_0.$$

Субституинд ын експресия пентру векторул  $\bar{a}$  валориле деривателор  $\frac{d\bar{r}_0}{dt}$  ши  $\frac{d\bar{p}_0}{dt}$ , ши групынд термений, гэсим

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{r}_0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{p}_0. \quad (25)$$

Обсервэм, кэ векторул акчелерации а унуй пункт есте егал ку сума жеометрике а дой векторы, унул динтре каре есте ситуат пе векторул де позиции а пунктулуй, яр алтул есте перпендикулар пе ел.

Пентру проекциле акчелерацией пе дирекция векторулуй де позиции а пунктулуй ши дирекция перпендикуларэ пе еа, авем

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (26)$$

Ачесте проекций се нумеск респектив акчелераций радиалэ ши трансверсалэ але пунктулуй.

Формула а доуа дин (26) се поате репрезента ши астфел:

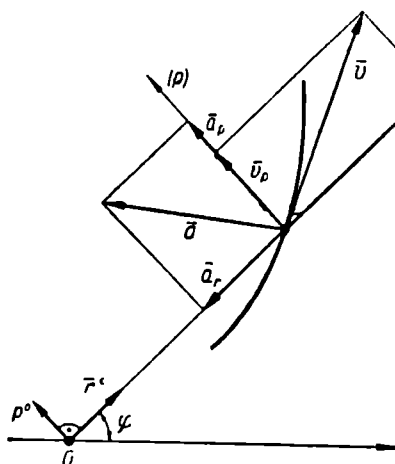
$$a_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}). \quad (26')$$

О асемня екопримаре а акчелерацией трансверсале се фоло-  
сөште пеларгы ын мулте пэрць але механикий.

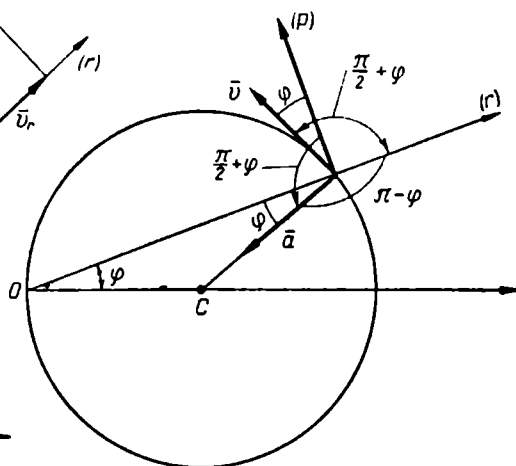
Пентру валоаря ши дирекция акчелерацией пунктулуй авем

$$a = \sqrt{\bar{a}_r^2 + \bar{a}_p^2}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{r}_0) = \frac{a_r}{a}, \quad \cos(\bar{a}, \bar{p}_0) = \frac{a_p}{a}. \quad (27)$$

Ын фигура 109 сынт ынфэцишате витезеле ши акчелерац ниле  
радиале ши трансверсале але пунктулуй.



Фиг. 109.



Фиг. 110.

**Екземплу.** Мишкаря унуь пункт есте датэ ын координателе  
поларе прин екуацииле

$$r = 2d \cos kt, \\ \varphi = kt, \quad d > 0, \quad k > 0.$$

Сэ се детермине екуация траекторией, витеза ши акчелера-  
ция пунктулуй. Екуация траекторией о гэсим, елиминынд дин  
екуацииле мишкэрий тимпул  $t$ ,  $r = 2d \cos \varphi$ . Траектория есте о  
чиркумферинцэ де разэ  $d$ , ку центрул пе акса поларэ, каре трече  
прин пол (фиг. 110).

Детерминэм витеза:

$$v_r = \dot{r} = -2dk \sin kt, \quad v_p = r\dot{\varphi} = 2dk \cos kt;$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 2dk, \quad \cos(\bar{v}, \bar{r}_0) = \frac{v_r}{v} = -\sin kt = -\sin \varphi;$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{p}_0) = \frac{v_p}{v} = \cos kt = \cos \varphi; \quad \angle(\bar{v}, \bar{r}_0) = \frac{\pi}{2} + \varphi;$$

$$\angle(\bar{v}, \bar{p}_0) = \varphi.$$

Афлэм акчелерация:

$$a_r = r - r\dot{\varphi}^2 = -2dk^2 \cos kt - 2dk^2 \cos kt = -4dk^2 \cos kt;$$

$$a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -4dk^2 \sin kt;$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2} = 4dk^2, \cos(\bar{a}, \bar{r}_0) = \frac{a_r}{a} = -\cos kt = -\cos \varphi;$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{p}_0) = \frac{a_p}{a} = -\sin kt = -\sin \varphi; \quad \angle(\bar{a}, \bar{r}_0) = \pi - \varphi;$$

$$\angle(\bar{a}, \bar{p}_0) = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Конструиря векторулуй витезэ ши а векторулуй акчелерацие а пунктулуй есте арэтатэ ын фигура 110. Деоарече мишкаря пунктулуй есте униформэ ( $v = \text{const}$ ) ши пунктул аре нумай акчелерацие нормалэ, векторул витезэ есте ориентат дупэ тангентэ ла чиркумферинцэ, яр векторул акчелерацие — дупэ разэ спре чен-трул чиркумферинцей.



## ЧИНЕМАТИКА ПУНКТУЛУЙ ҮН КООРДОНАТЕ КУРБИЛИНИЙ

## § 1. НОЦИУНИЛЕ ЖЕНЕРАЛЕ

Дулэ кум се штие, позиция унуй пункт ын спацуу се детерминэ де координателе картезиене ректангуларе. Орьче трей мэримь, каре детерминэ унивок позиция унуй пункт ын спацуу, пот фи консидерате дрепт координателе пунктулуй. Ачесте координате жeneralизате се нумеск координате курбилиний. Пентру а детермина позиция пунктулуй пе план сынт суфициенте, евидент, доуэ координате.

Ынтродучеря координателор курбилиний есте кондиционатэ де кондицииле практиче але проблемелор, симпличитатя детерминэрий позицией, екзистенца апарателор респективе ш. а. м. д. Де екземплу, позиция цинтей ын артилерие се детерминэ адеся прин дистанцеле  $r_1$  ши  $r_2$  де ла доуэ пункте де обсервация А ши В. Ачесте дистанце детерминэ позиция пунктулуй ынтр'ун оарекаре дин семипланеле, мэржините де дряпта АВ. Астфел, дистанцеле  $r_1$  ши  $r_2$  се пот консидера дрепт координате курбилиний але пунктулуй пентру унул дин семиплане. Сэ консидерэм трей функций унивоचे але координателор картезиене але пунктулуй:

$$q_1 = \varphi_1(x, y, z), q_2 = \varphi_2(x, y, z), q_3 = \varphi_3(x, y, z).$$

Адмitem, кэ дин ачесте екуаций координателе  $x, y, z$  се експримэ унивок прин  $q_1, q_2, q_3$ , адикэ

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), y = f_2(q_1, q_2, q_3), z = f_3(q_1, q_2, q_3).$$

Ачесте мэримь сынт ниште функций унивоचे. Атунч мэримиле  $q_1, q_2, q_3$  се пот консидера ка координате курбилиний але пунктулуй.

Векторул де позиции а пунктулуй  $\vec{r} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$  есте евидент о функции де координателе  $q_1, q_2, q_3$ , адикэ  $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ .

Фие координателе  $q_1, q_2, q_3$  ау валорь фиксе  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ачесте валорь детерминэ ын спацуу пунктул  $M_0$  ку координателе:

$$x_0 = f_1(\alpha, \beta, \gamma), y_0 = f_2(\alpha, \beta, \gamma), z_0 = f_3(\alpha, \beta, \gamma).$$

Скимбэм акум координата  $q_1$ . Челелалте доуэ координате ау валориле де май ынаните. Пунктул дескрие ын ачест каз о курбэ детерминатэ де екуацииле

$$x = f_1(q_1, \beta, \gamma), y = f_2(q_1, \beta, \gamma), z = f_3(q_1, \beta, \gamma).$$

Дакэ скимбэм координата  $q_2$ , лэсынд нескимбате коордона-

телә  $q_1$  ши  $q_3$ , пунктул дескрие о алтә курбә, детерминатә де екуацииле

$$x = f_1(\alpha, q_2, \gamma), y = f_2(\alpha, q_2, \gamma), z = f_3(\alpha, q_2, \gamma).$$

Скимбынд нумай координата а трея кәпәтәм курба

$$x = f_1(\alpha, \beta, q_3), y = f_2(\alpha, \beta, q_3), z = f_3(\alpha, \beta, q_3).$$

Ачесте курбе се нумеск линий де координате ын пунктул  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Прин фиекарә пункт ал спациулуй трек трей линий де координате.

Астфел, *линии де координате* пентру о оарекаре координатә се нумеште курба, пе каре о дескрие пунктул ла скимбаря нумай ачестей координате.

Ла скимбаря а доуә координате курбилий, де екземплу,  $q_1$  ши  $q_2$  ши пентру валоаря фиксә а координатей а трея, координателе картезиене але пунктулуй сатисфак екуацииле

$$x = f_1(q_1, q_2, \gamma), y = f_2(q_1, q_2, \gamma), z = f_3(q_1, q_2, \gamma).$$

Ачесте експресий сынт екуацииле уней оарекаре супрафеце. Дин примеле доуә екуаций  $q_1$  ши  $q_2$  се пот експрима, де екземплу, прин  $x$  ши  $y$ . Субституим ачесте експресий ын екуация а трея ши обцинем нумай о сингурә екуация, каре лятә координателе пунктулуй. Ачәстә екуация токмай детерминә о супрафецә. Ачәстә супрафецә се нумеште супрафецә де координате  $(q_1, q_2)$ .

Аналог се пот кәпәта супрафецелә де координате  $(q_1, q_3)$  ши  $(q_2, q_3)$ . Прин фиекаре пункт ал спациулуй се пот дуче трей супрафеце де координате.

Танжентеле дусе ла линииле де координате ынтр'ун оарекаре пункт се нумеск *аксе де координате* але координателор курбилий ын ачест пункт. Нотәм акселе де координате респектив прин  $(q_1), (q_2), (q_3)$ .

Планеле танженте ла супрафецелә де координате се нумеск *плане де координате*.

Нотәм векторий унитате ай акселор де координате ынтр'ун оарекаре пункт респектив прин  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Ачешть векторь сынт ориентаць ын дирекция крештерий координателор.

Системул де координате курбилий се нумеште ортогонал, дакә акселе де координате ын фиекарә пункт сынт речипрок перпендикуларе.

Ын челе че урмязә вом черчета нумай системеле де координате ортогонале. Дирекцииле векторилор унитате  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  сынт диферите ын диферите пункте але спациулуй ши се скимбә ла тречеря де ла ун пункт ла алтул. Сә скрием експресииле пентру ачешть векторь.

Екуация линейей де координате пентру  $q_1$  ын формэ векториалэ аре аспектул:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, \beta, \gamma) = f_1(q_1, \beta, \gamma) \cdot \bar{i} + f_2(q_1, \beta, \gamma) \cdot \bar{j} + f_3(q_1, \beta, \gamma) \cdot \bar{k}.$$

Векторул  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$  есте ориентат дупэ танжента дусэ ла линия де координате ын дирекция крештерий луй  $q_1$ . Не путем конвинже де ачаста, консидерынд мэримя  $q_1$  дрепт ун интервал де тимп. Прин урмаре, векторий  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$  ши  $\bar{e}_1$  ау унул ши ачелаш сенс. Дупэ ачаста гэсим

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \bar{k}$$

ши

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} = L_1. \quad (1)$$

Пентру векторул унитате  $\bar{e}_1$  кэпэтэм

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}.$$

Аналог

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{L_2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}, \quad \bar{e}_3 = \frac{1}{L_3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}. \quad (2)$$

Мэримиле  $L_1, L_2, L_3$  се нумеск коефициенций луй Ляме.

## **§2. ДЕТЕРМИНАРЯ ВИТЕЗЕЙ УНУЙ ПУНКТ ЫН КООРДОНАТЕ КУРБИЛИНИЙ**

Ла мишкаря унуй пункт координателе луй курбилиний вариязэ ку скимбаря тимпулуй, адикэ сынт функций ын рапорт ку тимпул. Екуация векториалэ а мишкэрий пунктулуй аре аспект

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Детерминэм витеза ка деривата векторулуй де позиции а пунктулуй ын рапорт ку тимпул

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3. \quad (3)$$

Дин екуацииле (2) гэснм

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = L_1 \bar{e}_1, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = L_2 \bar{e}_2, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} = L_3 \bar{e}_3,$$

ши дефинитив пентру векторул витезэ

$$\bar{v} = L_1 \dot{q}_1 \bar{e}_1 + L_2 \dot{q}_2 \bar{e}_2 + L_3 \dot{q}_3 \bar{e}_3.$$

Пентру ун систем ортогонал де координате проекцииле витезей пе акселе де координате ау форма

$$v_{q_1} = L_1 \dot{q}_1, \quad v_{q_2} = L_2 \dot{q}_2, \quad v_{q_3} = L_3 \dot{q}_3. \quad (4)$$

Мэримя витезей о калкулэм дупэ формула

$$v = \sqrt{(v_{q_1})^2 + (v_{q_2})^2 + (v_{q_3})^2} \text{ сау } v = \sqrt{L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + L_3^2 \dot{q}_3^2}. \quad (5)$$

### § 3. ДЕТЕРМИНАРЯ АКЧЕЛЕРАЦИЕЙ УНУЯ ПУНКТ ҮН КООРДОНАТЕ КУРБИЛИНИЙ

Сэ детерминэм проекцииле векторулуй акчелерацие пе акселе системулуй ортогонал де координате курбилинний

$$a_{q_1} = \bar{a} \bar{e}_1 = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{1}{L_1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1},$$

$$L_1 a_{q_1} = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right) - \bar{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}. \quad (6)$$

Дин експресия (3) пентру векторул витезэ авем

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1}. \quad (7)$$

Конформ регулий де дифференциере а уней функций компусе авем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1^2} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_2 \partial q_1} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_3 \partial q_1} \cdot \dot{q}_3.$$

Деривынд немижлочит векторул витезэ  $\bar{v}$  (3) ын рапорт ку координата  $q_1$ , авем:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1^2} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \cdot \dot{q}_3.$$

Компарынд ачесте резултате, кэпэтэм:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1}. \quad (8)$$

Фолосинд резултателе (7) ши (8) дин експресия (6), авем

$$L_1 a_{q_1} = \frac{d}{dt} \left( \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1}. \quad (9)$$

Партя дряптэ а формулей (9) се поате трансформа, циньнд сама де егалитэциле:

$$\begin{aligned} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (\bar{v} \bar{v}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{1}{2} v^2 \right); \\ \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} (\bar{v} \bar{v}) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned}$$

Пентру а скрие май пе скурт резултатул дефинитив, нотэм

$$T = \frac{1}{2} v^2.$$

Атунч дин екуация (9) авем

$$a_{q_1} = \frac{1}{L_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right).$$

Аналог

$$a_{q_2} = \frac{1}{L_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right), \quad a_{q_3} = \frac{1}{L_3} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} \right). \quad (10)$$

Мэримя акчелерацией о гэсим дупэ формула

$$a = \sqrt{a_{q_1}^2 + a_{q_2}^2 + a_{q_3}^2}.$$

*Екземплу.* Сэ консидерэм ун систем план де координате поларе. Евидент, вор фи ну трей координате, чи нумай доуэ. Линииле де координате пентру ун оарекаре пункт  $M(r, \varphi)$  сынт: пентру координата  $r$  — о линии дряптэ, пе каре есте ситуат векторул де позиции а пунктулуй; пентру координата  $\varphi$  — о циркумферинцэ де разэ  $r$  ши ку центрул ын полул  $O$  (фиг. 111).

Акселе де координате: пентру координата  $r$  акса де координате коинчиде ку линия де координате; сенсул позитив, адикэ сенсул ын дирекция крештерий луй  $r$ , коинчиде ку сенсул разей вектоаре а пунктулуй; пентру координата  $\varphi$  — о дряптэ, тангентэ ла циркумферинцэ, — сенсул позитив пе ачастэ аксэ есте ориентат ын дирекция крештерий унгулуй  $\varphi$ .

Обсервэм, кэ системул де координате есте ортогонал.

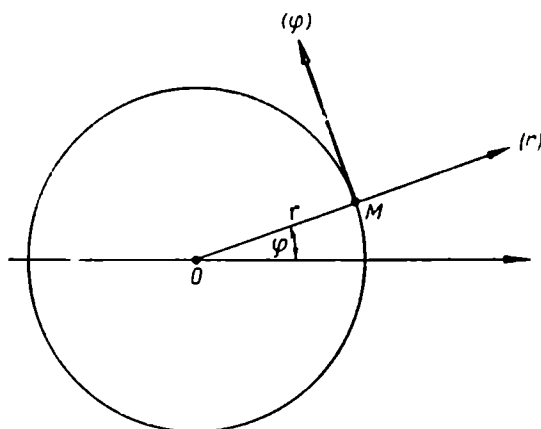
Релация динтре координателе поларе ши челе картезиене але пунктулуй се експримэ прин формуле:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Дупэ формула (1) детерминэм коэффициенций луй Ляме:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad L_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = 1;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi, \quad L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = r.$$



Фиг. 111.

Пентру проекциле витезей пунктулуй пе акселе ( $r$ ) ши ( $\varphi$ ) дупэ формулеле (4) кэпэтэм

$$v_r = L_r \cdot \dot{r} = \dot{r}, \quad v_\varphi = L_\varphi \cdot \dot{\varphi} = r\dot{\varphi}.$$

Валоаря витезей се афлэ дупэ формула

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}.$$

Гэсим акум проекциле акчелерацией пе акселе ( $r$ ) ши ( $\varphi$ ).  
Пентру ачаста детерминэм  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Апликынд формулеле (10), гэсим  $a_r$  ши  $a_\varphi$ . Пентру  $a_r$  авем

$$a_r = \frac{1}{L_r} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial r} = r\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r},$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Детерминэм  $a_\varphi$ :

$$a_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi};$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = \frac{1}{r} (2r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi}) = r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}.$$

Компарынд формулеле кэпэте пентру  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $a_r$ ,  $a_\varphi$  ку формулеле обцинуте пентру детерминаря витезей ши акчелерацией пунктулуй ын координате поларе, обсервэм, кэ еле коинчид комплет.

*Екземплу.* Сэ консидерэм ун систем де координате чилиндриче. Позиция унуй пункт се детерминэ прин мэримиле  $r$ ,  $\varphi$  ши  $z$  (фиг. 112).

Линииле де координате ынтр'ун оарекаре пункт  $M(r, \varphi, z)$  сынт: пентру координата  $r$  — о линии дряптэ, каре трече прин пунктул дат ши интерсектязэ акса  $z$  суб ун унгь дрепт; пентру координата  $\varphi$  — о чиркумферинцэ де разэ  $r$  ын планул, перпендикуляр пе акса  $z$ , ши ку чентрул пе акса  $z$ ; пентру координата  $z$  — о дряптэ, паралелэ ку акса  $z$  ши каре трече прин пунктул дат.

Акселе де координате  $(r)$  ши  $(z)$  коинчид ку линииле де координате пентру  $r$  ши  $z$ ; акса де координате  $(\varphi)$  есте о дряптэ, тангентэ

ла линия де координате  $\varphi$ , адикэ ла чиркумферинцэ. Есте евидент, кэ системул де координате есте ректангулар.

Ынтре координателе  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ши координателе  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  екзистэ урмэтоаря релацие:

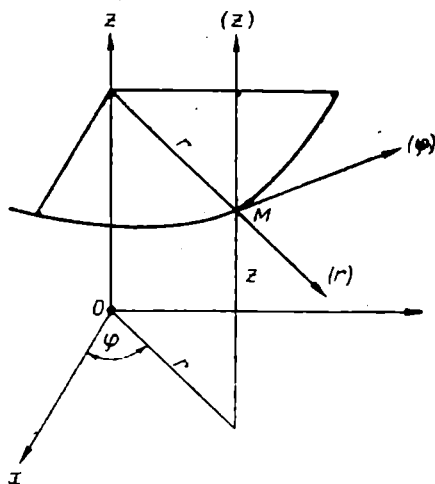
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Дупэ формулеле (1) детерминэм коефициенций Ляме:

$$L_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1;$$

$$L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r;$$

$$L_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$



Фиг. 112.

Проекции витезей пе акселе де координате ( $r$ ), ( $\varphi$ ) ши ( $z$ ) калкулате дупэ формулеле (4) сынт

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Валоаря витезей се детерминэ ку ажуторул формулей

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.$$

Обцинем функция  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Детермининд проекцииле акчелерацией пе акселе ( $r$ ), ( $\varphi$ ) ши ( $z$ ) кэпэтэм:

$$a_r = \frac{1}{L_r} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi};$$

$$a_z = \frac{1}{L_z} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \ddot{z}.$$

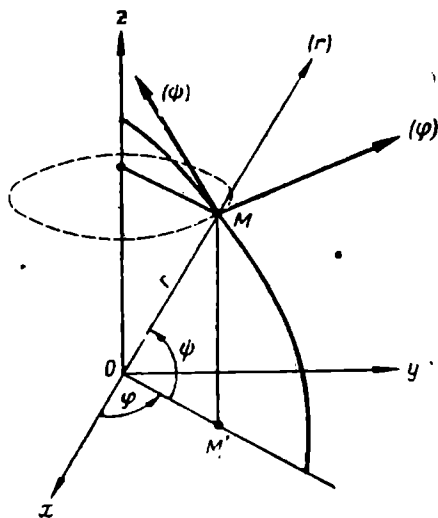
Пентру а детермина  $a_r$  ши  $a_\varphi$  се апликэ ачеляшь формуле, ка ши пентру координателе поларе ын план.

*Екземплу.* Сэ консидерэм ун систем де координате сфериче. Позиция унуй пункт ын ачест каз се детерминэ прин: лунжимя разей поларе  $OM=r$ ; унгул  $\psi$ , формат де раза поларэ ку планул  $xOy$  ши унгул  $\varphi$ , формат де проекция разей  $OM$  пе планул  $xOy$  ку акса  $x$  (фиг. 113).

Мэримя разей поларе  $r$  се консидерэ позитивэ, яр сенсул позитив де мэсураре а унгирилор  $\varphi$  ши  $\psi$  есте индикат ын фигура 113.

Координата  $\varphi$  се нумеште адеса лонжитудине, яр  $\psi$  — латитудине.

Линииле де координате ынтр'ун пункт оарекаре  $M(r, \varphi, \psi)$  сынт: пентру координата  $r$  — о линие дряптэ, каре трече прин пунктул  $M$  ши орижиня системулуй де координате  $O$ ; пентру координата  $\varphi$  — о циркумферинцэ де разэ  $r \cos \psi$  ку



Фиг. 113.



центрул пе акса  $z$ ; пентру координата  $\psi$  — о чиркумферинца де разэ  $r$  ши ку centruл ын орижина де координате  $O$ .

Акселе де координате ын пунктул  $M(r, \varphi, \psi)$  сынт: акса де координате  $(r)$ , каре коинчиде ку линия де координате  $r$ ; акса де координате  $(\varphi)$  — о дряптэ, тангентэ ла чиркумферинца де разэ  $r \cos \psi$ , ши, деч, о дряптэ перпендикулярэ пе планул  $OMM'$  (пунктул  $M'$  есте проекция пунктулуй  $M$  пе планул  $xOy$ ); акса де координате  $\psi$  — о дряптэ, тангентэ ла чиркумферинца де разэ  $r$ . Линииле де координате ши акселе де координате сынт индикате ын фигура 113.

Обсервэм, кэ акселе де координате  $(r)$ ,  $(\varphi)$  ши  $(\psi)$  сынт речипрок перпендикуларе, адикэ системул де координате есте ортогонал.

Ынтре координателе картезиене  $x, y, z$  ши челе сфериче  $r, \varphi, \psi$  екзистэ релация

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi.$$

Пентру а детермина коефициенций луй Ляме, гэсим деривателе:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin \psi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \cos \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -r \cos \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = -r \sin \varphi \sin \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = r \cos \psi.$$

Дупэ формулеле (1)

$$L_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1;$$

$$L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \cos \psi;$$

$$L_\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2} = r.$$

Проекцииле витезей пунктулуй пе акселе де координате  $(r)$ ,  $(\varphi)$ ,  $(\psi)$  афлате конформ формулелор (4) ау аспектуй:

$$v_r = L_r \cdot \dot{r} = \dot{r};$$

$$v_\varphi = L_\varphi \cdot \dot{\varphi} = r \cos \psi \dot{\varphi};$$

$$v_\psi = L_\psi \cdot \dot{\psi} = r \dot{\psi}.$$

Валоаря витезей се детерминэ ку ажуторул формулей

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + r^2 \dot{\psi}^2}.$$

Пентру функция  $T$  кэпэтэм

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + r^2 \dot{\psi}^2).$$

Акум дупэ формулеле (10) детерминэм проекцииле акчелерацией пунктулуй пе акселе  $(r)$ ,  $(\varphi)$  ши  $(\psi)$ :

$$a_r = \frac{1}{L_r} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi - r \dot{\psi}^2;$$

$$a_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi) =$$

$$= \frac{1}{r \cos \psi} (2r \dot{r} \dot{\varphi} \cos^2 \psi + r^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \psi - 2r^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi) =$$

$$= r \ddot{\varphi} \cos \psi + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \cos \psi - 2r \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi;$$

$$a_\psi = \frac{1}{L_\psi} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\psi}) + r^2 \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi \right] =$$

$$= r \dot{\psi} + 2 \dot{r} \dot{\psi} + r \dot{\psi}^2 \sin \psi \cos \psi.$$

Валоаря акчелерацией пунктулуй се детерминэ дин формула

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\psi^2}.$$

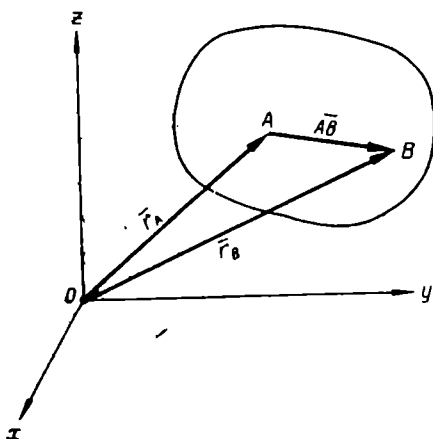
## ЧЕЛЕ МАЙ СИМПЛЕ МИШКЭРЬ АЛЕ УНУЙ КОРП СОЛИД

## § 1. НОЦИУНЬ ЖЕНЕРАЛЕ

Дупэ кум се штие, а дефини мишкарэ унуй корп ынсямнэ а да кондициле, каре пермит де а афла позиция фиксэруй пункт ал корпулуй ын орьче момент. Пентру ачаста есте суфициент сэ дефиним позиция корпулуй ку ажуторул унор параметри жеометричь астфел, ынкыт сэ фие детерминате позицииле туту-рор пунктелор корпулуй.

Нумэрул параметрилог индепенденць, каре детерминэ позиция унуй пункт, корп сау систем де корпурь, се нумэште нумэрул граделор де либертате але пунктулуй, корпулуй сау системулуй де корпурь.

Позиция унуй пункт либер ын спациу се детерминэ прин трей координате, прин урмаре, пунктул либер аре трей граде де либертате. Позиция унуй пункт, импус сэ се миште пе о анумитэ линие се детерминэ прин-тр'ун параметру — дистанца  $s$ , мэсуратэ пе курбэ де ла ун пункт фикс  $O$ , — каре се сокоате пункт инициал де мэсураре а дистанцелор. Прин урмаре, ын ачест каз пунктул аре ун град де либертате.



Фиг. 114.

Позиция унуй корп рижид либер се детерминэ прин позиция а трей пункте, каре ну сынт ситуате пе ачеяш дряптэ, деч, прин ноуэ координате але ачестор пункте ын рапорт ку ун оарекаре систем де координате. Ачесте ноуэ координате ну сынт индепенденте. Пентру орьче позиции а корпулуй дистанцеле динтре пунктеле корпулуй рэмын инвариабиле. Пентру трей пункте, каре ну се афлэ пе ачеяш дряптэ, ачастэ кондицие чере трей екуаций, каре лягэ координателе пунктелор, деачея авем нумай шасе координате индепенденте. Астфел, ун корп солид либер аре шасе граде де либертате. Позиция корпулуй се поате дефини ши ку ажуторул алтор шасе мэримь.

Нумэрул граделор де либертате але унуй корп ну детерминэ комплект карактерул мишкэрий корпулуй. Пентру унул ши аче-

лаш нумэр де граде де либертате мишкэриле пот фи абсолют диферите.

Сэ консидерэм доуэ пункте  $A$  ши  $B$  ши сэ нотэм векторий де позиции ай лор ын рапорт ку полул  $O$  прин  $\vec{r}_A$  ши  $\vec{r}_B$  (Фиг. 114).

Авем егалитатя жеометрике евидентэ

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}.$$

Ачастэ егалитате есте жустэ пентру орьче момент. Луынд деривата ын рапорт ку тимпул, кэпэтэм

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt}$$

сау

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d(\vec{AB})}{dt}.$$

Деривата  $\frac{d(\vec{AB})}{dt}$  фиинд деривата унуй вектор констант дупэ модул (корпул есте рижид) есте ун вектор, перпендикулар пе  $AB$ . Цинынд сяма де ачаста ла проейтаря пе дряпта  $AB$  а ултимей егалитэць, авем

$$\text{пр}_{AB} \vec{v}_B = \text{пр}_{AB} \vec{v}_A.$$

Астфел, проекцииле витезелор а доуэ пункте але корпуслуй пе о аксэ, каре трече прин ачесте пункте, сынт егале пентру орьче мишкарэ а корпуслуй.

## § 2. МИШКАРЯ ДЕ ТРАНСЛАЦИЕ А УНУЙ КОРП СОЛИД

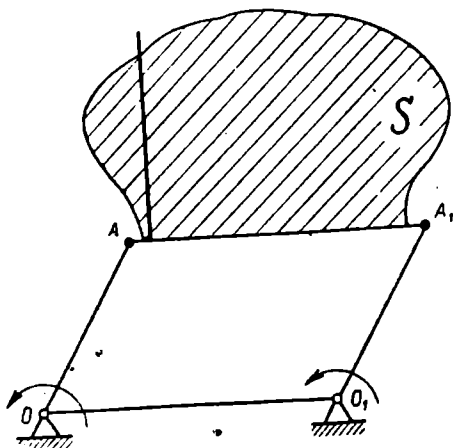
Уна дин челе май симйле мишкэрь але корпуслуй солид есте мишкаря де трансляцие. Се нумеште мишкарэ де трансляцие а унуй корп солид мишкаря ын тимпул кэрея орьче дряптэ дусэ ын корп се депласязэ, рэмынынд паралелэ ку дирекция са инициалэ.

Дакэ доуэ дрепте непаралеле але унуй корп ла мишкаря луй рэмын паралеле ку дирекцииле лор инициале, атунч ши орьче дряптэ дин ачест корп рэмыне паралелэ ку дирекция са инициалэ. Прин урмаре, дрепт критериу пентру мишкаря де трансляцие а корпуслуй солид есте екзистенца а доуэ дрепте непаралеле дин ачест корп, каре ла мишкаря корпуслуй рэмын паралеле ку дирекцииле лор инициале.

Ын фигура 115 авем доуэ манивеле  $OA$  ши  $O_1A_1$  де лунжымь егале  $OA = O_1A_1$ . Манивела  $OA$  се ротеште ын журул чентрулуй  $O$ , ын планул десенулуй, яр манивела  $O_1A_1$ —ын журул чентрулуй  $O_1$  ын ачелаш план. Сэ ашезэм ын моментул инициал

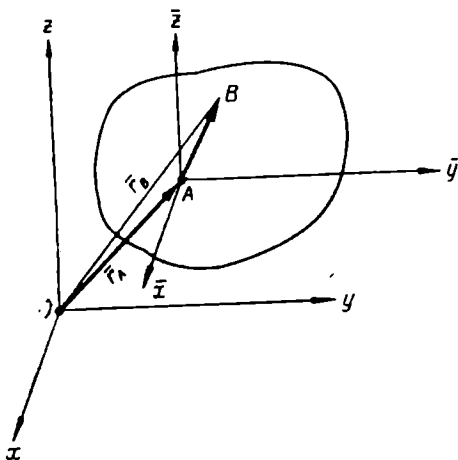
манивелеле  $OA$  ши  $O_1A_1$  паралел уна фацэ де алта, яр екстремитэциле лор  $A$  ши  $A_1$  ле уним ку о барэ ректилине  $AA_1$ . Лэгэм рижид ын планул десенулуй бара  $AA_1$  ку о оарекаре фигурэ планэ  $S$ .

Ын тимпул мишкэрий ма-  
нивелелор  $OA$  ши  $O_1A_1$  фигу-  
ра  $OO_1A_1A$  репрезентэ ун  
паралелограм, ши деч, бара  
 $AA_1$  се депласязэ ши рэмыне  
паралелэ ку дирекция са  
инициалэ. Есте евидент, кэ  
ши орьче алтэ дряптэ а фи-  
гурий  $S$  (фиг. 115), де ек-  
земплу, перпендикулярэ пе  
 $AA_1$  рэмыне де асеменя пара-  
лелэ ку дирекция са иннича-  
лэ. Дакэ екзистэ доуэ дрепте  
де ачест фел урмязэ, кэ фи-  
гура ефектуязэ о мишкаре де  
транслацие.



Фиг. 115.

Ын екземплул консиде-  
рат мишкарэ де транслацие  
ну есте ректилине. Ла  
мишкарэ де транслацие а кор-  
пулуй солид пунктеле ачестя  
пот сэ се миште пе орьче  
траекторий. Ремаркэм, кэ  
механизмул черчетат се ну-  
меште биелэ купларэ. Сэ  
черчетэм мишкарэ корпулуй  
ын рапорт ку ун сйстем де  
координате фикс  $xuz$ . Луэм  
ун пункт оарекаре ал корпу-  
луй  $A$ . Консидерэм ачест  
пункт дрепт орижине а унуй  
ноу сйстем де координате  
 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , акселе кэруя сынт ле-  
гате рижид ку корпус ши  
сынт паралеле ку акселе  
системулуй  $xuz$ . Кынд кор-  
пул ефектуязэ о мишкаре  
де транслацие, акселе сйстемулуй  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  рэмын паралеле ку ак-  
селе сйстемулуй  $xuz$  (фиг. 116).



Фиг. 116.

Фие екуация ын формэ векториалэ а мишкэрий пунктулуй  $A$

$$\bar{r}_A = \bar{f}(t) \quad (1)$$

сау ын координате картезиене ректилий

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ z_A &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Екуацииле (1) ши (2) детерминэ пентру орьче момент позиция пунктулуй  $A$  ши а системулуй  $xuz$ , прин урмаре, ши позиция корпулуй, деоарече корпул есте легат фикс ку ачест систем. Ачесте екуаций сынт токмай екуацииле мишкэрий де трансляции а корпулуй солид: Позиция корпулуй се детерминэ прин трей мэримь—координателе корпулуй  $A$ , деч, корпул каре ефектуязэ о мишкаре де трансляции аре трей граде де либертате.

Сэ луэм ун алт пункт  $B$  ал корпулуй, детерминат де векторул де позиции  $\vec{r}_B$  (фиг. 116). Екуация векториалэ а мишкэрий пунктулуй  $B$  есте

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}, \quad (3)$$

унде векторул  $\vec{AB}$  аре ун модул констант, деоарече корпул есте рижид, ши аре о дирекции константэ, яр корпул ефектуязэ о мишкаре де трансляции.

Дин екуация (3) се веде, кэ позиция пунктулуй  $B$  пентру орьче позиции а корпулуй се поате кэпэта, депласынд пункт  $A$  ла о дистанцэ егалэ ку валоаря векторулуй констант  $\vec{AB}$  пентру орьче момент.

Астфел, траектория пунктулуй  $B$  есте ачеш ка ши а пунктулуй  $A$ , ынсэ есте депласатэ ын рапорт ку еа ла о дистанцэ егалэ ку векторул  $\vec{AB}$ .

Деривынд егалитатя (3) ын рапорт ку тимпул, кэпэтэм

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \text{ сау } \vec{v}_B = \vec{v}_A, \text{ деоарече } \frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0.$$

Деривынд егалитатя (3) а доуа оарэ ын рапорт ку тимпул обцинем

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \text{ сау } \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

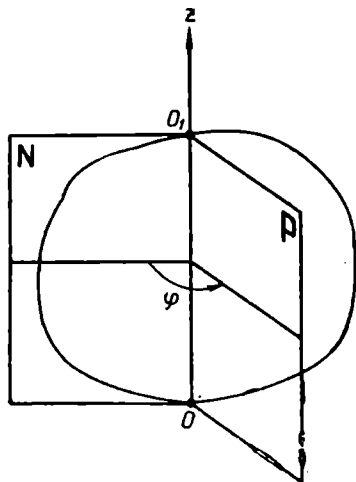
Луынд ын консидерации, кэ пунктеле  $A$  ши  $B$  сынт доуэ пункте арбитраре але корпулуй, формулэм проприетэциле мишкэрий де трансляции а корпулуй солид астфел: *ла мишкаре де трансляции а унуй корп солид пунктеле корпулуй дескриу траекторий идентиче ши ын фиксаре момент ау витезеле ши акцелерацииле егале геомеетрик.*

### § 3. РОТАЦИЯ УНУЙ КОРП СОЛИД ЫН ЖУРУЛ УНЕЙ АКСЕ ФИКСЕ

#### Дефиниция ши екуация де ротацие

Се нумеште *ротацие а унуй корп* ын журул уней аксе фиксе, мишкарят корпулуй солид, каре аре доуэ пункте фиксе.

Дряпта, каре трече прин ачесте доуэ пункте фиксе, се нумеште аксэ фиксэ де ротацие, сау аксэ де ротацие. Пе акса де ротацие се стабиляше сенсул позитив. Ын фигура 117  $O$  ши  $O_1$  сынт пункте фиксе але корпулуй,  $OO_1$  есте акса де ротацие, яр сенсул позитив есте индикат пе аксэ ку о сэжятэ. Ла ротация корпулуй ын журул аксей фиксе, пунктеле корпулуй дескриу чиркумферинце, ситуате ын плане, перпендикуларе пе акса де ротацие, ши ку чентреле пе ачестэ аксэ. Витезеле пунктелор, ситуате пе акса де ротацие, сынт евидент, егале ку зеро.



Фиг. 117.

Ун корп физик, каре се ротеште ын журул уней аксе (де екземплу, ун волант, каре се ротеште ын журул уней аксе материалае фиксе) поате сэ ну айбэ пункте физиче пе акса жеометрике де ротацие. Дакэ ынсэ пунктеле, ситуате пе акса жеометрике де ротацие, сынт легате-рижид ку корпул, атунч ачесте пункте вор фи фиксе, ши пентру ун асеменя корп лэржит есте адевэратэ дефиниция датэ май сус пентру ротация унуй корп ын журул уней аксе фиксе. Астфел, ын чинематикэ се адмите ка орьче пункте але спациулуй сэ се леже рижид ку корпул.

Сэ луэм доуэ семиплане  $N$  ши  $P$  мэржините де акса де ротацие. Семипланул  $N$  есте фикс, яр семипланул  $P$  есте легат рижид де корп (фиг. 117) ши се ротеште ымпреунэ ку ел. Позиция семипланулуй  $P$ , деч, ши а корпулуй, се поате да прин унгул линнар  $\varphi$  ал унгулуй диедру динтре планеле  $N$  ши  $P$ . Пентру дефиниря унивоке а позицией консидерэм унгул  $\varphi$  позитив, дакэ ел се мэсоарэ де ла семипланул фикс тынэ ла чел мобил ын сенсул контрар мишкэрий ачелор де часорник, привинд дин партя сенсулуй позитив ал аксей де ротацие. Унгул  $\varphi$  есте негатив, дакэ ел се мэсоарэ ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник. Унгул  $\varphi$  се нумеште *унгь де ротацие а корпулуй*.

Унгул  $\varphi$  есте о функции континуэ ын рапорт ку тимпул

$$\varphi = f(t). \quad (4)$$

Ачастэ екуацие не пермите сэ детерминэм позиция унуй корп ын орьче момент ши есте екуация де ротация а корпулуй ын журул уней аксе фиксе. Деоарече позиция корпулуй, каре се ротеште ын журул уней аксе фиксе, се детерминэ принтр'о сингурэ мэриме — унгул де ротация, ачест корп дупэ дефиницие аре ун сингур град де либертате.

Унгул  $\varphi$  се мэсоарэ ын радиань (*рад*), ротаций ш. а. м. д.

### **Витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а унуй корп**

Фие ротация унуй корп ын журул уней аксе фиксе се детерминэ прин екуация  $\varphi = f(t)$ . Пентру ун момент фикс  $t$  дин ачастэ екуацие детерминэм унгул  $\varphi$ ; пентру моментул  $t + \Delta t$  унгул де ротация есте  $\varphi + \Delta\varphi$ .

Рапортул динтре крештеря унгулуй де ротация ши интервалул де тимп, ын каре а авут лок ачастэ крештере, се нумеште *витезэ унгуларэ медие а корпулуй*.

Витеза унгуларэ медие ын интервалул де тимп  $\Delta t$  есте егалэ ку

$$\omega_{\text{мед}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (5)$$

Витеза унгуларэ медие карактеризязэ рапидитатя ротацией корпулуй ынтр'ун интервал оарекаре де тимп. Пентру а кэпэта витеза унгуларэ реалэ а корпулуй ын моментул  $t$  сау ынтр'о позиции датэ требуе сэ тречем ын формула (5) ла лимите кынд  $\Delta t \rightarrow 0$ . Вом авя

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ сау } \omega = \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Витеза унгуларэ реалэ а унуй корп есте егалэ ку деривата ынтыя а унгулуй де ротация ын рапорт ку тимпул.

Витеза унгуларэ а унуй корп, детерминатэ дупэ формула  $\omega = \dot{\varphi} = f'(t)$ , поате фи позитивэ ши негативэ. Вом нуми-о витезэ унгуларэ алжебрикэ а корпулуй. Пентру модулул витезей унгуларе авем

$$|\omega| = |\dot{\varphi}|.$$

Кынд  $\dot{\varphi} = f'(t) > 0$  функция  $f(t)$  есте крескэтоаре пентру моментул  $t$  ши, деч, ротация аре лок ын дирекция крештерий унгулуй  $\varphi$ , адикэ ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник, привинд дин вырфул аксей де ротация. Пентру  $\dot{\varphi} = f'(t) < 0$  функция  $f(t)$  есте дескрескэтоаре ши ротация аре лок ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник.

Астфел, ын казул ынтый ротация аре лок ын сенсул позитив, яр ын казул ал дойля ын сенсул негатив.



Витеза унгуларэ се мэсоарэ ын  $\text{рад/сек} = 1/\text{сек}$ ;  $\text{рот/мин}$  ш. а. м. д. Дакэ корпул фаче  $n$   $\text{рот/мин}$ , атунч витеза унгуларэ ын  $\text{рад/сек}$  се афлэ дупэ формула

$$|\omega| = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (7)$$

Куноскынд витеза унгуларэ  $\omega$  пентру моментул  $t$  ши витеза унгуларэ  $\omega + \Delta\omega$  пентру моментул  $t + \Delta t$ , се поате детермина вариация медие а витезей унгуларе ынтр'о унитате де тимп:

$$\epsilon_{\text{мед}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ачест рапорт се нумеште *акчелерация унгуларэ медие а корпулуй* ын интервалул де тимп  $\Delta t$ . Трекынд ла лимитэ пентру  $\Delta t \rightarrow 0$ , кэпэтэм акчелерация унгуларэ реалэ сау акчелерация унгуларэ ын моментул  $t$ :

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ сау } \epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (8)$$

Астфел, акчелерация унгуларэ реалэ а унуй корп есте егалэ ку деривата ынтыя а витезей унгуларе а корпулуй ын рапорт ку тимпул сау ку деривата а доуа а унгулуй де ротацие а корпулуй ын рапорт ку тимпул. Акчелерация унгуларэ а корпулуй, калкулатэ дупэ формула (8), есте о мэриме алгебрикэ. Пентру  $\epsilon > 0$  витеза унгуларэ алгебрикэ се мэреште, пентру  $\epsilon < 0$  се микшорязэ.

Акчелерация унгуларэ се мэсоарэ ын  $1/\text{сек}^2$ ,  $\text{рот/мин}^2$  ш. а. м. д. Витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ се репрезинтэ десеорь прин сэжечь циркуларе: сэжята циркуларэ пентру  $\omega$  индикэ сенсул ротацией, пентру  $\epsilon$  — семнул крештерий витезей унгуларе алгебриче (ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник плус, ын сенсул ротацией ачелор де часорник минус).

#### Мишкарэ де ротацие униформэ ши униформ вариатэ а унуй корп

Се нумеште ротацие униформэ а унуй корп мишкарэ ын тимпул кэрея витеза унгуларэ а корпулуй есте константэ  $\omega = \text{const}$ .

Ын ачест каз пентру унгул де ротацие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad d\varphi = \omega dt; \quad \varphi = \omega t + C_1.$$

Константа арбитрарэ  $C_1$  се детерминэ дин кондицииле инициале. Де екземплу, дин кондицииле  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$

$$C_1 = \varphi_0.$$

Екуация де ротацие дефинитивэ есте

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 + \omega t.$$

Се нумеште ротацие униформ вариатэ а унуй корп ротация ын тимпул кэрея акчелерация унгуларэ есте константэ  $\epsilon = \text{const.}$

Детерминэм витеза унгуларэ а корпулуй:

$$\frac{d\omega}{dt} = \epsilon; d\omega = \epsilon dt; \omega = \epsilon t + C_1.$$

Дин кондицилие инициале пентру  $t = 0, \omega = \omega_0$  гэсим  $C_1 = \omega_0$  ши

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t. \quad (9)$$

Гэсим акум унгул де ротацие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \omega_0 + \epsilon t, d\varphi = \omega_0 dt + \epsilon t dt, \varphi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2} + C_2.$$

Пентру  $t = 0$  адмitem  $\varphi = 0$ , де аич  $C_2 = 0$  ши обцинем дефинитив

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}. \quad (10)$$

Ын мишкаря униформ вариатэ  $\epsilon, \omega, \varphi$  се калкулязэ ку ажу-  
турул формулелор (9) ши (10).

#### Детерминаря витезелор ши акчелерациилор пунктелор унуй корп, каре се ротеште

Ротация унуй корп ын журул уней аксе фиксе есте датэ де екуация  $\varphi = f(t)$ . Адмitem, пентру симплитате, кэ ачастэ екуацияе пресупуне, кэ семипланул фикс коинчиде ку чел мобил пентру  $t = 0$ . Луэм ын корп ун оарекаре пункт  $M$ . Нотэм прин  $R$  раза чиркумферинцей, пе каре се мишкэ пунктул  $M$  (фиг. 118).

Компунем екуация мишкэрий пунктулуй  $M$  пе траектория са. Дрепт пункт инициал де мэсураре а дистанцелор консидерэм позиция пунктулуй  $M$  ( $M_0$ ) кынд  $t = 0$ . Сенсул позитив де мэсураре а дистанцелор пе траекторие се алеже ын сенсул опус ротацией ачелор де часорник, привинд дин вырфул аксёй де ротацие. Атунч екуация мишкэрий пунктулуй  $M$  пе траекторие аре аспект

$$s = \widetilde{M_0 M} = R\varphi = Rf(t).$$

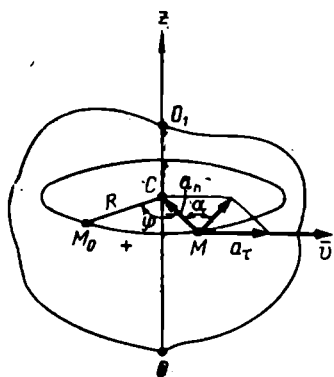
Пентру витеза алгебрикэ а пунктулуй  $M$  авем

$$v_\tau = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega.$$

Модулул  $v$  ал витезей пунктулуй  $M$  се детерминэ дупэ формула

$$v = R |\omega|.$$

Векторул  $\vec{v}$  ал витезей пунктулуй  $M$ , ориентат дупэ танжен-та ла траектория пунктулуй  $M$  есте перпендикулар пе раза чиркумфе-ринцей  $CM$  ши пе акса де ротацие, адикэ-й перпендикулар пе планул, че трече прин пунктул  $M$  ши акса де ротацие  $z$ . Деч, векторул витезэ а орькэруй пункт ал корпулуй, каре се ротеште ын журул уней аксе фиксе, есте егал дупэ модулу ку про-дусул динтре модулул витезей ун-гюларе а корпулуй ши раза де ро-тацие а пунктулуй ши есте ориен-тат ын сенсул де ротацие перпенди-кулар пе планул, каре трече прин пунктул  $M$  ши акса де ротацие.



Фиг. 118.

Акцелерация пунктулуй  $M$  се де-терминэ, куноскынд акцелерация танженциалэ ши чя нормалэ:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = R\ddot{\varphi} = R\epsilon; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

сау

$$a = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}. \quad (12)$$

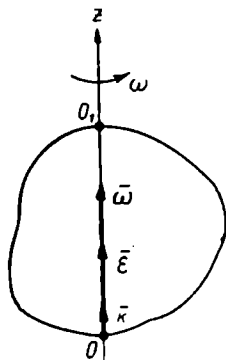
Нотэм прин  $\alpha$  унгюл формат де векторул акцелерацие ал пунк-тулуй  $M$ , ку раза чиркумферинцей  $MC$ .

Консидерынд унгюл  $\alpha$  позитив, вом авя

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{R |\epsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}. \quad (13)$$

Дин формула (13) се веде, кэ унгюл  $\alpha$  аре ачеш валoare пентру тоате пунктеле корпулуй ын орьче момент.

Ротация унуй корп ын журул уней аксе фиксе се карактеризязэ прин акса де ротации, витезэ ши сенс. Ачесте карактеристичь але мишкэрий се пот експрима принтр'ун сингур вектор — векторул витезей унгуларе  $\vec{\omega}$ , дакэ депунем векторул витезей унгуларе пе акса де ротации ла о скарэ анумитэ де ла



ун пункт оарекаре ал ей ши-л ориентэм асфел, ынкыт привинд дин екстремитатя векторулуй спре орижия луй, корпул се ротеште ын сенсул опус ротацией ачелор де часорник. Ын ачест каз дряпта, пе каре есте ситуат векторул  $\vec{\omega}$  есте аксэ де ротации. Валоаря векторулуй есте егалэ ку валоаря витезей унгуларе, яр сэжята векторулуй  $\vec{\omega}$  индикэ сенсул де ротации (фиг. 119).

Векторул витезей унгуларе есте ун вектор алунокэтор. Нотэм векторул унитате де пе акса де ротации  $z$  прин  $\vec{k}$ . Вом авя

Фиг. 119.

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}. \quad (14)$$

Векторул акчелераций унгуларе  $\vec{\epsilon}$  се детерминэ ка деривата векторулуй витезей унгуларе ын рапорт ку тимпул:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi} \vec{k}, \quad (15)$$

$$|\vec{\epsilon}| = \epsilon = |\ddot{\varphi}|.$$

Дин формула (15) се веде, кэ векторул  $\vec{\epsilon}$  есте ситуат ка ши векторул  $\vec{\omega}$  пе акса де ротации ши есте егал дупэ модул ку модулул акчелерацией унгуларе алжебриче а корпулуй.

Експрессиние векториале але витезелор ши акчелерациилор пунктелор унуй корп солид, каре се ротеште

Сэ луэм ун пункт  $M$  ал унуй корп, детерминат прин векторул де позиции  $\vec{r}$  ын рапорт ку полул  $O$ , луат пе акса де ротации (фиг. 120). Пентру модулул витезей ачестуй пункт авем

$$v = R\omega = r\omega \sin \beta = (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Векторул  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  есте ун вектор, перпендикулар пе планул, каре трече прин  $\vec{\omega}$  ши  $\vec{r}$ , адикэ пе планул каре трече прин

пунктул  $M$  ши акса де ротацие, ориентат ын дирекция ротаций корпусулуй. Астфел, векторул  $\vec{v}$  ал витезей пунктулуй  $M$  есте егал дупэ модулу ши дирекцие ку векторул  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ , адикэ

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (16)$$

Векторул витезэ ал унуй пункт дин корпусу, каре се ротеште, есте егал ку продуслу векториал динтре векторул витезей угюларе ал корпусулуй ши векторул де позицие ал пунктулуй, кынд полул есте луйат не акса де ротацие.

Формула (16) есте о експресиe векториалэ пентру витезеле пунктелор унуй корпусу, каре се ротеште, ши се нумеште формула векториалэ а луй Ейлер.

Векторул акчелерацие ал пунктулуй  $M$  се детерминэ ка дe-ривата векторулуй витезэ ын рапорт ку тимпул:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left( \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right).$$

сау

$$\vec{a} = (\vec{\epsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (17)$$

Дин формула (17) урмязэ, кэ векторул акчелерацие  $\vec{a}$  есте егал ку сума жеометрикэ а дой векторы. Пентру модулул векторулуй  $(\vec{\epsilon} \times \vec{r})$  кэ-пэтэм

$$|\vec{\epsilon} \times \vec{r}| = \epsilon r \sin \beta = \epsilon R = a_n.$$

Ачест вектор аре дирекция акчелерацией танженциале а пунктулуй  $M$ , чея чесе поате верифика конструинд векторул  $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$  (фиг. 120). Ел есте, деч, векторул акчелерацией танженциале а пунктулуй  $M$ .

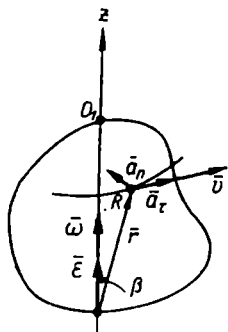
Гэсим модулул векторулуй  $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ :

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega \cdot v \cdot \sin 90^\circ = \omega R \omega = R \omega^2 = a_n.$$

Конструинд продуслу векториал  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  есте евидент, кэ ачест вектор есте ориентат дупэ раза чиркумферицей спре центрул ей.

Астфел, векторул ал дойля есте векторул акчелерацией нормале а пунктулуй, адикэ

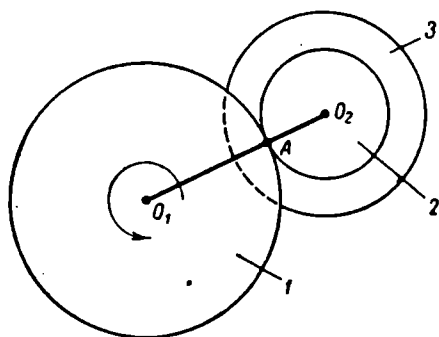
$$\begin{aligned} \vec{a}_\tau &= \vec{\epsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}; \\ \vec{a} &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \end{aligned} \quad (18)$$



Фиг. 120.

Формулеле (18) сынт экспрессиале векториале пентру акчелерацииле танженциалэ, нормалэ ши комплетэ але пунктелор унуй корп, каре се ротеште.

*Екземплу.* Дискул 1 (фиг. 121) се ротеште ын планул сэу ын журул аксей  $O$  дупэ лежэ  $\varphi_1 = 2 t^2 \text{ рад}$  ( $t$  се експримэ ын *сек*) ши пуне ын ротацие ын журул аксей  $O_2$  дискул 2. Ку дискул 2 есте фиксат рижид дискул 3



авынд ачеш аксэ жеометрике. Сэ се детермине витезеле ши акчелерацииле пунктелор де пе обада дискулуй 3 ын моментул  $t = 3 \text{ сек}$ , дакэ ын тимпул ротирий дискуриле 1 ши 2 ну алунокэ унул фацэ де алтул, яр разеле дискурилоу сынт респектив:

$$R_1 = 20 \text{ чм}, \quad R_2 = 10 \text{ чм}, \\ R_3 = 15 \text{ чм}.$$

Фиг. 121.

*Резолваре.* Детерминэм витеза унгуларэ а дискулуй 1  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 4t \text{ 1/сек}$ . Ремаркэм пе фигурэ пунктул  $A$  комун пентру дискуриле 1 ши 2. Ын липса алунокэрий витезеле пунктелор диферитор корпуры ын локул де легэтурэ сынт егале. Прин умаре, витеза пунктуй  $A$  ал дискулуй 1 есте егалэ ку витеза пунктуй  $A$  ал дискулуй 2, адикэ

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

Де аич

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

адикэ витезеле унгуларе але дискурилоу сынт инверс пропорционале ку разеле дискурилоу ши

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2} = 4t \cdot \frac{20}{10} = 8t \text{ 1/сек}.$$

Евидент

$$\omega_3 = \omega_2 = 8t \text{ 1/сек}.$$

Детерминэм акчелерация унгуларэ а дискулуй 3:

$$\epsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 8 \text{ 1/сек}^2.$$

Пентру моментул  $t = 3$  сек гэсим:

$$\omega_3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ 1/сек};$$

$$v = R_3 \omega_3 = 15 \cdot 24 = 360 \text{ см/сек};$$

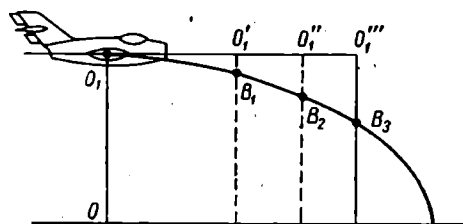
$$a = R_3 \sqrt{\epsilon_3^2 + \omega_3^4} = 15 \sqrt{8^2 + 24^4} = \\ = 120 \sqrt{1 + 9 \cdot 24^2} \approx 120 \cdot 3 \cdot 24 = 8640 \text{ см/сек}^2.$$

---

## МИШКЭРИЛЕ КОМПУСЕ АЛЕ УНУЙ ПУНКТ

## § 1. НОЦИУНЬ ДЕ БАЗЭ

Ын мулте проблеме де механикэ мишкаря унуй пункт сау а унуй корп есте компусэ, адикэ алкэтуитэ дин кытева мишкэрь. Сэ консидерэм уна дин челе май симпле форме але мишкэрий компусе, кынд ун пункт се мишкэ ын рапорт ку ун оарэкаре систем де координате  $O'x'y'z'$ , каре ла рындул сэу се мишкэ арбитрар ын рапорт ку ун алт систем де координате  $Oxyz$ , консидерат конвенционал дрепт систем де базэ. О астьфел де мишка-



Фиг. 122.

ре а пунктулуй ын рапорт ку  $Oxyz$  се нумеште *компусэ*. Траекторииле пунктулуй, витезеле ши акчелерацииле луй ын рапорт ку системеле де координате  $O'x'y'z'$  ши  $Oxyz$  сынт диферите. Пентру комодитате системул де базэ де координате  $Oxyz$  се консидерэ конвенционал имобил.

Адмitem, кэ динтр'ун авион, каре збоарэ оризонтал де асупра Пэмынтулуй ку о витезэ константэ дупэ о линие дряптэ, каде либер пе пэмынт о греутате. Мишкаря греутэций се обсервэ дин доуэ системе де реферинцэ: дин авион ши динтр'ун ануит пункт ал Пэмынтулуй. Ын ачест каз пентру фиекаре обсерватор мишкаря греутэций паре ку тотул диферитэ. Дин авион се веде, кэ греутатя, че каде пе пэмынт, ышь пэстрызэ ши витеза, пе каре о авя еа ымпреунэ ку авионул пынэ ла кэдере. Деачея дакэ неглижэм резистенца аерулуй, греутатя се мишкэ спре Пэмынт ын рапорт ку авионул дупэ о линие дряптэ. Обсерваторул де пе Пэмынт веде, кэ греутатя се мишкэ ын рапорт ку Пэмынтул дупэ о параболэ. Ын фигура 122 пунктеле  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  сынт позицииле консекутиве але греутэций ын кэдере, пунктеле  $O_1'$ ,  $O_1''$ ,  $O_1'''$  — пунктеле де обсервацие дин авион,  $O$  — ун пункт фикс де обсервацие.

Дакэ авионул збоарэ ку акчелерацие жар ши дупэ о линие дряптэ, мишкаря греутэций, че каде пе пэмынт, ын рапорт ку авионул, ну ва фи ректилиние пе вертикалэ чи мулт май компусэ дупэ о курбэ, форма кэрея депинде де валоаря ши дирекция акчелерацией авионулуй.

Се нумеште *мишкаре релативэ* а унуй пункт мишкаря ын рапорт ку ун систем де реферинцэ мобил. Ачастэ мишкаре се кон-



статэ де обсерваторул, легат фикс ку системул де реферинцэ мобил, ымпреунэ ку каре ел се депласяэ. Се нумеште *траекторие релативэ* а унуй пункт траектория, пе каре о дескрие пунктул ла мишкаря луй ын рапорт ку системул де реферинцэ мобил. Се нумеште *витезэ релативэ* ши *акчелерация релативэ* а унуй пункт реопектив витеза ши акчелерация луй ын ачаств мишкаре релативэ. Се нумеште *мишкаре де транспорт* мишкаря системулуй де реферинцэ мобил ши а тутурор пунктелор легате фикс де ел. Ынсэ ноциуня де мишкаре де транспорт се поате рефери ши ла ун пункт, каре аре мишкаре релативэ.

Мишкаре де транспорт а унуй асемения пункт се поате нуми мишкаря, пе каре ел о аре ын моментул дат ка ун пункт легат фикс ку системул де реферинцэ мобил. Астфел, мишкаря де транспорт а унуй пункт аре лок ка резултат ал мишкэрий системы де реферинцэ мобил.

Деачея витезэ де транспорт а унуй пункт ын моментул дат се нумеште витеза, пе каре о аре пунктул легат ку системул де реферинцэ мобил.

Пентру а кларифика карактерул мишкэрий де транспорт а унуй пункт ынтр'ун оарекаре момент, требуе сэ не ынкилум кэ мишкаря релативэ а пунктулуй е ынтреруптэ, с'о легэм фикс ку системул де реферинцэ мобил ын моментул дат ши сэ стабилим, че фел де мишкаре ва авя ел ка пункт ал корпулуй солид, че репрезинтэ ун систем де реферинцэ мобил.

Траектория де транспорт а пунктулуй есте посибилэ нумай ын фиекаре момент апарте — ачаства есте траектория ачелуй пункт ал системулуй де реферинцэ мобил, ку каре коинчиде ын моментул дат пунктул, че аре мишкаре релативэ. Требуе сэ менционэм де асемения кэ мишкаря де транспорт аре лок нумай ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс.

Се нумеште *мишкаре абсолутэ а унуй пункт* мишкаря луй ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс. Витезэ абсолутэ а пунктулуй се нумеште витеза луй ын мишкаря абсолутэ. *Акчелерация абсолутэ* а пунктулуй есте акчелерация луй ын мишкаря абсолутэ.

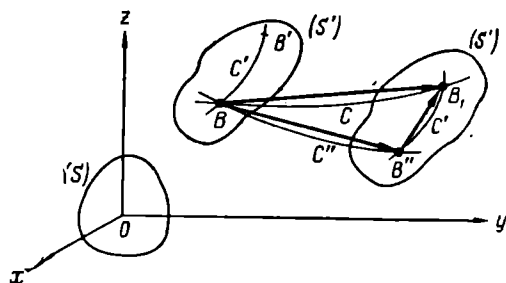
Сэ ынтродучем урмэтоареле нотаций:  $\vec{v}_r$  — витеза релативэ;  $\vec{a}_r$  — акчелерация релативэ;  $\vec{R}_r$  — векторул де позиции ал пунктулуй ын системул де реферинцэ мобил;  $\vec{v}_e$ ,  $\vec{a}_e$  — витеза де транспорт ши акчелерация де транспорт.

Витеза абсолутэ ши акчелерация абсолутэ се нотязэ прин  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{a}_{abs}$  сау  $\vec{v}$  ши  $\vec{a}$ .

## § 2. ТЕОРЕМА КОМПУНЕРИЙ ВИТЕЗЕЛОР ҮН МИШКАРЯ КОМПУСЭ А. УНУЙ ПУНКТ

Теорема деспре компунеря витезелор унуй пункт ын мишкар-  
ря компусэ а ачестуя экспримэ легэтура динтре витезеле пунк-  
тулуй ын мишкэриле релативэ, де транспорт ши абсолютэ. Сэ  
демонстрэм ачастэ теоремэ-ын мод женерал, пентру орьче фел  
де мишкаре де транспорт.

Адмitem, кэ ун пункт партичипэ ла о оарекаре мишкаре ком-  
пусэ че констэ дин мишкаря релативэ ын рапорт ку ун систем  
де реферинцэ мобил ( $S'$ ) ши дин мишкаря де транспорт ым-  
преунэ ку системул де реферинцэ мобил. Мишкаря абсолютэ аре  
лок ын рапорт ку ун систем де реферинцэ фикс ( $S$ ) —  $Oxyz$   
(фиг. 123). Вом нота прин  $C'$  траектория релативэ ши вом чер-  
чета позиция пунктулуй  $B$ , каре се мишкэ ынтр'ун момент  $t$ .  
Дакэ пунктул  $B$  ефектуязэ нумай о мишкаре релативэ, ын тимпул  
 $\Delta t$  ел се ва депласа ын позиция  $B'$ . Атунч ачастэ мишкаре, ва  
фи абсолютэ (ын липса мишкэрий де транспорт) ши се ва ын-  
режистра ын системул де реферинцэ фикс  $Oxyz$ .



Фиг. 123.

Адмitem акум, кэ пунктул  $B$  я парте нумай ын мишкаря де  
транспорт. Нотэм прин  $C''$  траектория де транспорт. Атунч ын  
ачелаш интервал де тимп  $\Delta t$  пунктул се ва депласа ын пози-  
ция  $B''$ , чей че се ва ынрежистра ын системул де реферинцэ  
фикс. Ын реалитате ын ачест интервал де тимп  $\Delta t$  пунктул я  
парте ши ын мишкаре релативэ ши ын мишкаре де транспорт,  
ши ка резултат ва нимери ынтр'ун пункт  $B_1$ , дескриинд траек-  
тория абсолютэ  $C$ . Сэ ынлокуим депласэриле пунктулуй пе  
траекторииле ей прин депласэрь дупэ коарделе респективе.  
Ачесте депласэрь се вор репрезента прин векторий  $\overline{BB''}$ ,  $\overline{B''B_1}$ ,  
 $\overline{BB_1}$ . Ымпэрдим фиекаре вектор ла  $\Delta t$ , обцинем векторий вите-  
зелор медий але пунктулуй ын фиекаре мишкаре апарте.

Дупэ кум се веде дин фигурэ, ын системул де реферинцэ  
фикс ынтре ачесте депласэрь дупэ коарде се пэстрызэ ынтод-  
дяуна релация векториялэ каре экспримэ фаптул, кэ депласаря

абсолютэ  $\overline{BB_1}$  есте о сумэ жеометрике дин депласаря де транспорт  $\overline{BB''}$  ши чя релативэ  $\overline{B''B_1}$ , адикэ

$$\overline{BB_1} = \overline{BB''} + \overline{B''B_1}.$$

Ымпэрцинд амбеле пэрць але ачестей егалитэць ла  $\Delta t$ , авем

$$\frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{BB''}}{\Delta t} + \frac{\overline{B''B_1}}{\Delta t}.$$

Ла лимитэ, кынд  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB''}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B''B_1}}{\Delta t}.$$

Ынсэ лимита витезей медий ын мишкаря абсолютэ репрезинтэ витеза реалэ ын ачэстэ мишкаре пентру позиция датэ а пунктулуй, каре се мишкэ, адикэ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} = \bar{v}_a.$$

Ын мод аналог витеза ын мишкаря де транспорт есте

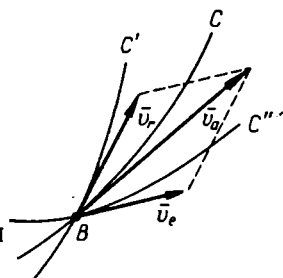
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB''}}{\Delta t} = \bar{v}_e.$$

Витеза релативэ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B''B_1}}{\Delta t} = \bar{v}_r.$$

Скимбынд ординя терменилор кэпэтэм дефинитив

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$



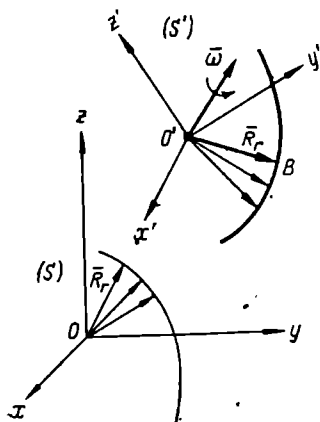
Фиг. 124.

Ачэстэ релацие експримэ токмай теорема деспре компунеря витезелор пентру ун пункт, каре се поате експрима ын фелул урмэтор: ын мишкаря компусэ а унуй пункт витеза мишкэрий абсолюте есте егалэ ку сума жеометрике а витезелор, мишкэрилор релативэ ши де транспорт. Ачэстэ релацие се репрезинтэ ын фигура 124 ын форма паралелограмулуй витезелор.

### § 3. УН КАЗ ПАРТИКУЛАР АЛ ТЕОРЕМЕЙ ДЕСПРЕ КОМПУНЕРЯ АКЧЕЛАРАЦИЛОР

#### Ноциунь деспре деривата локалэ ши деривата тоталэ а унуй вектор

Адмitem, кэ ун вектор вариэзэ ын функцие де тимп ын доуэ системе де реферинцэ — ын чел мобил ши чел фикс. Нотэм фиёкаре вектор де ачест фел ку индичеле  $r$ . Чел май симплу екземплу а унуй асемения вектор поате серви векторул де позиции ал унуй пункт ын рапорт ку системул де реферинцэ мобил. Ачест вектор вариэзэ ын рапорт ку системул мобил ши чел фикс. Нотэм ачест вектор прин  $\bar{R}_r$ . Ходографул векторулуй  $\bar{R}_r$  ла скимбаря луй ын рапорт ку системул де реферинцэ мобил есте траектория пунктулуй  $B$  ын мишкаря луй релативэ (фиг. 125). Вариация ачестуй вектор  $\bar{R}_r$  ын системул де реферинцэ фикс ла о мишкаре де транспорт арбитрарэ, паре а фи алта.



Фиг. 125.

Ходографул векторулуй  $\bar{R}_r$  ын вариация луй ын рапорт ку системул де координате фикс есте де асемения о алтэ линии каре ну коинчиде ку траектория мишкэрий релативе а пунктулуй  $B$ . Ынсэ ын казул кынд мишкаря де транспорт есте де трансляция, адикэ акселе мобиле де координате рэмын тот тимпул паралеле ку позиции лор инициале, ходографул векторулуй  $R_r$  репрезентэ уна ши ачеш линии атыт ын системул мобил, кыт ши ын системул фикс де координате.

Ла о мишкаре де транспорт арбитрарэ се консидерэ доуэ деривате але векторулуй  $\bar{R}_r$  ын рапорт ку тимпул: уна — ка деривата векторулуй дат ын системул мобил де координате; ши алта — деривата ын системул фикс. Қонвеним сэ нумим деривата векторулуй, консидерат ын системул мобил де координате, ын рапорт ку тимпул, дериватэ локалэ (релативэ) ши о нотэм прин  $\frac{\tilde{d}}{dt}$ , атулч  $\frac{\tilde{d}\bar{R}_r}{dt}$ .

Еа поате фи нотатэ де асемения ши прин  $\left(\frac{d\bar{R}_r}{dt}\right)_r$ . Вом нуми деривата векторулуй  $\bar{R}_r$  че карактеризязэ скимбаря луй ын системул де координате фикс, спре деосебире де деривата локалэ, дериватэ тоталэ ши о нотэм прин  $\frac{d\bar{R}_r}{dt}$ . Нотэм проекцииле

векторулуй  $\bar{R}_r$ , пе акселе мобиле де координате прин  $x', y', z'$  (координателе пунктулуй  $B$ ). Атунч проекцииле дериватей локале а векторулуй  $\bar{R}_r$ , адикэ проекцииле векторулуй  $\frac{d\bar{R}_r}{dt}$ , сынт егале респектив ку:

$$\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}.$$

Аич локалитатя дериватей калкулате се индикэ прин ачэя, кэ се я деривата проекциилор векторулуй пе акселе мобиле де координате. Деривата тоталэ а векторулуй  $\bar{R}_r$  се калкулязэ прин деривателе ын рапорт ку тимпул де ла проекцииле векторулуй  $\bar{R}_r$  пе акселе де координате фиксе. Ачесте проекций ын казул женерал ал мишкэрий системулуй де координате мобил се деосебеск де  $x', y', z$ . Деч, векторий, че експримэ деривателе локалэ ши тоталэ, ну сынт егаль ынтре ей. Ынсэ ын казул кынд мишкаря де транспорт а акселор мобиле де координате есте де трансляцие, адикэ кынд еле се депласязэ, рэмынынд паралеле ку позицииле лор инициале, ходографий векторулуй  $\bar{R}_r$ , атыт ын системул де координате мобил, кыт ши ын чел фикс репрезентэ уна ши ачэяш линии, прин урмаре, деривателе локалэ ши тоталэ а векторулуй  $\bar{R}_r$ , сынт егале ынтре еле.

Ремаркэм, кэ деривата локалэ а векторулуй де позиции а пунктулуй ын системул де координате мобил експримэ витеза релативэ конформ дефиницией витезей ын системул де референцэ дат

$$\frac{d\bar{R}_r}{dt} = \bar{v}_r,$$

яр деривата локалэ а витезей релативе  $\bar{v}_r$ , есте егалэ, евидент, ку акчелерация релативэ

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{a}_r,$$

сау

$$\frac{d^2\bar{R}_r}{dt^2} = \bar{a}_r.$$

**Ун каз партикулар ал теоремей деспре компунеря акчелерациилор кынд мишкаря де транспорт есте де трансляцие**

Сэ демонстрэм теорема деспре компунеря акчелерациилор ын мишкаря компусэ а унуй пункт ын казул, кынд системул де референцэ мобил аре нумай о мишкаре де трансляцие\*, адикэ

\* Ачест каз ал теоремей деспре компунеря акчелерациилор есте нечесар пентру ынцелэжеря чинематичий мишкэрий плане а унуй корп солид.

акселе де координате мобиле  $O'x'y'z'$  ау ын декурсул мишкэрий о дирекции константэ ын рапорт ку системул де координате фикс  $Oxyz$ .

Конструим дой векторь де позиции а пунктулуй  $B$ : векторул де позиции  $\bar{R}_r$ , каре детерминэ позиция луй ын системул де координате мобил ши векторул де позиции  $\bar{R}_a$ , каре детерминэ позиция пунктулуй ын мишкарэ луй абсолутэ (фиг. 126).

Дескомптунем ачешть векторь дупэ акселе системулуй де координате мобил ши респектив имобил:

$$\bar{R}_r = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$$

$$\text{ши } \bar{R}_a = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

унде  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  сынт векторий унитате ай системулуй  $Oxyz$ , яр  $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  — векторий унитате ай системулуй  $O'x'y'z'$ .

Конструим ши векторул де позиции ал пунктулуй

$O'$  — орижия системулуй де координате мобил ын рапорт ку пунктул  $O$ . Нотэм ачест вектор де позиции прин  $\bar{\rho}$ . Ынтре ачешть трей векторь вариабиль ын орьче момент аре лок релация векриалэ

$$\bar{R}_a = \bar{\rho} + \bar{R}_r.$$

Дупэ дефиниции, акчелерация абсолутэ а пунктулуй

$$\bar{a}_{abs} = \frac{d^2\bar{R}_a}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} + \frac{d^2\bar{R}_r}{dt^2}. \quad (1)$$

Се яу деривателе тотале, карактеризынд скимбаря векторилор ын системул де координате фикс. Деривэм векторул  $\bar{R}_r$ ; скриинд експресия луй прин векторий унитате  $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  ши  $x', y', z'$  кэпэтэм

$$\frac{d\bar{R}_r}{dt} = \frac{dx'}{dt}\bar{i}' + \frac{dy'}{dt}\bar{j}' + \frac{dz'}{dt}\bar{k}'.$$

Ынсэ деривателе векторилор унитате сынт егале ку zero, деоарече векторий  $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$  сынт констанць ну нумай ын системул де координате мобил, чи ши ын чел фикс. Аналог

$$\frac{d^2\bar{R}_r}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\bar{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\bar{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\bar{k}'. \quad (2)$$

Акчелерация релативэ а пунктулуй  $B$  се експримэ прин дери-  
вата а доуа локалэ а векторулуй  $\bar{R}_r$ , адикэ

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}^2 \bar{R}_r}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} \bar{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \bar{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \bar{k}'. \quad (3)$$

Компарынд (3) ку (2), обцинем, кэ

$$\frac{d^2 \bar{R}_r}{dt^2} = \frac{\tilde{d}^2 \bar{R}_r}{dt^2} = \bar{a}_r. \quad (4)$$

Егалитатя (4) есте адевэратэ пентру казул партикулар ал миш-  
кэрий де транспорт.

Терминул ынтый дин партя дряптэ а егалитэций (1) репре-  
зинтэ акчелерация орижиний мобиле  $O'$  а системулуй де коор-  
донате мобил, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляcie

$$\frac{d^2 \bar{\rho}}{dt^2} = \bar{a}_{O'}. \quad (5)$$

Ла мишкаря де трансляcie а корпулуй солид тоате пунк-  
теле луй ау ын фиикаре момент ачеляшь витезе ши ачеляшь ак-  
челераций. Деч, акчелерация пунктулуй  $O'$  есте егалэ ку акче-  
лерация пунктулуй системулуй де реферинцэ мобил ( $S'$ ), ку каре  
коинчиде ын моментул дат пунктул  $B$ , че аре о мишкаре релати-  
вэ. Акчелерация пунктулуй корпулуй солид ( $S'$ ), ку каре коин-  
чиде пунктул  $B$ , се нумеште акчелерация де транспорт а пунк-  
тулуй  $B$ . Прин урмаре

$$\frac{d^2 \bar{\rho}}{dt^2} = \bar{a}_e.$$

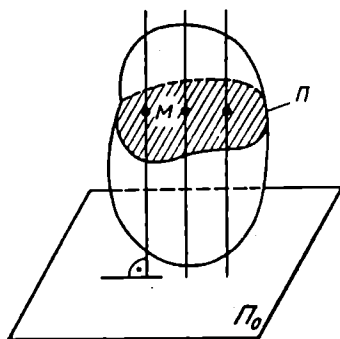
Дин егалитатя (1) пе база егалитэцилор (3), (4) ши (5) обци-  
нем дефинитив пентру акчелерация абсолутэ а пунктулуй

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_r + \bar{a}_e.$$

Ачест резултат се поате формула ын фелул урмэтор: *дакэ миш-  
каря де транспорт есте де трансляcie, атунч акчелерация аб-  
солутэ а унуй пункт ын мишкаря луй компусэ есте егалэ ку сума  
жеометрикэ а акчелерациилор релативэ ши де транспорт а пунк-  
тулуй.*

## МИШКАРЯ ПЛАНЭ А УНУЙ КОРП СОЛИД

Се нумеште мишкаре планэ а унуй корп солид мишкаря ла каре фикскаре пункт ал луй се мишкэ тот тимпул ын унул ши ачелаш план. Планеле, ын каре се мишкэ диферите пункте, сынт паралеле ынтре еле ши паралеле ку ачелаш план фикс. Деачея мишкаря планэ а унуй корп солид се нумеште адеся мишкаре план-паралелэ. Траекторииле пунктелор корпулуй ла мишкаря планэ сынт курбе плане.



Фиг. 127.

Мишкаря планэ а корпулуй солид аре о маре импортантэ пентру техникэ, деоарече пьеселе мажоритэций меканизмелор ши машинилор, фолосите ын техникэ, ефектуязэ мишкэрь плане. Мишкаря де ротации а корпулуй солид ын журул уней аксе фиксе поате фи консидератэ ун каз партикулар ал мишкэрий плане.

Ла студияря мишкэрий плане, ка ши ла студияря орькэрей мишкэрь, есте нечесар сэ консидерэм модуриле де дефинире а ачестей мишкэрь,

прекум ши методеле де калкуларе а витезелор ши акчелерациилор пунктелор корпулуй.

Фие ун корп солид ефектуязэ о мишкаре планэ, паралелэ ку планул фикс  $P_0$  (Фиг. 127). Атунч орьче дряптэ, перпендикулярэ пе ачест план ши ла каре тоате пунктеле дрептей сынт фиксате рижид ку корпул ын мишкаре, ефектуязэ о мишкаре де трансляции, адикэ тоате пунктеле ачестей дрепте се мишкэ ын ачелаш фел. Прин урмаре, пентру а студия мишкаря пунктелор, ситуате пе дряпта консидератэ есте суфициент сэ студием мишкаря унуй пункт ал ачестей дрепте, де екземплу а пунктулуй  $M$ . Рационынд ын мод аналог пентру орьче алтэ дряптэ перпендикулярэ пе планул  $P_0$  ши фиксатэ ку корпул ын мишкаре, путем траже конклузия, кэ пентру а студия мишкаря планэ а унуй корп солид есте суфициент сэ студием мишкаря пунктелор ачестуй корп, ситуате ынтр'ун план оарекаре  $P$ , паралел ку планул имобил  $P_0$ , адикэ а пунктелор корпулуй, ситуате ын секциуня корпулуй консидерат ку планул  $P$  ши каре формязэ о фигурэ планэ.

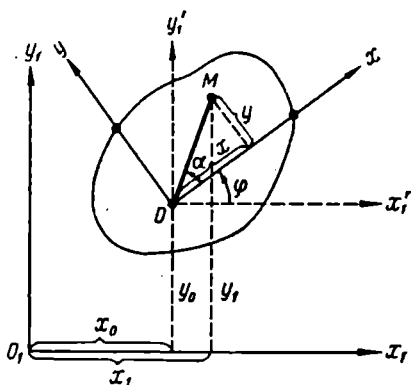
Астфел, пентру а студия мишкаря планэ а унуй корп солид есте суфициент сэ студием мишкаря фигурий плане ын планул сэу, паралел ку планул фикс  $P_0$ . Позиция фигурий пе планул сэу есте комплект детерминатэ прин позиция сегментулуй де



дряптэ, фиксатэ рижид ку ачастэ фигурэ планэ. Корпуриле солиде диферите дупэ формэ, каре ефектуязэ мишкэрь плане, ау ка секциунь диферите фигурь плане. Ын казул жєнерал дрепт фигурэ планэ консидерэм тот планул фиксат рижинд ку еа, ши черчетэм деч мишкаря ачестуй план мобил пе ун алт план фикс.

## § 1. ЕКУАЦИИЛЕ МИШКЭРИЙ ПЛАНЕ А УНУЙ КОРП СОЛИД

Пентру а дефини позиция уней фигурь плане пе ун план ын рапорт ку системул де координате  $O_1x_1y_1$ , ситуате ын планул фигурий, есте суфициент сэ дефиним пе ачест план позиция сегментулуй  $OM$  (фиг. 128), фиксат ку фигура. Позиция сегментулуй  $OM$  ын рапорт ку системул де координате  $O_1x_1y_1$  се детерминэ прин координателе унуй пункт оарекаре ал ачестуй сегмент ши дирекция луй. Де екземплу, пентру пунктул  $O$  требуе дефините координателе  $x_0, y_0$ , яр пентру дирекције—унгюл  $\psi$ , формат де сегментул  $OM$  ку, о оарекаре аксэ, де екземплу  $O_1x_1$  сау ку акса  $Ox_1$  паралелэ ку еа. Ын лок де унгюл  $\psi$  се поате луа унгюл динтре орьче алтэ аксэ сау сегмент фиксате ку фигура планэ ши акса  $O_1x_1$ , де екземплу, унгюл  $\varphi$ . Атунч  $\psi = \varphi + \alpha$ , унде  $\alpha$  ну депинде де тимп. Астфел, екуацииле мишкэрий уней фигурь плане ын планул сэу, прин урмаре, ши а мишкэрий плане а унуй корп солид ын рапорт ку системул де координате  $O_1x_1y_1$  ау форма



Фиг. 128.

$$x_0 = f_1(t); \quad y_0 = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

Позиция орькэруй пункт  $M$  ал фигурий плане ын рапорт ку системул де координате мобил  $Oxy$ , фиксат ку ачастэ фигурэ ын мишкаре ши ситуат ын планул ей, се детерминэ комплет прин координателе пунктулуй  $M$ ,  $x$  ши  $y$ , каре ла мишкаря фигурий плане ын планул сэу ну се скимбэ ын функции де тимп. Ынтре координателе пунктулуй  $M$  ын доуэ системе де координате  $O_1x_1y_1$  ши  $Oxy$  екзистэ урмэтоаря релацие (везь фиг. 128):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + r \cos(\alpha + \varphi); \\ y_1 &= y_0 + r \sin(\alpha + \varphi), \end{aligned}$$

унде  $r$  есте лунжия сегментулуй  $OM$  ши  $\alpha$  — унгюл констант динтре сегментул  $OM$  ши акса  $Ox$ .

Дезволтэм косинусул ши синусул сумей а доуэ унгюрь ши авынд ын ведере, кэ

$$r \cos \alpha = x; r \sin \alpha = y,$$

кэпэтэм формулеле дефинитиве ын форма урмэтоаре:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi; \\ y_1 &= y_0 + y \cos \varphi + x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Формулеле (1) сынт екуацииле мишкэрий орькэруй пункт ал фигурий плане ын рапорт ку системул де координате  $O_1x_1y_1$ .

Ачесте формуле не пермит сэ детерминэм координателе орькэруй пункт ал фигурий плане, фининд дате екуацииле мишкэрий ачестей фигурь ши координателе пунктулуй ей ын рапорт ку системул де координате мобил, фиксат ку фигура ын мишкаре.

## **§ 2. ДЕСКОМПОНЕРЯ УНЕЙ МИШКЭРЬ ПЛАНЕ А УНУЙ КОРП СОЛИД ЫНТР'О МИШКАРЕ ДЕ ТРАНСЛАЦИЕ ШИ УНА ДЕ РОТАЦИЕ**

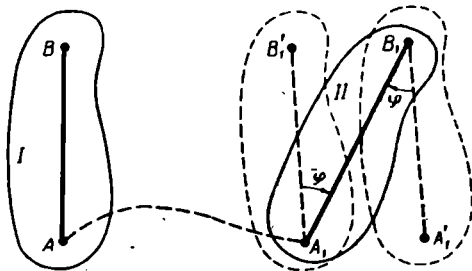
Орьче мишкаре а унуй корп солид, инклюдив ши мишкаря уней фигурь плане ын планул сэу, се поате дескомпуне принтр'ун нумэр инфинит де фелурь ын доуэ мишкэрь, уна де транспорт, яр алта — релативэ. Ын партикулар, мишкаря фигурий плане ын планул сэу ын рапорт ку системул де координате  $O_1x_1y_1$ , ситуат ын ачелаш план (везь фиг. 128), се поате дескомпуне ын мишкаре де транспорт ши мишкаре релативэ ын фелул урмэтор. Сэ консидерэм дрепт мишкаре де транспорт а фигурий мишкаря ей ымпреунэ ку системул де координате  $Ox_1y_1$  че ефетуязэ о мишкаре де трансляcie, орижина кэруя есте фиксатэ ку ун пункт оарекаре ал фигурий, луат ка пол. Атунч мишкаря релативэ а фигурий ын рапорт ку системул де координате мобил  $Ox_1y_1$  ва фи о ротацие ын журул аксей мобиле, перпендикулярэ пе фигура планэ ши каре трече прин полул алес  $O$ .

Пентру демонстраcie есте суфичиент сэ аратэм, кэ фигура планэ поате фи мутатэ ын планул сэу динтр'о позиции ын орьче алтэ позиции, прекум ши ынтр'о позиции инфинит де апропиятэ де прима позиции прин доуэ депласэрь — о депласаре де трансляcie ын планул фигурий ымпреунэ ку ун оарекаре пол ши о ротацие ын ачелаш план, ын журул ачестуй пол. Сэ консидерэм доуэ позиций арбитраре але фигурий плане  $I$  ши  $II$  ын планул сэу, детерминате де доуэ позиций але сегментулуй  $AB$ , фиксат ку ачестэ фигурэ (фиг. 129).

Ын каз женерал, жынд сегментул  $AB$  ынтр'о позиции ну есте паралел ку ачелаш сегмент ын алтэ позиции, дин фигура 129 се веде, кэ фигура планэ ынтр'адевэр май ынтый се поате депласа принтр'о мишкаре де трансляcie, де екземплу, ымпреунэ ку пункт

тул  $A$  ал ачестей фигурь, тот одатэ сегментул  $AB$ , фиксат ку фигура ва окупа позиция  $A_1B_1'$  ши апой сэ ротим фигура ын журул пунктулуй  $A_1$  ку ун унгь  $\varphi$  пьнэ кьнд  $AB_1'$  коинчиде ку  $A_1B_1$ .

Ын каз партикулар, кьнд сегментул  $AB$  есте паралел ку сегментул  $A_1B_1$ , унгюл  $\varphi$  есте егал ку zero ши деч, депласаря де ротация ын ачест каз липсеште. Есте евидент, жэ ын казул же-нерал, кьнд  $\varphi$  ну есте егал ку zero, фигура планэ се поате роти май ынтый ку унгь  $\varphi$  ын журул пунктулуй  $A$ , апой депласа принтр'о мишкаре де трансляcie. Ши ын сфыршит, ефектуынд о депласаре планэ де трансляcie ымпреунэ ку пунктул  $A$ , фигура се поате роти ын журул ачестуй пункт асфел, ынкыт ын моментул сосирий пунктулуй  $A$  ын позиция  $A_1$  ачаствэ фигурэ сэ се ротяскэ ку ун унгь  $\varphi$ .



Фиг. 129.

Депласаря фигурый плане дин позиция  $I$  ын позиция  $II$  поате фи арбитрарэ, ынсэ еа ынтотдяуна се поате ынлокуи прин доуэ депласэрь плане симпле — де трансляcie ши де ротация — асфел, ынкыт позиция финалэ а фигурый плане ын амбеле казурь сэ фие уна ши ачеша.

Ын реалитате депласаря фигурый ын планул сэу динтр'о позиции ын алта, инфинит де апропиятэ де прима, ла лимитэ поате фи ынлокуитэ прин доуэ депласэрь плане елементарэ — де трансляcie ши де ротация. Аич депласаря де трансляcie а фигурый плане ымпреунэ ку ун пункт оарекаре ал ей есте о мишкаре де транспорт а фигурый плане, яр ротация фигурый ын журул аксей мобиле, перпендикуларе пе планул фигурый, ши каре трече прин пунктул алес, — о мишкаре релативэ.

Депласаря де трансляcie депинде де алежеря пунктулуй фигурый, ымпреунэ ку каре се ефектуязэ ачаствэ депласаре де трансляcie, яр унгюл де ротация ын журул полулуй ну депинде де алежеря полулуй.

Ын фигура 129 сынт арэтате казуриле, кьнд ын калитате де пол се алеже май ынтый пунктул  $A$ , апой пунктул  $B$ . Ын фигурэ сынт индикате прин линий ынтрерупте позицииле фигурый плане дупэ депласэриле де трансляcie ымпреунэ ку пунктеле  $A$  ши  $B$ .

### § 3. ВИТЕЗА УНГЮЛАРЭ ШИ АКЧЕЛЕРАЦИЯ УНГЮЛАРЭ А УНУЙ КОРП ЫН МИШКАРЯ ПЛАНЭ

Пентру а карактериза мишкаря де ротация ын казул мишкэрий плане а унуй корп солид ын журул аксей мобиле, че трече прин полул алес, ка ши ын казул де ротация а унуй корп солид ын журул уней аксе фиксе се поате ынтродуче ноциуня де витезэ унгюларэ  $\omega$  ши акчелерация унгюларэ  $\epsilon$ . Дакэ вом нота прин  $\varphi$  унгюл де ротация ын журул аксей мобиле, че трече прин пол, вом авя

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Деоарече ротация ка о парте компонентэ а мишкэрий ну депинде де алежеря полулуй, атунч ши карактеристичиле ачестей пэрць а мишкэрий — витеза унгюларэ ши акчелерация унгюларэ — де асемения ну депинд де алежеря полулуй. Прин урмаре, пентру мишкаря планэ а фигурий ын моментул дат ачесте карактеристичь сынт ачеляшь ын рапорт ку акса мобилэ, каре трече принтр'ун пункт сау алтул ал фигурий.

Ла мишкаря планэ а унуй корп витеза унгюларэ ши акчелерация унгюларэ се пот сокоти векторь, ориентаць дупэ акса мобилэ, перпендикулярэ пе планул фигурий ши каре трече прин полул алес. Векторул витезей унгюларе  $\bar{\omega}$  ла мишкаря планэ а фигурий есте ориентат дупэ акса мобилэ астфел, ынкыт дин екстремитатя луй сэ се вадэ ротация фигурий ын сенсул опус ротацией ачелор де часорник. Векторул акчелерацией унгюларе  $\bar{\epsilon}$  ла о ротация акчелератэ а фигурий коинчиде ку сенсул векторулуй витезей унгюларе  $\bar{\omega}$ , яр ла о ротация ынчетинитэ ачешть векторь ау сенсурь контраре. Деоарече  $\bar{\omega}$  ши  $\bar{\epsilon}$  ну депинд де алежеря полулуй пе фигура планэ, ей пот фи апликаць ын орьче пункт ал фигурий, фэрэ а скимба валориле ши сенсуриле ачестор векторь, аидкэ  $\bar{\omega}$  ши  $\bar{\epsilon}$  сынт векторь *либерь*.

### § 4. ВИТЕЗЕЛЕ ПУНКТЕЛОР УНУЙ КОРП ЫН МИШКАРЯ ПЛАНЭ

Апликынд теорема деспре компунеря витезелор пентру ун пункт оарекаре  $B$  ал фигурий ын мишкаря планэ, кэпэтэм

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{Be} + \bar{v}_{Br}, \quad (2)$$

унде  $\bar{v}_B$  есте витеза абсолютэ а пунктулуй  $B$  ал фигурий плане ын рапорт ку системул де координате, фацэ де каре се студиязэ мишкаря фигурий;

$\bar{v}_{Be}$  — витеза пунктулуй  $B$  ын мишкаря де транспорт каре есте о трансляция а фигурий, ымпреунэ ку пунктул  $A$  ал ачестей фигурь (фиг. 130);

$\vec{v}_{Br}$  — витеза пунктулуй  $B$  ын мишкаря релативэ, каре репрезентэ о ротацие а фигурий плане ын журул пунктулуй  $A$  ку витеза унгуларэ  $\omega$ .

Деоарече ын калитате де мишкаре де транспорт есте конси-дератэ мишкаря де трансляcie ымпреунэ ку пунктул  $A$ , атунч тоате пунктеле фигурий плане ау ачеаш витезэ де транспорт, каре коинчиде ку витеза абсолютэ а пунктулуй  $A$ , адикэ

$$\vec{v}_{Bc} = \vec{v}_A.$$

Мэримя витезей релативе ын казул, кынд мишкаря есте де ротацие се експримэ прин формула:

$$v_{Br} = \omega \cdot AB,$$

унде витеза  $\vec{v}_{Br}$  есте ситуатэ ын планул фигурий ын мишкаре ши есте ориентатэ дупэ перпендикулара пе сегментул  $AB$ , каре унеште пунктул  $B$  ку пунктул  $A$ . Ачастэ витезэ релативэ поате фи скрисэ ын форма унуй продус векториал а дой векторь:

$$\vec{v}_{Br} = \omega \times \overline{AB},$$

унде витеза унгуларэ  $\omega$  се сокоате ориентатэ дупэ акса мобилэ де ротацие, каре трече прин пунктул  $A$  ши есте перпендикуларэ пе планул фигурий. Нотэм витеза релативэ  $\vec{v}_{Br}$  прин  $\vec{v}_{BA}$ ; ачастэ нотацие аратэ, кэ витеза мишкэрий релативе а пунктулуй  $B$  се капэтэ дин кауза ротацией фигурий плане ын журул аксей мобилэ, каре трече прин пунктул  $A$  сау симплу ын журул пунктулуй  $A$ . Формула (2) се поате скрие суб форма

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (3)$$

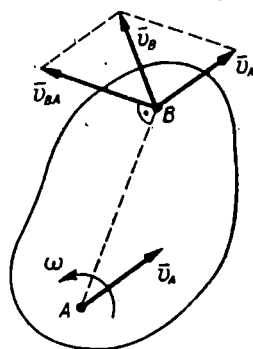
унде

$$v_{BA} = \omega \cdot AB \quad (4)$$

яр векторул  $\vec{v}_{BA}$  есте перпендикулар пе сегментул  $AB$  ши-й ориентат ын дирекция ротацией фигурий плане (фиг. 130).

Астфел, витеза унуй пункт оарекаре ал фигурий ла мишкаря луй планэ есте егалэ ку сума векториалэ а витезей полулуй ши а витезей релативе а ачестуй пункт. даторитэ ротацией фигурий ын журул полулуй. Формула (3) експримэ релация динтре витезеле а доуэ пункте оарекаре але унуй корп ла мишкаря планэ ын орьче момент.

Екземплу. О роатэ де разэ  $R$  (фиг. 131) се ростоголеште ку алунакаре дупэ о линии дряптэ ку витеза унгуларэ  $\omega$ , авынд ын



Фиг. 130.

моментул дат витеза центрулуй  $v_0$ . Сэ се детермине ын ачест момент мэримиле витезелор пунктулуй  $M$ ,  $P$  ши  $N$ , ситуате ла екстремитэциле диаметрулуй вертикал ши оризонтал.

Резолваре. Пентру пункт  $M$  витезеле  $\bar{v}_0$  ши  $v_{M0}$  сынт ориентате дупэ о линии дряптэ, прин урмаре

$$v_M = v_0 + v_{M0},$$

унде

$$v_{M0} = \omega \cdot OM = \omega \cdot R.$$

Пентру пункт  $P$  витезеле  $\bar{v}_0$  ши  $v_{P0}$  ау сенсуре контра-ре, деачея

$$v_P = v_0 - v_{P0}.$$

Аич

$$v_{P0} = \omega \cdot OP = \omega \cdot R.$$

Ла ростоголиря роций фэрэ алунакаре дупэ о линии дряптэ витеза пунктулуй  $P$  есте егалэ ку зеро, ши деч, ын ачест каз

$$v_0 = v_{P0} = \omega \cdot R.$$

Де аич се поате експрима витеза унгуларэ прин витеза чен-

трулуй  $O$  ши раза роций:

$$\omega = \frac{v_{P0}}{OP} = \frac{v_0}{R}.$$

Ын пункт  $N$  витезеле  $\bar{v}_0$  ши  $\bar{v}_{N0}$  сынт перпендикуларе деч,

$$v_N = \sqrt{v_0^2 + v_{N0}^2},$$

унде

$$v_{N0} = \omega \cdot ON = \omega \cdot R.$$

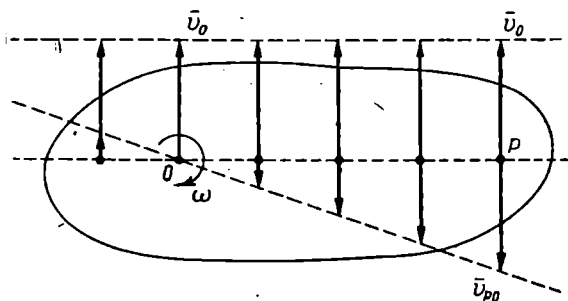
Ремаркэм кэ ын казул ростоголирий роций фэрэ алунакаре витезеле пунктелор обезий роций ну сынт ориентате дупэ танжен-те ла обада роций афарэ де пункт  $U$  чел май де сус  $M$ .

## § 5. ЧЕНТРУЛ ИНСТАНТАНЕУ АЛ ВИТЕЗЕЛОР

Ла мишкаря планэ а уней фигурь ын планул сзу ын фиекаре момент пентру  $\omega \neq 0$  екзистэ ун сингур пункт ал ачестей фигурь, витеза кэруя есте егалэ ку зеро. Ачест пункт се нумеште центрул инстантанеу ал витезелор. Ел се нотязэ прин  $P$ .

Пентру а демонстра ачестэ теоремэ есте суфичиент сэ индикэм

метода де детерминаре а центрулуй инстантанеу ал витезелор, дакэ куноаштем мэримя, дирекция ши сенсул витезей унуй пункт оарекаре  $O$  ал фигурий плане ши витеза унгуларэ а ачестей фигурь ын моментул дат. Адмitem, кэ ротация аре лок ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник ( $\omega < 0$ ) (фиг. 132). Витеза пунктулуй  $P$  ал фигурий плане поате сэ фие егалэ ку zero ын казул, кынд витеза полулуй  $O$  ши витеза де ротация ын журул полулуй  $O$  ын ачест пункт сынт егале дупэ мэриме дар ау сенсуре контраре. Ачесте пункте сынт ситуате пе перпендикулара дусэ ла



Фиг. 132.

витеза  $v_O$  ын пунктул  $O$ . Ын алте пункте сума векториалэ а дой векторь ну поате фие егалэ ку zero.

Астфел, дакэ

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{v}_{PO} = 0,$$

атунч

$$\bar{v}_{PO} = -\bar{v}_O; \quad v_{PO} = v_O.$$

Ынсэ

$$v_{PO} = \omega OP,$$

прин урмаре,

$$OP = \frac{v_{PO}}{\omega} = \frac{v_O}{\omega}.$$

Астфел, центрул инстантанеу ал витезелор се гэсеште пе перпендикулара дусэ ла витеза  $v_O$  дин ачест пункт  $O$  ла дистанца

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

Центрул инстантанеу ал витезелор есте ун пункт уник ал фигурий плане пентру моментул дат. Ын алт момент центрул инстантанеу ва фие ун алт пункт ал фигурий плане.

Дакэ куноаштем центрул инстантанеу, атунч, консидерынду-л дрепт пол ши авыд ын ведере, кэ витеза луй ын ачест каз есте

егалэ ку zero, конформ формулелор (3) ши (4) пентру пунктул  $A$  ал фигурий авем

$$\overline{v}_A = \overline{v}_{AP}; \quad v_A = v_{AP} = \omega AP, \quad (5)$$

унде  $AP$  есте дистанца де ла пунктул  $A$  пынэ ла центрул инстантанеу ал витезелор. Дупэ дирекции витеза  $\overline{v}_A$  ын ачест каз есте перпендикулярэ пе сегментул  $AP$ . Пентру пунктул  $B$  ын мод аналог

$$v_B = \omega BP, \quad (6)$$

аич витеза  $\overline{v}_B$  есте перпендикулярэ пе сегментул  $BP$ . Дин (5) ши (6) се поате кэпата

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}, \quad (7)$$

ши

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}. \quad (8)$$

Прин урмаре, дакэ центрул инстантанеу ал витезелор есте дат, атунч витезеле пунктелор фигурий ла мишкаря ей ын планул сзу се калкулязэ тот аша, ка ши ын казул ротацией фигурий ын моментул консидерат ын журул центрулуй инстантанеу ал витезелор ку витеза угюларэ  $\omega$ .

Пентру а афла витезеле пунктелор унуй корп ла мишкаря луй плануэ се афлэ де обичей ын преалабил центрул инстантанеу ал витезелор. Ынсэ се поате аплика формула, каре експримэ релация динтре витезеле а доуэ пункте але корпусулуй.

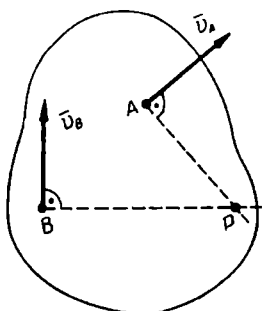
Сэ черчетэм методеле де детерминаре а центрулуй инстантанеу ал витезелор. Екзистэ доуэ методе де базэ де гэсире а луй: дин кондицииле механике але проблемей ши дупэ витезеле пунктелор фигурий плане.

Ын унеле казурь се пот индика ындатэ пунктеле фигурий плане, витезеле кэроора ын моментул дат сынт егале ку zero. Ачесте пункте ын асеменя проблеме сынт токмай центреле инстантанеу але витезелор. Де екземплу, ын казул ростоголирий фэрэ алунакаре а унуй корп пе супрафаца алтуй корп фикс, пунктул де контакт ал супрафещелор корпусилор ва фи токмай центрул инстантанеу ал витезелор.

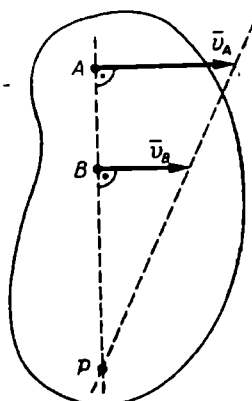
Де екземплу, ла ростоголирия фэрэ алунакаре а уней роць пе о линии дряптэ фиксэ (фиг. 138) ши а уней роць пе о алтэ роатэ фиксэ (фиг. 147) центрул инстантанеу ал витезелор се гэсеште ын пунктеле де контакт але роций ку дряпта ши респектив але роций ку роата. Ын каз *женерал дакэ кunoаштем витезеле а доуэ пункте але уней фигурь плане* (фиг. 133), атунч центрул инстантанеу ал витезелор се афлэ ла интерсекция перпендикуларелор дусе пе витезеле ачестор пункте.



Ын казул кынд пунктеле сынт ситуате пе перпендикулара комунэ, дусэ ла витезеле ачестор пункте, витезеле пунктелор сынт паралеле ши жалетеле лор се гэсеск пе ачеш дряптэ дусэ прин центрл инстантанеу ал витезелор (фиг. 134, 135) деоарече витезеле пунктелор сынт пропорционале ку дистанциеле де ла аче-

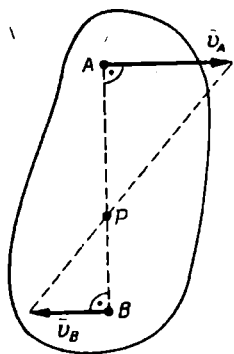


Фиг. 133.

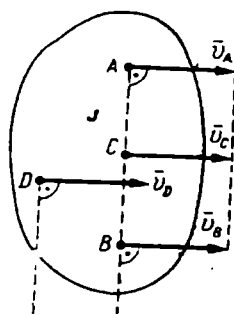


Фиг. 134.

сте пункте пынэ ла центрл инстантанеу ал витезелор. Дакэ витезеле а доуэ пункте, ситуате пе перпендикулара комунэ дусэ ла ачесте витезе сынт ши егале ынтре еле (фиг. 136), атунч авем о



Фиг. 135.

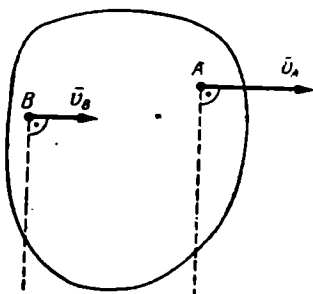


Фиг. 136.

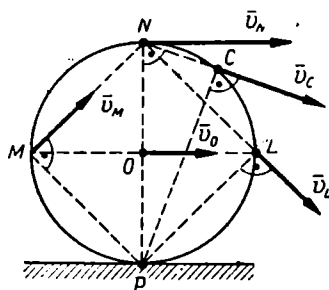
мишкаре де трансляцие инстантанеу а фигурий плане, ла каре витезеле пунктелор фигурий сынт ачеляшь дупэ валoare ши сенс. Витеза унгуларэ а фигурий плане ла мишкаря де трансляцие инстантанеу есте егалэ ку zero, ши ын ачест каз конформ

формулей (7) центрул инстантанеу ал витезелор се афлэ ла инфинит.

Ремаркэм, кэ ла мишкаря де трансляцие инстантанее нумай витезеле пунктелор сынт ачеляшь, яр акцелерацииле лор ын казул жёнерал сынт диферите. Казул, кынд витезеле а доуэ пункте, каре ну-с ситуате пе перпендикулара комунэ дусэ ла витезе, ну сынт егале ынтре еле, ынсэ сынт паралеле ну поате авя лок (фиг. 137), деоарече пентру ел ну се респектэ теорема деспре проекцииле витезелор а доуэ пункте але корпулуй пе дряпта, каре унеште ачесте пунктэ.



Фиг. 137.



Фиг. 138.

*Екземплу.* О роатэ де разэ  $R$  се ростоголеште фэре алуэнкаре пе о дряптэ фиксэ, авынд витеза центрулуй  $v_0$ . Сэ се детермине витезеле пунктелор  $M$ ,  $N$  ши  $L$  але обезий роций ын моментул дат (фиг. 138).

*Резолваре.* Центрул инстантанеу ал витезелор се афлэ ын ачест каз ын пунктул  $P$  де контакт ал роций ку дряпта. Витеза унгуларэ  $\omega$  се детерминэ дупэ формула (7)

$$\omega = \frac{v_0}{OP} = \frac{v_0}{R}.$$

Конформ формулей (5) пентру витезеле пунктелор авем

$$v_M = v_L = \omega MP = v_0 \sqrt{2},$$

деоарече

$$MP = LP = R \sqrt{2},$$

$$v_M = \omega NP = 2v_0.$$

Витезеле пунктелор сынт ориентате дупэ перпендикулареле дусе пе сегментеле, каре унеск центрул инстантанеу ал витезелор ку пунктеле консидерате.

## § 6. КАЛКУЛАРЯ ВИТЕЗЕЙ УНГЮЛАРЕ ҮН МИШКАРЯ ПЛАНЭ

Витеза унгуларэ а уней фигури плане ын мишкаря планэ се поате калкула, конформ дефиницией ей, ка

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Апой еа поате фи детерминатэ дупэ формула (7)

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

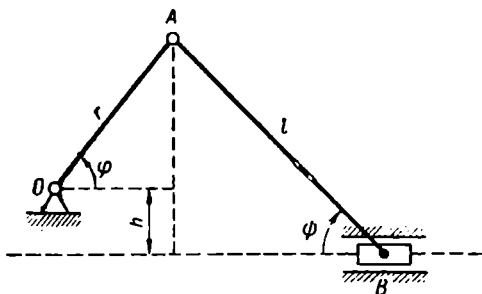
Пентру а афла витеза унгуларэ, требуе сэ ымпэрчим витеза унуй пункт оарекаре ал фигурий плане ла дистанца де ла ачест пункт пынэ ла чентрул инстантанеу ал витезелор. Сенсул де ротации се детерминэ дупэ сенсул витезей унуй пункт оарекаре, сокотинд, кэ фигура планэ ын моментул дат се ротеште ын журул чентрулуй инстантанеу ал витезелор ку витеза унгуларэ  $\omega$ .

Витеза унгуларэ ын мишкаря планэ се поате калкула афлынд ын преалябил витеза унуй пункт ал фигурий плане ын мишкаре де ротации а фигурий ын журул алтуй пункт ал ей консидерат дрепт пол, де екземплу  $\overline{v_{BA}}$ . Атунч витеза унгуларэ конформ ку (4) есте:

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{v_{CA}}{AC}.$$

Сенсул де ротации се детерминэ дупэ сенсул витезей релативе а унуй пункт оарекаре ал фигурий ын мишкаря де ротации а фигурий ын журул алтуй пункт, алес ка пол.

Се фолосеск ши алте методе де детерминаре а витезей унгуларе. Аша, дакэ стабилим ын преалябил депенденца динтре унгул де ротации а фигурий плане ши мэримиле линиаре ши унгуларе але алтор фигури плане прин релаций идентиче, атунч, луынд деривата унгулуй ын рапорт ку тимпул, обцинем о релации, дин каре се поате унеорь детермина витеза унгуларэ кэутатэ. Ачаствэ методэ се фолосеште адеся пентру афлара депенденцей динтре витезеле унгуларе але унор пьесе але механизмелор плане.



Фиг. 139.

Екземплу. Ын механизмул биелэ-манивелэ (фиг. 139) сынт дате лунжиям манивелей  $r$ , лунжиям биелей  $l$  ши дистанца  $h$

де ла акса де ротацие а манивелей лынэ ла глисиера курсорулуй  $B$ . Сэ се гэсыскэ релация динтре витеза унгуларэ а манивелей  $\omega$  ши витеза унгуларэ а биелей  $\omega_1$ , пентру орьче позиции а манивелей.

Резолваре. Позиция манивелей  $OA$  се детерминэ прин унгул  $\varphi$ , яр позиция биелей  $AB$  прин унгул  $\psi$ . Дакэ  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , есте адевэратэ идентитатя

$$r \sin \varphi + h = l \sin \psi.$$

Деривынд ачастэ идентитате ын рапорт ку тимпул, обцинем:

$$r \cos \varphi \dot{\varphi} = l \cos \psi \dot{\psi}.$$

Ынсэ

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\psi} = \omega_1,$$

прин урмаре,

$$r \omega \cos \varphi = l \omega_1 \cos \psi.$$

Релация кэлэтакэ есте токмай депенденца динтре мэримиле витезелор унгуларе але манивелей ши але биелей. Кынд  $h=0$  авем механизмул биелэ-манивелэ обишнуит. Дакэ суплиментар  $l=r$ , атунч  $\varphi=\psi$  ши  $\omega=\omega_1$ . Витезеле унгуларе ау семне диферите, деоарече ла ротация манивелей ын сенсул олус мишкэрий ачелор де часорник биела се ротеште дупэ ачеле де часорник.

## § 7. АКЧЕЛЕРАЦИИЛЕ ПУНКТЕЛОР УНУЙ КОРП ЫН МИШКАРЯ ПЛАНЭ

Консидерынд мишкаря планэ а уней фигури плане ка о мишкаре компусэ, конституентэ дин мишкаря де транспорт, каре есте о трансляцие ымпреунэ ку полул  $A$  ши мишкаря релативэ де ротацие ын журул луй  $A$ , дупэ теорема деспре компунеря акчелерацийлор пентру пунктул  $B$  авем:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{Be} + \overline{a}_{Br}. \quad (9)$$

Деоарече мишкаря де транспорт есте де трансляцие ымпреунэ ку пунктул  $A$  ал фигурий, пентру акчелерация де транспорт

$$\overline{a}_{Be} = \overline{a}_A.$$

Нотэм прин  $\overline{a}_{Br}$  акчелерация релативэ  $\overline{a}_{Br}$  а пунктулуй  $B$  ын мишкаря де ротацие ын журул полулуй  $A$ . Дупэ ачаста формула (9) капэтакэ форма:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \quad (10)$$

адикэ акчелерация унуй пункт оарекаре ал уней фигуриь плане ын мишкаря планэ есте егалэ ку сума векториалэ а акчелерацией полулуй ши акчелерацией ачестуй пункт ын мишкаря де ротации а фигурий плане ын журул ачестуй пол.

Акчелерация ын мишкаря релативэ де ротации ын журул полулуй, ка ши ын казул ротацией унуй корп ын журул уней аксе фиксе, констэ дин компонентеле танженциалэ ши нормалэ  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  ши  $\bar{a}_{BA}^n$ :

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n. \quad (11)$$

Аич

$$\bar{a}_{BA}^{\tau} = \varepsilon AB, \quad (12)$$

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega^2 AB \quad (13)$$

ши

$$a_{BA} = \sqrt{(\bar{a}_{BA}^{\tau})^2 + (\bar{a}_{BA}^n)^2} = AB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (14)$$

Акчелерация релативэ танженциалэ  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  есте ориентатэ дупэ перпендикулара дусэ ла сегментул  $AB$  ын дирекция акчелерацией унгуларе  $\varepsilon$ . Акчелерация релативэ нормалэ  $\bar{a}_{BA}^n$  есте ориентатэ респектив дупэ линия  $AB$  де ла пунктул  $B$  спре полул  $A$ . Ын сфыршит, акчелерация релативэ тоталэ  $\bar{a}_{BA}$  формязэ ку сегментул  $AB$  унгул  $\alpha$ , мэримя тангентей кэруя (фиг. 140) се поате детермина дупэ формула

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\bar{a}_{BA}^{\tau}|}{|\bar{a}_{BA}^n|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (15)$$

Дин формула (15) се веде, кэ унгул  $\alpha$  пентру тоате пунктеле фигурий плане есте ачелаш. Пентру  $\varepsilon > 0$  (фиг. 140) унгул  $\alpha$  де ла акчелерация  $\bar{a}_{BA}$  спре сегментул  $BA$  требуе депус ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник. Пентру  $\varepsilon < 0$  ел требуе депус ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник, адикэ ын тоате казурилэ индепендент де дирекция де ротации а фигурий унгул  $\alpha$  *требуе депус ын тоатдяуна ын дирекция акчелерацией унгуларе*.

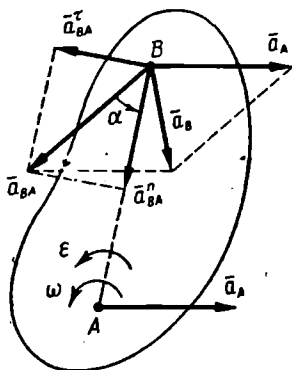
*Екземплу.* О роатэ де разэ  $R$  се ростогаеште ку алунекаре пе о дряптэ фиксе, ефектуынд о мишкаре планэ (фиг. 141). Акчелерация чентрулуй роций ын моментул дат есте егалэ ку  $a_0$ , яр витеза луй унгуларэ ши акчелерация унгуларэ сынт егале респектив ку  $\omega$  ши  $\varepsilon$ . Се штие, кэ  $\omega < 0$  ши  $\varepsilon < 0$ . Сэ се детермине ын ачест момент мэримиле акчелерациилор пунктелор  $M$ ,  $N$  ши  $P$ , ситуате пе обада роций ла екстремитэциле диаметрелор вертикал ши оризонтал.

Резолваре, Акчелерация пунктулуй  $M$ , консидерынд ка пол пунктул  $O$ , се поате гэси дупэ формула

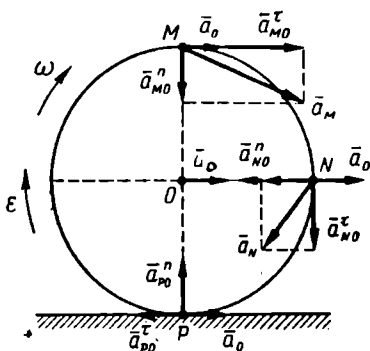
$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^{\tau} + \bar{a}_{MO}^n.$$

Акчелерацииле пунктелор  $N$  ши  $P$  се калкулязэ дупэ формулеле аналоаже. Акчелерацииле танженциалэ ши нормалэ але пунктулуй  $M$  ла ротация ын журул пунктулуй  $O$  сынт:

$$\begin{aligned} a_{MO}^{\tau} &= \varepsilon OM = \varepsilon R, \\ a_{MO}^n &= \omega^2 OM = \omega^2 R. \end{aligned}$$



Фиг. 140.



Фиг. 141.

Акчелерация  $\bar{a}_{MO}^{\tau}$  есте перпендикулярэ пе сегментул  $OM$  ши есте ориентатэ ын дирекция луй  $\varepsilon$ , яр акчелерация  $\bar{a}_{MO}^n$  есте ориентатэ де ла пунктул  $M$  спре полул  $O$  ши ын мод аналожик пентру пунктеле  $N$  ши  $P$ .

Деоарече пентру пунктул  $M$  акчелерацииле  $\bar{a}_O$  ши  $\bar{a}_{MO}^{\tau}$  сынт ориентате дупэ ачеш дряптэ, сумынд ын преалябил, вом кэпэта доуэ компоненте перпендикуларе але акчелерацией пунктулуй  $M$ , ши деч, дефинитив

$$a_M = \sqrt{(a_{MO}^n)^2 + (a_O + a_{MO}^{\tau})^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + (a_O + \varepsilon R)^2}.$$

Пентру пунктул  $N$  акчелерация  $\bar{a}_{NO}^{\tau}$  есте егалэ дупэ валоаре ку акчелерация  $\bar{a}_{MO}^{\tau}$ , яр акчелерация  $\bar{a}_{NO}^n$  есте егалэ респектив ку акчелерация  $\bar{a}_{MO}^n$ , деоарече

$$ON = OM = R.$$

Ын мод аналогавем ши пентру пунктул  $P$ . Пентру пунктул  $N$  кэпэтэм дефинитив:

$$a_N = \sqrt{(a_O - a_{NO}^n)^2 + (a_{NO}^{\tau})^2} = \sqrt{(a_O - R\omega^2)^2 + \varepsilon^2 R^2},$$

яр пентру пунктул  $P$

$$a_P = \sqrt{(a_O - a_{PO}^r)^2 + (a_{PO}^n)^2} = \sqrt{(a_O - \epsilon R)^2 + \omega^4 R^2}.$$

Ын казул ростоголирий роций фэрэ алунекаре пунктул  $P$  есте центрул инстантанеу ал витезелор ши, деч, витеза пунктулуй  $P$  ын орьче момент се поате детермина дупэ формула

$$v_O = OP\omega = R\omega.$$

Луэм деривата де ла амбеле пэрць але ачестей идентитэць ын рапорт ку тимпул ши кэпэтэм:

$$\frac{dv_O}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

сау

$$a_O = a_O^r = R\epsilon,$$

деоарече пунктул  $O$  се мишкэ ректилиниу ши

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad a_O^r = \frac{dv_O}{dt}.$$

Цинынд сама, кэ

$$a_{PO}^r = \epsilon OP = \epsilon R = a_O,$$

авем

$$a_O - a_{PO}^r = 0.$$

Прин Турмаре, ла ростоголирия роций пе о дряптэ фэрэ алу-некаре

$$\bar{a}_P = a_{PO}^n \neq 0,$$

адикэ акчелерация центрулуй инстантанеу ал витезелор, витеза кэруа есте егалэ ку zero, ну есте егалэ ку zero.

Дакэ акчелерация унгуларэ ну есте датэ, ын липса алунекэрий роций пе дряптэ еа се поате детермина дупэ формула

$$\epsilon = \frac{a_O}{R}.$$

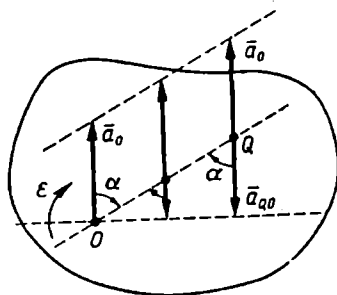
## § 8. ЧЕНТРУЛ ИНСТАНТАНЕУ АЛ АКЧЕЛЕРАЦИИЛОР

Дакэ ын фиекаре момент ал мишкэрий уней фигури плане ын планул сэу  $\omega$  ши  $\epsilon$  ну сынт егале ку zero симултан, атунч екзи-стэ ун сингур пункт ал ачестей фигури, акчелерация кэруа есте егалэ ку zero. Ачест пункт се нумеште центрул инстантанеу ал акчелерациилор. Нотэм ачест пункт прин  $Q$ . Пентру а демонстра ачастэ теоремэ пресупунем, кэ куноаштем, дупэ мэриме ши ди-рекције, акчелерация унуй пункт оарекаре ал фигурий плане,

витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а фигурий. Пентру фиксаря идеилор фие  $\varepsilon < 0$  (фиг. 142). Центрул инстантанеу ал акчелерациилор се афлэ пе линия дусэ суб ун унгь  $\alpha$  фацэ де акчелерация пунктулуй, танжента кэруя се калкулязэ дупэ формула

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\dot{\varepsilon}|}{\omega^2}.$$

Аич унгул  $\alpha$  требуе депус де ла акчелерация  $\bar{a}_O$  ын сенсул акчелерацией унгуларе  $\varepsilon$ , адикэ ын казул консидерат дупэ ачеле де часорник. Нумай ын пунктеле ачестей дрепте акчелерация  $\bar{a}_O$  ши акчелерация де ротации  $\bar{a}_{QO}$  пот авя сенсуре контраре ши ачеляшь мэримь, адикэ



Фиг. 142.

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_O + \bar{a}_{QO} = 0,$$

ши атунч

$$\bar{a}_{QO} = -\bar{a}_O.$$

Ынсэ

$$a_{QO} = OQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O.$$

Прин урмаре,

$$OQ = \frac{a_{QO}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Дин демонстрация датэ урмязэ, кэ центрул инстантанеу ал акчелерациилор есте уникул пункт ал фигурий плане, акчелерация кэруя ын моментул дат есте егалэ ку zero. Ын алт момент центрул инстантанеу ал акчелерациилор ын казул женерал се гэсеште ын алт пункт ал фигурий плане.

Дакэ куноаштем центрул инстантанеу ал акчелерациилор, атунч, алегынду-л дрепт пол, пентру акчелерация пунктулуй А ал фигурий плане дупэ формула (10)

$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ} = \bar{a}_{AQ},$$

деоарече

$$\bar{a}_Q = 0,$$

ши, деч,

$$a_A = a_{AQ} = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (16)$$

Акчелерация  $\bar{a}_A$  есте ориентатэ суб ун унгь  $\alpha$  фацэ де сегментул АQ, каре унеште пунктул А ку центрул инстанта-



неу ал акчелерациилор ын сенсул акчелерацией унгуларе  $\epsilon$  (фиг. 143).

Пентру пунктул  $B$  ын мод аналог

$$a_B = BQ\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \quad (17)$$

ши акчелерация  $\bar{a}_B$  де асеменя есте ориентатэ суб унгул  $\alpha$  фацэ де сегментул  $BQ$ .

Дин формулеле (16) ши (17)

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}, \quad (18)$$

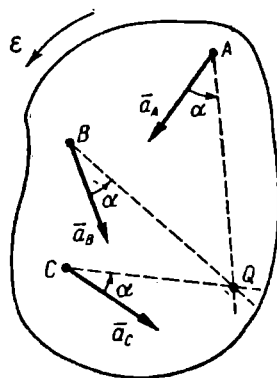
адикэ акчелерацииле пунктелор уней фигуриь плане ын мишкаря планэ сынт пропорционале ку дистанцеле ачестор пункте ла центрл инстантанеу ал акчелерациилор.

Астфел, сумынд резултателе кэпзтате, се поате спуне, кэ акчелерацииле пунктелор уней фигуриь плане ын мишкаря планэ се пот детермина тот аша, ка ши ла мишкаря де ротацие а уней фигуриь плане ын журул центрлуй инстантанеу ал акчелерациилор ку витеза унгуларэ  $\omega$  ши акчелерация унгуларэ  $\epsilon$ .

Пентру а калкула витезеле пунктелор уней фигуриь плане ын мишкаря планэ се адмите, кэ фигура планэ се ротеште ын журул центрлуй инстантанеу ал витезелор, яр пентру а калкула акчелерация се сокоате, кэ еа се ротеште ын журул центрлуй инстантанеу ал акчелерациилор.

Ла ростооголиря фэрэ алунекаре а уней роцэ пе о дряптэ (екземплул дин § 6) акчелерация центрлуй инстантанеу ал витезелор ну есте егалэ ку зеро, прин урмаре, ын каз женераал центреле инстантанеа але витезелор ши акчелерациилор сынт диферите пункте але фигуриь плане.

Акчелерацииле пунктелор уней фигуриь плане ын мишкаря планэ ка ши витезеле пунктелор се пот детермина прин доуэ методе: дупэ формула (10), каре експримэ депенденца динтре акчелерацииле а доуэ пункте але фигуриь плане, ши прин метода фолосирий центрлуй инстантанеу ал акчелерациилор ши ал формулей (16). Де обичей центрл инстантанеу ал акчелерациилор, афарэ де казуриле партикуларе, кынд витеза унгуларэ сау акчелерация унгуларэ сынт егале ку зеро, се афлэ пе фигура планэ астфел, ынкыт есте греу сэ гэсим дистанцеле де ла ел пынэ ла пунктеле консидерате але фигуриь. Деачея се рекомандэ сэ се детермине акчелерацииле пунктелор дупэ формула (10).



Фиг. 143.

Сэ черчэтэм методеле де афларе а центрулуй инстантанеу ал акчелерациилор атыт ын казуриле партикуларе жыт ши ын казул женерал.

1. Фие акчелерация унгуларэ  $\varepsilon=0$ , яр витеза унгуларэ  $\omega \neq 0$ . Евидент, ачаста аре лок ын казул, кынд фигура планэ се ротеште ын планул сэу ку о витезэ унгуларэ константэ сау кынд витеза унгуларэ атинже релатив валоаря максимэ сау минимэ. Ын ачест каз пентру унгул  $\alpha$  авем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 0,$$

ши, деч, унгул  $\alpha$  есте егал ку zero. Центрул инстантанеу ал акчелерациилор се афлэ пе линия дряптэ, дупэ каре есте ориентатэ акчелерация унуй пункт оарекаре ал фигурий плане (фиг. 144). Ынтрукыт ачаста есте адевэрат пентру орьче пункт ал фигурий, центрул инстантанеу ал акчелерациилор, прин урмаре, се гэсеште ын пунктул де интерсекция ал линиилор дрепте, дупэ каре сынт ориентате акчелерацииле пунктелор фигурий плане. Акчелерацииле пунктелор фигурий плане ын ачест каз сынт ориентате спре центрул инстантанеу ал акчелерациилор, деоарече еле констэ динтр'о компонентэ нормалэ релативэ ла ротация ын журул центрулуй инстантанеу ал акчелерациилор.

Дакэ куноаштем мэримя акчелерацией, де екземплу, а пунктулуй  $A$ , центрул инстантанеу ал акчелерациилор се поате гэси дупэ дистанца  $AQ$ :

$$AQ = \frac{a_A}{\omega^2}.$$

Ачастэ формулэ се капэтэ дин формула (16) ын казул, кынд акчелерация унгуларэ есте егалэ ку zero.

2. Фие витеза унгуларэ  $\omega=0$ , яр акчелерация унгуларэ  $\varepsilon \neq 0$ . Ачаста есте посибил ла мишкаря де трансляция инстантанеу. Атунч

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty$$

ши, деч, унгул  $\alpha$  есте дрепт. Ел требеуе депус де ла акчелерация пунктулуй ын дирекция акчелерацией унгуларе.

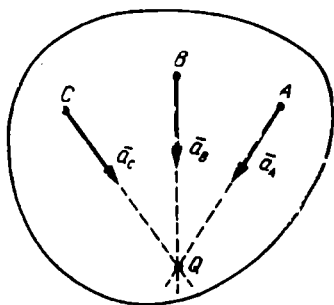
Центрул инстантанеу ал акчелерациилор се гэсеште ла интерсекция перпендикуларелор ла акчелерацииле пунктелор фигурий плане, дусе дин ачесте пункте (фиг. 145). Дакэ куноаштем валоаря акчелерацией унуй пункт оарекаре  $A$ , дистанца де ла  $A$  пынэ ла центрул инстантанеу ал акчелерациилор се поате калкула дупэ формула

$$AQ = \frac{a_A}{\varepsilon},$$

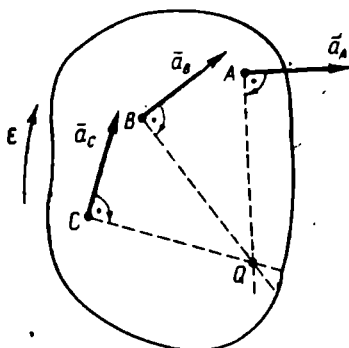
каре се обцине дин формула (16) пентру  $\omega=0$ .

3. Ын казул жєнерал, кынд куноаштем витеза унгуларэ  $\omega$  ши акчелерация унгуларэ  $\epsilon$ , каре ну сынт егале ку zero, пентру унгул  $\alpha$  авем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\epsilon|}{\omega^2} \neq 0.$$



Фиг. 144.



Фиг. 145.

Чентрул инстантанеу ал акчелерациилор се гэсэште ла интерсекция линиилор дрепте, дусе спре акчелерацииле пунктелор фигурий суб унул ши ачелаш унгь  $\alpha$ . Аич унгул  $\alpha$  требуете депус де ла акчелерацииле пунктелор ын дирекция акчелерацией унгуларе индепендент де дирекция витезей унгуларе а фигурий плане (фиг. 143). Дакэ куноаштем де екземплу, акчелерация пунктулуй А, дистанца де ла пунктул А пынэ ла чентрул инстантанеу ал акчелерациилор се поате гэси дупэ формула (16), адикэ

$$AQ = \frac{Q_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

4. Фие ынтр'ун момент дат куноскуте дупэ мэриме ши дирекция акчелерацииле а доуэ пункте А ши В але фигурий плане (фиг. 146). Сэ индикэм о методэ де гэсире а чентрулуй инстантанеу ал акчелерациилор ын ачест каз. Дупэ формулеле (10), (11), (12) ши (13), консидерынд ка пол пунктул А, авем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^{\tau}, \quad (19)$$

унде

$$a_{BA}^n = AB\omega^2,$$

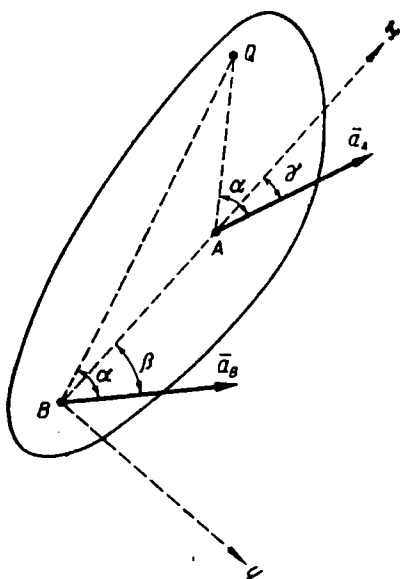
$$a_{BA}^{\tau} = AB\epsilon.$$

Проектынд пәрциле стынгэ ши дряптэ а формулей (19) пе доув аксе речипрок перпендикуларе  $Bx$  ши  $Bu$ , кэпэтэм

$$a_B \cos \beta = a_A \cos \gamma + AB\omega^2,$$

$$a_B \sin \beta = a_A \sin \gamma + AB\varepsilon,$$

унде  $\beta$  ши  $\gamma$  сынт унгорь куноскуте, респектив динтре акчелерацииле  $a_B$  ши  $a_A$  ши сенсул позитив ал аксей  $Bx$ . Ын ка-



Фиг. 146.

зул ностру де алежере а сенсулуй позитив ал аксей  $Bx$  проекция акчелерацией  $\vec{a}_{BA}^n$  пе акса датэ требуе луатэ ку семнул плус, деоарече  $\vec{a}_{BA}^n$  есте ориентатэ ынтодьяуна де ла пунктул  $B$  спре полул  $A$ . Проекция акчелерацией  $\vec{a}_{BA}^t$  пе акса  $Bu$  дупэ ипотезэ вом консидера-о ку семнул плус, сокотинд е ын казул дат ориентатэ ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник. Детерминэм  $\omega^2$  ши  $\varepsilon$

$$\omega^2 = \frac{a_B \cos \beta - a_A \cos \gamma}{AB},$$

$$\varepsilon = \frac{a_B \sin \beta - a_A \sin \gamma}{AB}.$$

Ын реалитате мэримя  $\omega^2$ , гэситэ дин формула кэпэтатэ, требуе сэ фие позитивэ. Ынсэ сем-

нул акчелерацией унгуларе  $\varepsilon$  се детерминэ прин семнул пэрций дрепте а формулей пентру  $\varepsilon$ .

Дупэ детерминаря мэримилор  $\varepsilon$  ши  $\omega^2$ , проблема афлэрий чентрулуй инстантанеу ал акчелерациилор се редуче ла казул черчетат 3.

## § 9. МЕТОДЕЛЕ ДЕ БАЗЭ ДЕ КАЛКУЛАРЕ А АКЧЕЛЕРАЦИЕЙ УНГУЛАРЕ ЫН МИШКАРЯ ПЛАНЭ

Ла калкуларя акчелерациилор пунктелор уней фигурь плане ын мишкаря планэ а ей, требуе сэ куноаштем акчелерация унгуларэ. Сэ черчетэм унеле прочедее де детерминаре а ей.

1. Дакэ куноаштем унгул де ротации сау витеза унгуларэ

ын функцие де тимп, акчелерация унгуларэ  $\epsilon$  се детерминэ прин дериваре, адикэ

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

2. Де обичей се чере сэ се детермине акчелерация унгуларэ ынтр'ун оарекаре момент куноскынд алте валорь ын ачест момент. Ын ачест каз акчелерация унгуларэ де асеменя се поате афла луынд деривата де ла витеза унгуларэ ын рапорт ку тимпул каре пентру дедучеря формулей се сокоате о функцие куноскутэ де тимп. Се штие, кэ витеза унгуларэ се поате афла дупэ формула (4)

$$\omega = \frac{v_A}{AP},$$

унде  $A$  есте ун пункт ал фигурий плане,  
 $P$  — центрул инстантанеу ал витезелор.

Деривынд  $\omega$  ын рапорт ку тимпул, кэпэтэм

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{dv_A}{dt} + v_A \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{AP} \right).$$

Ын казуриле, кынд  $AP$  есте константэ, авем

$$\epsilon = \frac{a_A^*}{AP}, \quad (20)$$

деоарече

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad a_A^* = \frac{dv_A}{dt},$$

унде  $a_A^*$  есте акчелерация танженциалэ а пунктулуй  $A$ .

Аша, де екземплу, ла ростооголиря роций фэрэ алунекаре пе о линии дряптэ фиксэ (фиг. 141), дакэ вом консидера центрул роций  $O$  дрепт пунктул  $A$ , цинынд сама кэ ел се мишкэ ректилиниу, кэпэтэм:

$$\epsilon = \frac{a_O}{R},$$

деоарече ын ачест каз

$$OP = R = \text{const ши } a_O^* = a_O,$$

унде  $R$  есте раза роций.

Ла ростооголиря уней роць фэрэ алунекаре пе о алтэ роатэ фиксэ стабилим май ынтый депенденца ынтре витеза унгуларэ  $\omega_1$  а роций фиксе ши витеза унгуларэ  $\omega$  а манивелей  $OA$

(фиг. 147). Цинынд сама, кэ центрл инстантанеу ал витезелор роций мобиле се гэсеште ын пунктул де контакт ал роцилор, кэпэтэм:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r} = \omega \frac{R+r}{r}, \quad (21)$$

унде  $R$  есте раза роций фиксе;

$r$  — раза роций мобиле.

Деривынд ын рапорт ку тимпул (21), авем

$$\varepsilon_1 = \frac{R+r}{r} \varepsilon, \quad (22)$$

деоарече

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Компарынд формулеле (21) ши (22) се веде, кэ ынтре витезеле унгуларе ши акчелерацииле унгуларе але роцилор екзистэ ачаеш релацие. Ачаста есте адевэрат ши пентру унгиуриле де ротацие але роцилор, дакэ алежм валориле лор нуле ын унул ши ачелаш момент.

Ла ангренаря екстериоарэ семнеле витезей унгуларе ши але акчелерацией унгуларе а роций мобиле коинчид респектив ку семнеле витезей унгуларе ши але акчелерацией унгуларе а манивелей  $OA$ .

Ла ангренаря интериоарэ а роцилор мэримиле  $\omega$  ши  $\varepsilon$  але роций ши але манивелей ау семне контраре.

3. Унеорь акчелерация унгуларэ  $\varepsilon$  се поате гэси прин метода проектэрий пе акселе де координате а акчелерацией куноскуте дупэ дирекцие, де екземплу, а пунктлул  $B$ , дакэ акчелерация унуй оарекаре алт пункт  $A$  ши витеза унгуларэ а фигурий  $\omega$  сынт куноскуте сау еле пот фи калкулате ын преалабил.

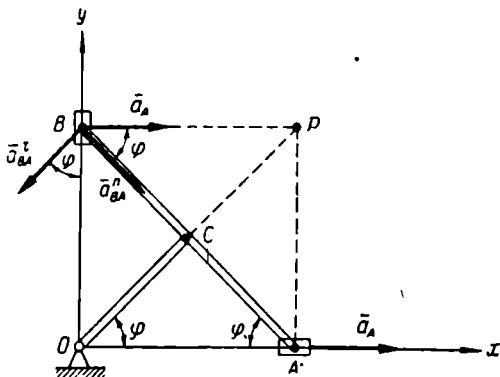
Астфел, дакэ акчелерация пунктлул  $B$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{BA}^{\bullet}, \quad (23)$$

атунч, проектынд амбеле пэрць але формулей (23) пе акса  $Ox$ , перпендикулярэ пе акчелерация  $\vec{a}_B$ , кэпэтэм о релацие, дин каре се поате детермина акчелерация унгуларэ, дакэ алте валорь, че фигурызэ ын ачастэ релацие, сынт куноскуте.

Сэ детерминэм прин ачастэ методэ акчелерация унгуларэ а риглей елипсографулуй  $AB$  (фиг. 148).

Се нумеште елипсограф, механизмул ын каре ун пункт  $A$  ал риглей луй се мишкэ нумай пе акса  $Ox$ , яр алт пункт  $B$  — пе акса  $Oy$ . Ригла елипсографулуй се пуне де обичей ын миш-каре ку ажурол манизелей  $OC$ , че се ротеште ын журул аксей  $O$ . Анч пунктул  $C$  се гэсеште ла мижлокул риглей ши де-



Фиг. 148.

скрие о чиркумферинцэ ку центрул ын пунктул  $O$ , яр пунктеле де пе порциуня риглей  $BC$  дескриу диферите елипсе купринсе ынтре чиркумферинцэ ши дряпта  $Oy$ . Пунктеле де пе порциуня  $AC$  пот дескрие респектив о serie де елипсе, купринсе ынтре чиркумферинцэ ши дряпта  $Ox$ .

Бн казул елипсографулуй, кынд акчелерацииле пунктелор  $A$  ши  $B$  сынт ориентате респектив дупэ акселе  $Ox$  ши  $Oy$ , проек-тынд (23) пе  $Ox$ , кэпэтэм:

$$O = a_A + AB\omega^2 \cos \varphi - AB\varepsilon \sin \varphi, \quad (24)$$

деоарече

$$a_{BA}^n = AB\omega^2; \quad a_{BA}^t = AB\varepsilon.$$

Релация (24) сервеште токмай пентру детерминаря акчелераций унгуларе а риглей елипсографулуй  $AB$ , дакэ тоате челелалте мэримь дин ачастэ релацияе сынт куноскуте сау се пот детермина ын преалябил.

Прин метода дескрисэ май сус се поате детермина ушор акчелерация унгуларэ а биелелор ын диферите механизме биелэ-манизелэ, кынд биела аре ун пункт, че се мишкэ ректилиниу.

Дакэ куноаштем акчелерацииле а доуэ пункте  $A$  ши  $B$  але уней фигурь плане дупэ мэриме ши сенс ынтр'ун момент оарекаре, атунач проектынд релация (23) пе доуэ дирекций речп-

прок перпендикуларе, уна дин каре есте комод сэ фие ориентатэ дупэ дряпта  $AB$ , кэпэтэм доуэ екуаций пентру детерминаря витезей унгуларе ши а акчелерацией унгуларе (п. 4 § 8). Инверс, дупэ витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ путем гэси дин ачесте екуаций мэримиле акчелерациилор пунктелор  $A$  ши  $B$ , дакэ куноаштем дирекцииле акчелерациилор ачестор пункте.

4. Ын проблемеле (§ 6, фиг. 139), унде депенденца динтре витезеле унгуларе але диферитор корпусь се поате стабили прин метода деривэрий ын рапорт ку тимпул а релациилор идентиче динтре унгиуриле де ротации, депенденца динтре акчелерацииле унгуларе се поате обцине адеса прин дериваря де доуэ орь а ачестор идентитэць ын рапорт ку тимпул. Астфел луынд прима дериватэ

$$r \cos \varphi \dot{\varphi} = l \cos \psi \dot{\psi}.$$

Луынд деривата а доуа обцинем:

$$-r \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + r \cos \varphi \ddot{\varphi} = -l \sin \psi \dot{\psi}^2 + l \cos \psi \ddot{\psi}.$$

Деоарече  $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$  есте акчелерация унгуларэ а биелей  $AB$  ши  $\varepsilon = \ddot{\psi}$  — акчелерация унгуларэ а манивелей  $OA$ , авем

$$-r \omega^2 \sin \varphi + r \varepsilon \cos \varphi = -l \omega_1^2 \sin \psi + l \varepsilon_1 \cos \psi.$$

Дакэ се штие суплиментар, кэ витеза унгуларэ  $\omega$  а манивелей  $OA$  есте константэ, адикэ  $\varepsilon = 0$ , атунч

$$-r \omega^2 \sin \varphi = -l \omega_1^2 \sin \psi + l \varepsilon_1 \cos \psi.$$

Деачея се поате детермина акчелерация унгуларэ а биелей ын функции де унгиуриле  $\varphi$  ши  $\psi$  ши витезеле унгуларе  $\omega$  ши  $\omega_1$ .

#### § 10. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ДЕПЛАСАРЯ ФИНИТЭ А УНЕЙ ФИГУРЬ ПЛАНЕ

Ноциуня деспре чентрул инстантанеу ал витезелор уней фигурь плане ын мишкаря планэ се поате ынтродуче, апликынд теорема деспре депласаря финитэ а уней фигурь плане. *О фигурэ се поате трече ын планул сэу динтр'о позиции I ын орьче алтэ позиции II (фиг. 149) принтр'о ротации ын ачест план ын журул пунктулуй  $P$ , нумит чентрул де ротации финитэ.*

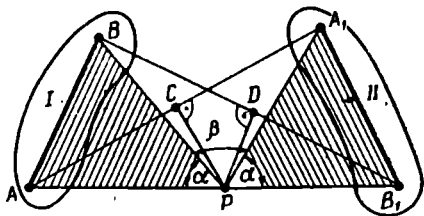
Фие ын позиция I фигура планэ се карактеризязэ прин сегментул  $AB$ , легат ку фигура, яр ын позиция II ачест сегмент окупэ позиция  $A_1B_1$ .

Сэ консидерэм казул, кынд  $AB$  ши  $A_1B_1$  ну сынт паралеле. Се поате демонстра, кэ чентрул ротацией фините  $P$  се гэсеште ла интерсекция перпендикуларелор  $CP$  ши  $DP$ , ридикате дин мижлокул сегментелор  $AA_1$  ши  $BB_1$ . Пентру ачаста вом демон-



стра кэ триунгюриле хашурате  $ABP$  ши  $A_1B_1P_1$  сынт егале, деоарече челе трей латурь але лор сынт респектив егале.  $AP = A_1P$  ка ипотенузе ын триунгюрь дрептунгиче егале  $ACP$  ши  $A_1CP$ , ынтрукыт дупэ конструкции пунктул  $C$  есте мижлокул сегментулуй  $AA_1$ , яр  $CP$  — катета комунэ а триунгюрилор. Аналог, консидерынд триунгюриле егале  $BDP$  ши  $B_1DP$ , авем  $BP = B_1P$ ;  $AB = A_1B_1$  дупэ кондищие.

Пентру а депласа фигура планэ дин позиция  $I$  ын позиция  $II$  есте суфичиент сэ супрапунем триунгюл  $ABP$  лесте триунгюл  $A_1B_1P$ . Ачаста се поате реализа принтр'о ротацие а триунгюлуй  $ABP$  ын планул сэу ын журул вырфулуй  $P$ . Ын казул дат латура  $AP$  пынэ ла коинчидере ку латура  $A_1P$  се ретеште ку ун унгь  $\varphi$ , яр латура  $BP$  пынэ ла коинчидере ку латура  $B_1P$  требуе ротитэ ку ун унгь  $\psi$ , егал ку унгюл  $\varphi$  (фиг. 149) деоарече фиекаре дин унгюриле  $\varphi$  ши  $\psi$  есте егал ку сума унгюриле  $\beta$  ши  $\alpha$ , унде  $\beta$  есте ун унгь комун, яр унгюриле  $\alpha$  сынт егале ка унгюрь, ситуате ын триунгюриле хашурате егале, каре се опун латурилор егале.



Фиг. 149.

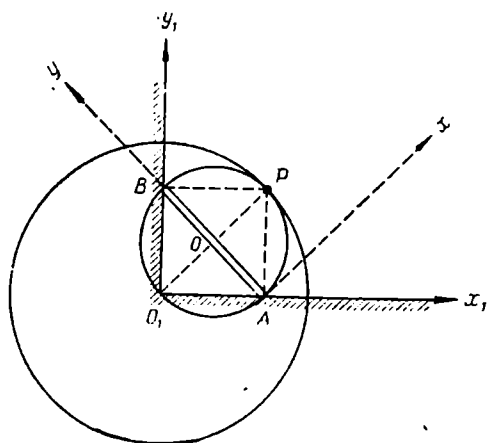
Аша дар, дакэ сегментул  $AP$  есте ротит ын журул пунктулуй  $P$  ку унгюл  $\varphi$ , сегментул  $BP$  ын ачест каз се ва роти ку ачелаш унгь  $\varphi$  ши ын ачеш дирекции, ка ши сегментул  $AP$ , прин урма-ре, пунктул  $A$  коинчиде ку пунктул  $A_1$ , яр пунктул  $B$  ку пунктул  $B_1$ , адикэ сегментул  $AB$  коинчиде ын тоате пунктеле сале ку сегментул  $A_1B_1$ .

Ын казул, кынд сегментул  $AB$  есте паралел ку сегментул  $A_1B_1$ , перпендикулареле  $CP$  ши  $DP$  дусе респектив пе  $AA_1$  ши  $BB_1$  сынт паралеле, ши деч, еле се интерсектыэзэ ла инфинит. Ын ачест каз пунктул  $P$  се сокоате ситуат ла инфинит ши фигура планэ се поате мута дин позиция  $I$  ын позиция  $II$  принтр'о депласаре де трансляции чей че кореспунде ротацией фигурый ын журул унуь пункт депэртат ла инфинит.

## § 11. ЧЕНТРУЛ ИНСТАНТАНЕУ ДЕ РОТАЦИИ. ЧЕНТРОМДЕЛЕ

Пентру доуэ позиций инфинит де апроапе але уней фигурь плане ын лок де чентрул де ротации финитэ кэпэтэм аша нумитул *центру инстантанеу де ротации*. Орьче депласаре планэ а фигурый се поате ынлокуи апроксиматив принтр'ун шир де депласэрь де ротации ын журул чентрелор лор де ротации финитэ.

Ла лимитэ депласаря планэ а фигурий се поате ынлокуи ку ун шир инфинит де ротаций инстантанее елементарэ ын журул центрелор инстантанее де ротации, ситуате ынтр'о анумитэ сукчесиуне. Де аич урмязэ кэ орьче мишкаре планэ а уней фигуь поате фи ынлокуитэ принтр'ун шир де ротаций инстантанее, ефектуате ын ачелаш интервал де тимп, ка ши мишкаря планэ



Фиг. 150.

иконсидератэ. Се поате ынтродуче витеза унгуларэ де ротации ын журул центрелуй инстантанее де ротации сау, май екзакт, ын журул аксей инстантанее, че трече прин центрел инстантанее де ротации ши есте перпендикулярэ пе планул мишкэрий.

Ла мишкаря планэ а уней фигуь центрел инстантанее де ротации се депласязэ атыт ын планул фикс, кыт ши ын планул мобил, фиксат ку фигура планэ ын мишкаре. Локул

жеометрик ал центрелор инстантанее де ротации ын планул фикс се нумеште *центроидэ фиксэ*, яр локул жеометрик ал ачестор центре инстантанее де ротации ын планул мобил, фиксат ку фигура ын мишкаре, — *центроидэ мобилэ*. Пентру фиекаре мишкаре планэ а уней фигуь екзистэ доуэ центроиде — мобилэ ши фиксэ. Евидент, кэ пунктул фигурий плане, ку каре коинчиде ын моментул дат центрел инстантанее де ротации, аре витеза, егалэ ку zero, ши деч, ел есте ын ачелаш тимп ши центрел инстантанее ал витезелор.

*Ын мишкаря планэ а уней фигуь центроида мобилэ се ростооголеште фэрэ сэ алуначе пе центроида фиксэ.* Ачастэ теоремэ пермите сэ консидерэм мишкаря унуй корп солид ка о ростооголире фэрэ алуначекаре а уней курбе плане пе алта.

Центроиделе шь-ау гэсит о апликаре ын унеле кестиунь але чинематичий механизмелор. Деачея сэ консидерэм ун екземплу де афларе а центроиделор.

*Екземплу.* О барэ  $AB$  де лунжине  $l$  алуначэ ку екстремитэциле сале пе доуэ дрепте речипрок перпендикуларе (фиг. 150). Сэ се афле центроиделе пентру ачастэ мишкаре а барей  $AB$ .

**Резолваре.** Витеза пунктулуй  $A$  поате фи ориентатэ нумай дупэ  $O_1A$ , яр а пунктулуй  $B$  — нумай дупэ  $O_1B$ , фииндкэ траекторииле ачестор пункте сынт ниште дрепте. Ридикынд ын

пунктеле  $A$  ши  $B$  перпендикуларе пе ачесте дирекций, кэпэтэм позиция пунктулуй  $P$ , каре есте токмай центрул инстантанеу ал витезелор пе планул мобил, фиксат ку бара  $AB$  ши ку центрул инстантанеу де ротации пе планул фикс. Дин фигура 150 се веде, кэ  $O_1P = \text{const} = l$  ын тот тимпул мишкэрий ка диагонала дрептунгюлуй. Прин урмаре, центроида фиксэ есте о чиркумферинцэ де разэ  $l$  ку центрул ын пунктул  $O_1$ .

Пе планул мобил  $Ax$ , фиксат ку бара  $AB$ , пунктул  $P$  поседэ ачеш проприетате жеометрике, деоарече  $OP = \frac{O_1P}{2} = \frac{l}{2} = \text{const}$ . Деч, центроида мобилэ ва фи о чиркумферинцэ де разэ  $\frac{l}{2}$  ку центрул ын пунктул  $O_1$ .

Ла ростогилия чиркумферинцей мобиле пе чя фиксэ екстремитэциле  $A$  ши  $B$  але диаметрулуй чиркумферинцей мобиле се мишкэ ректилиниу респектив дупэ дрептеле  $O_1A$  ши  $O_1B$ . Ротинд ку ун унгь арбитрар ын журул пунктулуй  $O_1$  акселе де координате  $O_1x_1$   $O_1y_1$  ын планул десенулуй, ши черчетынд ачест каз, дупэ фиксаря акселор де координате ын алтэ позиции не путем конвинже, кэ центроиделе сынт ачеляшь чиркумферинце. Прин урмаре, ши алте доуэ пункте але чиркумферинцей мобиле се мишкэ ректилиниу ш. а. м. д.

Астфел, тоате пунктеле чиркумферинцей мобиле се мишкэ дупэ линий дрепте, каре трек прин центрул чиркумферинцей фиксе  $O_1$ . Ачестэ проприетате а пунктелор чиркумферинцей мобиле се поате фолоси пентру трансформаря мишкэрий де ротации ын мишкаре де трансляции.

## РОТАЦИЯ УНУЙ КОРП СОЛИД ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС ШИ КАЗУЛ ЖЕНЕРАЛ ДЕ МИШКАРЕ А УНУЙ КОРП

Се нумеште ротация а унуй корп солид ын журул унуй пункт фикс о астфел де мишкаре, кынд ун пункт ал корпулуй рэмыне тот тимпул фикс. Ачасть мишкаре се нумеште адеся мишкаре сферикэ а корпулуй солид ын легэтурэ ку ачя, кэ траекторииле тутурор пунктелор корпулуй се ситуюзэ ынтр'о астфел де мишкаре пе супрафещеле сферелор, дескрипсе дин пунктеле фиксе. Корпул, че се ротеште ын журул унуй пункт фикс, аре трей граде де либертате, деоарече фиксаря унуй пункт ал корпулуй микшорязэ нумэрул граделор де либертате ку трей унитэць, яр корпул либер аре шасе граде де либертате.

Уна дин проблемеле принчипале ла студия ротацией унуй корп ын журул унуй пункт фикс есте стабилиря мэримилор, че карактеризязэ ачасть мишкаре, адикэ унгюриле луй Ейлер, витеза унгюларэ, акчелерация унгюларэ ши дедучеря формулелор пентру калкуларя витезелор ши акчелерациилор орькэруй пункт ал корпулуй.

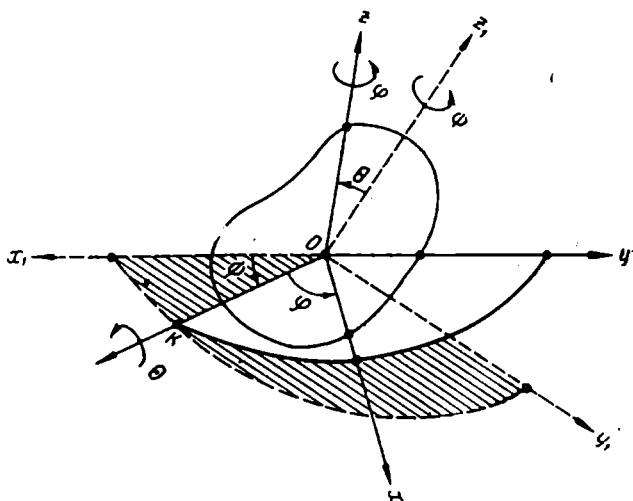
### § 1. УНГЮРИЛЕ ЛУЙ ЕЙЛЕР. ЕКУАЦИИЛЕ ДЕ РОТАЦИИ А УНУЙ КОРП ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС

Челе трей граде де либертате, пе каре ле аре ун корп ын мишкаря са де ротация ын журул унуй пункт фикс, чер пентру а детермина позиция корпулуй ын рапорт ку ун оарекаре систем де координате трей мэримь индепенденте. Ачесте трей мэримь сау параметри пот фи дефиниць прин диферите методе. Ын механика теоретикэ шы-ау гэсит о ларгэ ынтребуинцаре аша нумителе унгюрь але луй Ейлер, черчетате май жос.

Дучем прин пунктул фикс  $O$  ал корпулуй солид ун систем фикс де координате  $Ox_1y_1z_1$ , ын рапорт ку каре вом черчета мишкаря корпулуй. Фиксэм ун алт систем де координате  $Oxyz$  де корпул, каре се ротеште ын журул пунктулуй фикс  $O$  (фиг. 151). Пентру а дефини позиция корпулуй, че се мишкэ ын рапорт ку системул де координате  $Ox_1y_1z_1$  есте нечесар сэ дефиним ын рапорт ку ачест систем де координате позиция системуй мобил де координате  $Oxyz$ , легат ку корпул ын мишкаре. Ейлер а пропус ын ачест скоп трей параметри индепенденць — унгюриле луй Ейлер.

Примул дин ачесте унгюрь — *унгюл де пречесие*  $\varphi$ , детерминэ позиция линией нодурило  $OK$ , каре есте линия де интерсекция а планелор де координате  $Ox_1y_1$  ши  $Oxy$ , ын рапорт ку акса фиксэ де координате  $Ox_1$ .

Пентру вариация ачестуй унъ корпул требуе ротит ын журул аксей де координате фиксе  $Oz_1$ , каре се нумеште *аксэ де пречесие*. Позиция линейей нодурило<sup>р</sup> ла мишкаря корпулуй се скимбэ атыт ын рапорт ку системул фикс де координате  $Ox_1y_1z_1$ , кыт ши ын рапорт ку корпул ын мишкаре, адикэ ку системул мобил де координате  $Oxyz$ . Унгул  $\psi$  де ла сенсул позитив ал аксей  $Ox_1$  пынэ ла сенсул позитив ал линейей нодурило<sup>р</sup>  $OK$  се сокоате позитив, кынд се мэсоарэ ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник, пентру ун обсерватор ашезат пе  $Oz_1$ . Дрепт сенс позитив пе линия нодурило<sup>р</sup>  $OK$  алежем сенсул каре пентру ун обсерватор афлат ын вырфул ей веде ротация аксей  $Oz_1$  спре акса  $Oz$  ку ун унъ миним ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник.

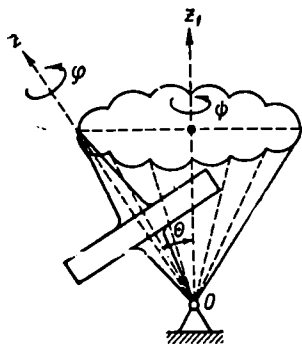


Фиг. 151.

Унгул ал дойля ал луй Ейлер есте унгул динтре планеле де координате  $Ox_1y_1$  ши  $Oxy$ . Ачеста есте унгул  $\theta$  формат де перпендикуляреле дусе пе ачесте плане де координате ши а нуме унгул  $\theta$  динтре акселе  $Oz_1$  ши  $Oz$ . Ел се сокоате де ла акса  $Oz_1$ , пынэ ла акса  $Oz$  ын сенсул позитив, дакэ сенсул де ротация ал аксей  $Oz$  де ла сенсул позитив ал линейей нодурило<sup>р</sup>  $OK$  аре лок ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник. Унгул  $\theta$  се нумеште *унъ де нутации*, яр акса  $OK$ , ын журул кэрея се ротеште корпул ла вариация унгулуй  $\theta$ , се нумеште респектив *аксэ де нутации* сау *линие а нодурило<sup>р</sup>*. Пентру детерминаря комплексэ а позицией корпулуй консидерат ын рапорт ку системул де координате  $Ox_1y_1z_1$  требуе дефинит унгул динтре акса мобилэ де координате  $Ox$  ши сенсул позитив ал линейей нодурило<sup>р</sup>  $OK$ . Ачеста ва фи унгул де *ротации проприе*  $\varphi$ . Унгул

ф де ла сенсул позитив ал линией нодурило  $OK$  пынэ ла акса  $Ox$  се сокоате позитив, дакэ дин вырфул позитив ал аксей  $Oz$  ротация аксей  $Ox$  се веде ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник. Ла вариация унгулуй  $\phi$  корпул се ротеште ын журул аксей де ротации проприе  $Oz$ , перпендикулярэ пе планул, ын каре се афлэ дрептеле  $OK$  ши  $Ox$ , че формязэ ачест унгь. Астфел, унгул  $\phi$  детерминэ позиция аксей мобиле де координате ын рапорт ку линия нодурило  $OK$ .

Унгюриле луй Ейлер се фолосеск пе ларг ын теория жиро-скопулуй. Мишкаря жиро-скопулуй, адикэ а унуй корп симетрик, че аре ун пункт фикс пе акса де симетрие, ши каре се ротеште фоарте репедэ ын журул ачестей аксе, ын каз жёнерал се поате консидера ка о мишкаре конструитэ дин трей мишкэрь (фиг. 152): о ротации ку о витезэ унгуларэ маре ын журул аксей де симетрие сау а аксей де ротации проприе, ла каре се скимбэ унгул де ротации проприе  $\phi$ , о ротация а жиро-скопулуй ымпреунэ ку акса са де симетрие ын журул аксей фиксе  $Oz_1$ , ла каре се скимбэ унгул де пречесие  $\psi$ . А трея мишкаре о фаче акса де симетрие, каре партичипэ ын мишкаря де пречесие ши дескрие пе о супрафацэ коникэ ку вырфул ын пунктул фикс. Ын каз жёнерал еа дескрие о супрафацэ коникэ ондуларэ дин кауза скимбэрий



Фиг. 152.

унгулуй де нутации  $\theta$ .

Дакэ унгул  $\theta$  ну вариазэ, супрафаца коникэ есте ун кон циркулар. Дакэ интерсектэм супрафаца коникэ ку ун план, перпендикуляр пе акса де пречесие, обцинем о линие курбэ, пе каре сынт посибиле пункте нодале, сау пункте де ревенире (ынтоарчере). Се штие, де екземплу, жэ глобул пэмынтеск, афарэ де ротации проприе ын журул аксей сале, май ефектуязэ о мишкаре де пречесие ши де нутации. Ын техникэ о деосебитэ импор-танцэ аре пречесия *регулатэ*, кынд витезеле унгуларе де ротации ын журул аксей де ротации проприе ши ын журул аксей фиксе де пречесие имобиле сынт константе ши унгул динтре ачесте аксе (унгул де нутации) рэмыне де асемения тот тимпул констант.

Ла ротация корпулуй ын журул унуй пункт фикс се скимбэ тоате трей унгурь але луй Ейлер  $\phi$ ,  $\theta$  ши  $\psi$ . Ын ачест каз корпул поате трече динтр'о позиции ын алта, скимбынд унгюриле луй Ейлер ну тоате симултан, чи ын мод сукцесив ын орьче ордине, ынчепынд ку орьче унгь. Ачесте вариаций але унгюрилол пен-тру доуэ позиций консидерате але корпулуй сынт ачеляшы ка ши ла скимбаря симултанэ а тутурор унгюрилол луй Ейлер. Ачаста не пермите сэ афирмэм, кэ унгюриле луй Ейлер сынт

ниште *параметри индепенденць* сау координате жєнерализате, че карактеризязэ позиция унуй корп ку ун пункт фикс ын рапорт ку системул фикс де координате. Прин урмаре, дефиниря челор трей унгюрь але луй Ейлер ка ниште функций де тимп пентру ун корп, че се ротеште ын журул унуй пункт фикс, есте нечесарэ ши суфичиентэ пентру дескриеря комплектэ а уней астфел де мишкэрь а корпулуй.

Астфел, пентру детерминаря позицией унуй корп ку ун пункт фикс ын орьче момент требуе дате унгюриле луй Ейлер ка функций униформе де тимп, адикэ

$$\psi = f_1(t); \theta = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (1)$$

Екуацииле (1) сынт *екуацииле кинематиче де ротацие а унуй корп солид ын журул унуй пункт фикс*.

Дакэ ачесте екуаций сынт дате, девине куноскутэ ын орьче момент позиция корпулуй солид ын рапорт ку системул де координате  $Ox_1y_1z_1$ .

Ремаркэм, кэ унгюриле луй Ейлер ну сынт уника комбинация а трей унгюрь некуноскуте пентру ун корп, че аре ун пункт фикс. Екзистэ ши алте комбинаций де унгюрь, каре детерминэ позиция унуй систем де координате ын рапорт ку алтул.

## § 2. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ДЕПЛАСАРЯ ФИНИТЭ А УНУЙ КОРП КУ УН ПУНКТ ФИКС

*Ун корп, каре аре ун пункт фикс, се поате мута динтр'о позиции ын алта принтр'о ротацие ын журул аксей, че трече прин пунктул фикс дат. Ачастэ аксэ се нумеште акса ротацией фините.*

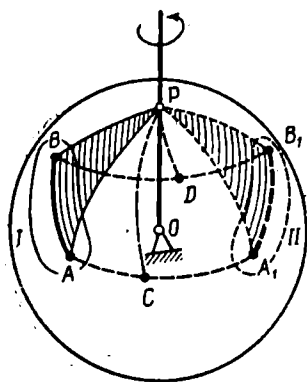
Позиция унуй корп ку ун пункт фикс ын рапорт ку ун систем де реферинцэ се поате детермина комплект, дакэ дефиним пе о сферэ оарекаре, фиксэ, дескрисэ дин пунктул фикс, позиция уней фигурь сфериче, фиксате ку ачест корп. Дрепт фигурэ сферикэ се поате консидера орьче парте а уней супрафеце сфериче де ачеш разэ ка ши раза сферей фиксе, каре де обичей се консидерэ егалэ ку унитатя. Ка фигурэ сферикэ се поате консидера де асемения тоатэ сфера, авынд разэ егалэ ку унитатя.

Ла мишкаря унуй корп ын журул унуй пункт фикс, сфера де разэ егалэ ку унитатя, фиксатэ ку корпул ын мишкаре, се мишкэ пе о сферэ фиксэ де ачеш разэ. Позиция сферей се детерминэ комплект, дакэ пе ачестэ сферэ се дэ ун арк ал черкулуй маре фиксат ку сфера.

Фие позиция  $I$  а корпулуй се карактеризязэ принтр'ун арк  $AB$  ал черкулуй маре, дескрис дин пунктул фикс ал корпулуй, яр позиция  $II$  — ку ачелаш арк, ынсэ ын алтэ позиции пе сферэ  $A_1B_1$  (фиг. 153). Ын казул унуй корп, каре аре ун пункт фикс, гэсим пунктул  $P$  пе сферэ тот аша, дупэ кум се афлэ централ ротацией фините пентру о фигурэ планэ ын мишкаря

планэ. Пентру ачаста уним пунктеле  $A$  ку  $A_1$  ши  $B$  ку  $B_1$  прин арче де черкурь марь, дусе дин пунктул фикс ал корпулуй ши ситуате комплект пе сфера фиксэ. Дин пунктеле  $C$  ши  $D$  дучем ын мижлокул арчелор  $AA_1$  ши  $BB_1$  перпендикуляреле, адикэ арчеле  $CP$  ши  $DP$  де черк маре, тангентеле ла каре сынт перпендикуляре ын пунктеле  $C$  ши  $D$  респектив пе тангентеле арчелор  $AA_1$  ши  $BB_1$ .

Ачесте перпендикуляре, ситуате пе сферэ, се интерескятэ ын пунктул  $P$ . Дин егалитатя триунгирилор сфериче дрептунгиче



Фиг. 153

$BDP$  ши  $DB_1P$ , че ау катета комунэ  $DP$  ши катетеле егале  $BD$  ши  $DB_1$ , урмязэ, кэ ипотенузеле ачестор триунгюрь сфериче де асеменя сынт егале, адикэ пунктеле  $B$  ши  $B_1$  се гэсеск ла дистанце егале де ла пунктул  $P$ . Аналог се демонстразэ, кэ пунктеле  $A$  ши  $A_1$  де асеменя се афлэ ла дистанце егале де ла пунктул  $P$ . Дакэ ротим триунгюл сферик хашурат  $ABP$  ын журул аксей, че трече прин пунктул  $P$  ши пунктул фикс  $O$ , ачест триунгь, депласынду-се пе сферэ, коинчиде ын тоате пунктеле сале ку триунгюл сферик  $A_1B_1P_1$ , егал ку ел дупэ челе трей латурь респективе егале, деоарече унгюл сферик де пе сферэ, ку каре требе ротит аркул  $AP$  ын журул

пунктулуй  $P$  пынэ ва коинчиде ку аркул  $A_1P$ , есте егал ку унгюл сферик де пе ачеш сферэ, ку каре требе ротит аркул  $BP$  пынэ ла коинчидеря ку аркул  $B_1P$ . Астфел, прин ротирия ын журул уней аксе, перпендикуляре пе супрафаца сферикэ ши каре трече прин пунктул  $P$ , ши деч, ши прин чентрул сферей, унде есте ситуат пунктул фикс, корпул поате фи депласат динтр'о позиции ын орьче алтэ позиции. Пентру фиекаре доуэ позиций але корпулуй се обцине ун пункт респектив  $P$ , ши, прин урмаре акса респективэ де ротации финитэ, че трече прин ачест пункт ши пунктул фикс ал корпулуй.

### § 3. АКСА ИНСТАНТАНЕЕ ДЕ РОТАЦИЕ. АКСОИДЕЛЕ

Се нумеште аксэ инстантанеэ де ротации сау аксэ инстантанеэ пентру ун момент дат акса, ын журул кэрея требе ротит ун корп, че аре ун пункт фикс, пентру а-л трече динтр'о позиции ын алтэ позиции, инфинит де апропиятэ де прима.

Орье мишкаре а унуь корп ын журул унуь пункт фикс се поате ынлокуи прин ниште ротаций сукцесиве ын журул унор аксе инстантанеэ. Локул жеометрик ал акселор инстантанеэ фаци де акселе фиксе де координате, ын рапорт ку каре се конси-



дерэ мишкаря корпусулуй, се нумеште аксоидэ фиксэ. Аксоида фиксэ есте о супрафацэ коникэ ку ырфул ын пунктул фикс ал корпусулуй, деоарече тоате акселе инстантанее трек прин ачест пункт.

Локул жеометрик ал акселор инстантанее ши корпус ла мишкаре репрезинтэ о аксоидэ мобилэ, каре есте де асеменя о супрафацэ коникэ. Пентру фиекаре мишкаре а унуй корп солид ын журул унуй пункт фикс екзистэ о переке де аксоиде. Ын ачест каз, кынд корпус се ротеште ын журул пунктулуй фикс, аксоида мобилэ се ростоголеште пе аксоида фиксэ фэрэ алунекаре, деоарече женератоаря комунэ а ачестор аксоиде ын фиекаре момент серवेशте дрепт аксэ инстантанее де ротации, ын журул кэрея се ротеште корпус ши, прин урмаре, тоате пунктеле ачестей аксе ын моментул дат сынт фиксе. Дакэ аксоида мобилэ се ростоголеште фэрэ алунекаре пе аксоида фиксэ, корпус дат се мишкэ ын журул унуй пункт фикс.

Евидент, кэ ла мишкаря планэ а унуй корп солид аксоиделе кониче сынт супрафеце чилиндриче, каре интерсектынду-се ку планул де мишкаре ал фигурий плане формязэ ниште центроиде пентру ачестэ фигурэ.

Практик ноциуня де аксоиде се фолосеште пентру класификаря диферитор фелурь де мишкэрь де пречесий але жироскопулуй.

#### **§ 4. ВИТЕЗА УНГЮЛАРЭ ШИ АКЧЕЛЕРАЦИЯ УНГЮЛАРЭ ЛА МИШКАРЯ УНУЙ КОРП ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС**

Деоарече мишкаря унуй корп ку ун пункт фикс ын фиекаре момент се поате сокоти ка о ротации ын журул уней аксе инстантанее, ын калитате де мэримь, че карактеризязэ ачестэ мишкаре, се пот ынтродуче витеза унгюларэ инстантанее ши акчелерация унгюларэ инстантанее де ротации а корпусулуй ын журул унуй пункт фикс. Евидент, кэ витеза унгюларэ ынтродусэ есте о мэриме векториалэ, ориентатэ ын фиекаре момент дупэ акса инстантанее респективэ, ши фолосинд, системул дрепт де координате, векторул витезей унгюларе о есте ориентат дупэ акса инстантанее астфел, кэ дин ырфул ачестуй вектор ротация корпусулуй ын журул аксей инстантанее се веде контрар ротацией ачелор де часорник. Мэримя векторулуй витезей унгюларе се поате експрима прин унгюл элементар де ротации  $\Delta\varphi$  ын журул аксей инстантанее ын интервалул де тимп  $\Delta t$ :

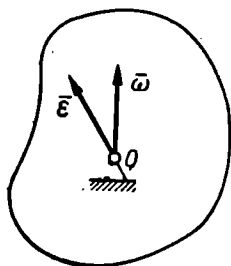
$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}.$$

Унгюл элементар де ротации  $\Delta\varphi$ , аналог казулуй де ротации ын журул аксей фиксе, требуе консидерат ка унгюл динтре доуэ

позиций ын моментеле  $t$  ши  $t + \Delta t$  але планулуй мобил, фиксат ку корпул ши, каре трече прин акса инстантанее ын моментул  $t$ .

Векторул витезей унгуларе  $\bar{\omega}$  ынтродус астфел карактеризязэ мэрия витезей унгуларе де ротацие ын журул аксей инстантанее, ориентация ачестей аксе инстантанее ши сенсул де ротацие а корпулуй ын журул ачестей аксе. Векторул витезей унгуларе  $\bar{\omega}$  се поате аплика ын орьче пункт ал аксей инстантанее (фиг. 154).

Ка вектор ал акчелерацией унгуларе  $\bar{\epsilon}$  ла мишкаря корпулуй ын журул унуй пункт фикс, е фиреште сэ консидерэм векторул, че карактеризязэ вариация витезей унгуларе  $\bar{\omega}$  ын моментул дат дупэ валoare, дирекция ши сенс. Се штиэ, кэ о асеменя карактеристикэ есте деривата ын рапорт ку тимпул а вектурулуй витезей унгуларе  $\bar{\omega}$ . Астфел есте конвенабил сэ ынтродучем акчелерация унгуларэ  $\bar{\epsilon}$  ка



Фиг. 154.

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Ынтрुकыт витеза унгуларэ се поате скимба дупэ валoare ши дирекция, ын казул женерал акчелерация унгуларэ ну есте ориентатэ дупэ акса инстантанее, чи аре дирекция, пе каре о аре деривата ын рапорт ку тимпул а вектурулуй  $\bar{\omega}$ , паралелэ ку танжента дусэ ла ходографул ачестуй вектор. Конвеним сэ репрезентэм акчелерация унгуларэ  $\bar{\epsilon}$  ын орьче пункт ал дрептей паралеле ку ачастэ танжентэ а ходографулуй  $\bar{\omega}$ , ынсэ че трече прин пунктул фикс ал корпулуй (фиг. 154).

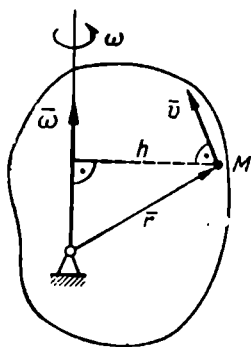
## § 5. ВИТЕЗЕЛЕ ПУНКТЕЛОР УНУЙ КОРП ЛА МИШКАРЯ ДЕ РОТАЦИЕ ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС

Ла черчетаря мишкэрий де ротацие а унуй корп солид ын журул уней аксе фиксе ам кэпэтит формула векториалэ а луй Ейлер, конформ кэрея витезеле пунктелор корпулуй се карактеризязэ комплект прин витеза унгуларэ де ротацие, комунэ пентру тоате пунктеле, ши прин репартизаря пунктелор корпулуй ын рапорт ку акса де ротацие.

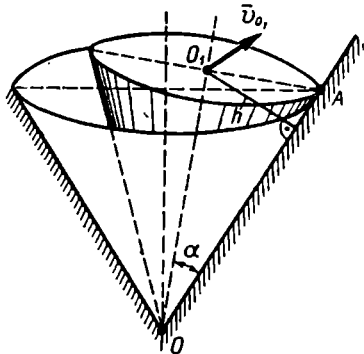
Формула луй Ейлер есте адевэратэ ши пентру казул де ротацие а корпулуй солид ын журул унуй пункт фикс. Ын ачест каз ын фиекаре момент корпул се ротеште ын журул аксей инстантанее, че трече прин пунктул фикс, ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}$ , ориентатэ дупэ акса инстантанее. Пунктеле корпулуй, ситуате

пе акса инстантане, ау витеза, егалэ ку зеро, ка ши ын казул уней аксе фиксе де ротацие.

Прин урмаре, витезеле линиаре але пунктелор унуй корп ла мишкаря де ротацие ын журул унуй пункт фикс се пот калкула де асемения дупэ формула векториалэ а луй Ейлер, ка ши ын казул де ротацие ын журул уней аксе фиксе. Ын ачест каз векторул де позиции ал фиксэруй пункт есте комод сэ-л дучем дин пунктул фикс ал корпулуй, деша ка ши ын казул ротацией ын журул уней аксе фиксе, ел поате фи дус дин орьче пункт ал



Фиг. 155.



Фиг. 156.

аксей инстантане. Астфел, витеза  $\bar{v}$  а унуй оарекаре пункт  $M$  ал корпулуй (фиг. 155) конформ формулей векториале а луй Ейлер есте

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2)$$

яр валоаря витезей

$$v = \omega r \sin(\omega, \bar{r}) = \omega h, \quad (3)$$

унде  $h$  есте дистанца минимэ де ла пунктул консидерат пынэ ла акса инстантане.

Астфел, витезеле пунктелор унуй корп сынт пропорционале ку дистанцеле ачестор пункте ла акса инстантане. Дирекция витезей унуй оарекаре пункт ал корпулуй есте перпендикулярэ пе планул, ын каре се афлэ векторий  $\bar{\omega}$  ши  $\bar{r}$ , прин урмаре, есте перпендикулярэ пе сегментул  $h$ .

Дакэ требуе геситэ валоаря витезей унгуларе а корпулуй ынтр'ун момент дат, конформ формулей (3) есте суфициент сэ ымпэрцим витеза унуй пункт оарекаре ын ачест момент ла дистанца минимэ де ла пунктул дат пынэ ла акса инстантане. Акса инстантане ын проблемеле конкрете се афлэ адеся дин кондицииле механике але проблемей, адикэ ын моментул дат еа трече тотдяуна прин доуэ пункте фиксе але корпулуй. Астфел, дакэ корпул ын мишкаре се атинже ынтр'ун пункт оарекаре де

супрафаца фиксэ а алтуй корп ши липсөште алунекаря, акса инстантанее трече прин ачест пункт фикс ын моментул дат. Ын казул ростоголирий фэрэ алунекаре а унуй кон пе алт кон фикс (фиг. 156) акса мобилэ есте жёнератоаря комунэ а ачестор конурь  $OA$  ын лунгул кэрея ын моментул дат конуриле вин ын контакт. Дакэ, де екземплу, се куноаште витеза  $\overline{v_{O_1}}$  а пунктулуй  $O_1$ , витеза унгуларэ  $\omega$  пентру конул мобил есте

$$\omega = \frac{v_{O_1}}{h} = \frac{v_{O_1}}{H \sin \alpha},$$

унде  $H=OO_1$  ши  $\alpha$  есте унгул де семидескидере а конулуй мобил.

Проекцииле витезей унгуларе  $\overline{\omega}$  а корпулуй атыт пе акселе мобиле де координате, кыт ши пе челе фиксе се пот детермина де асемения прин унгуриле луй Ейлер ка функций де тимп, че карактеризязэ позиция корпулуй ын рапорт ку системул фикс де координате.

Дакэ проектэм пэрциле дряптэ ши стынгэ але екуацией (2) пе акселе де координате, обцинем формулеле луй Ейлер пентру проекцииле витезелор  $v_x$ ,  $v_y$  ши  $v_z$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

унде  $x$ ,  $y$ ,  $z$  сынт координателе унуй пункт ал корпулуй, витеза кэруа се детерминэ.

Дакэ луэм ниште пункте але корпулуй, ситуате пе акса инстантанее ын моментул дат, пентру еле витезеле сынт егале ку zero, прин урмаре, консидерынд  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  егале ку zero, дин (4) кэлэтэм урмэтоареле екуаций пентру координателе ачестор пункте:

$$\begin{aligned} \omega_y z - \omega_z y &= 0; \\ \omega_z x - \omega_x z &= 0; \\ \omega_x y - \omega_y x &= 0. \end{aligned}$$

Ачесте екуаций се пот репрезента ын фелул урмэтор:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}. \quad (5)$$

Пентру ун анумит момент формула (5) есте екуация аксей инстантанее. Дакэ, ынсэ, мэримиле, че фигурызэ ын формула (5) сынт функций де тимп, еа ва репрезента екуация аксоидей мобиле сау фиксе (ын форма параметрике) ын функции де фапэ тул ын каре систем де координате еа есте алкэтуитэ. Дак-

$x, y, z$  сынт координате куренте але унуй пункт ал аксей ин-  
стантане ын рапорт ку акселе мобиле, фиксате ку корпус ын  
мишкаре, яр  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ —проекцииле витезей унгуларе а кор-  
пулуй пѣ ачесте аксе, формула (5) есте екуация аксоидей мо-  
биле. Дакэ ын лок де акселе мобиле де координате луэм ак-  
селе фиксе, ын рапорт ку каре се консидерэ мишкаря корпу-  
луй, ши луэм проекцииле витезей унгуларе де асеменя пе  
ачесте аксе, формула (5) репрезинтэ екуация аксоидей фиксе.

Витеза унуй пункт оарекаре се поате калкула ка деривата  
ынтыя ын рапорт ку тимпул а векторулуй де позиции  $\vec{r}$  ал аче-  
стуй пункт. Пе де алтэ парте, витеза унуй пункт ал корпуслуй,  
че се ротеште ын журул унуй пункт фикс, се поате калкула дупэ  
формула векториалэ а луй Ейлер (2). Прин урмаре, деривата  
ын рапорт ку тимпул а векторулуй де позиции ал орькэруй  
пункт ал унуй корп солид, че се ротеште ын журул унуй пункт  
фикс, се детерминэ ку ажуторул формулей

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (6)$$

Мэримя векторулуй де позиции  $\vec{r}$ , фиинд дистанца динтре  
доуэ пункте але унуй корп солид есте о мэриме константэ ын  
мишкаря ачестуй корп. Прин урмаре, егалитатя (6) се поате  
консидера ка о формулэ пентру калкулул дериватей ын рапорт  
ку тимпул а векторулуй, мэримя кэруя есте константэ ши ва-  
риация ачестуй вектор аре лок нумай ка резултат ал ротацией  
векторулуй ку витеза унгуларэ  $\vec{\omega}$  ымпреунэ ку корпус ын жу-  
рул пунктулуй фикс.

Дакэ луэм ун систем де координате фикс  $Oxuz$ , фиксат ку  
корпус че се ротеште ын журул унуй пункт фикс ку витеза ун-  
гуларэ  $\vec{\omega}$ , атунч пентру векторий унитате  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , ориентаць  
дупэ ачесте аксе де координате ка пентру векторий, мэримиле  
кэроора сынт константе, ын база луй (6) авем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{i}; \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{j}; \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Формулеле (7) се нумеск формулеле луй Пуасон.

## § 6. АКЧЕЛЕРАЦИИЛЕ ПУНКТЕЛОР УНУЙ КОРП ЫН МИШКАРЯ ДЕ РОТАЦИИ ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС

Формула пентру акчелерация унуй оарекаре пункт  $M$  ал корпулуй, че се ротеште ын журул унуй пункт фикс, ну се поате кэпэта немижлочит апликынд формула пентру акчелерация ын мишкаря де ротации ын журул уней аксе фиксе, деоарече ын казул консидерат акчелерация унгуларэ  $\varepsilon$  ну есте ориентатэ дупэ акса де ротации, прин урмаре, нич дупэ  $\omega$ . Ын рест формулеле пентру акчелераций ын ачесте казурь сынт комплект аналоаже.

Формула пентру акчелерация унуй пункт оарекаре  $M$  ал корпулуй се поате кэпэта прин дериваря ын рапорт ку тимпул а векторулуй витезей, цинынд сама, кэ витеза се калкулязэ дупэ формула (2). Луынд деривата, обцинем:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Деоарече

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

авем

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (8)$$

Формула (8) адеся се нумеште формула луй Ривалс.

О парте дин акчелерация тоталэ а пунктулуй

$$\bar{a}_{\text{рот}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \quad (9)$$

се нумеште *акчелерация де ротации*, яр алтэ парте

$$\bar{a}_{\text{акс}} = \bar{\omega} \times \bar{v} \quad (10)$$

се нумеште *акчелерация аксипетэ*. Прин урмаре, формула (8) ва авя форма

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{рот}} + \bar{a}_{\text{акс}}. \quad (11)$$

адикэ акчелерация унуй пункт ал корпулуй ын мишкаря де ротации ын журул унуй пункт фикс есте егалэ ку сума векториалэ а акчелерацийлор де ротации ши аксипетэ.

Ын казул женерал акчелерацийиле де ротации ши аксипетэ ну сынт речипрок перпендикуларе, прин урмаре, мэримя акчелерацией  $\bar{a}$  се калкулязэ ка диагонала унуй паралелограм дупэ формула

$$a = \sqrt{a_{\text{рот}}^2 + a_{\text{рот}}^2 + 2a_{\text{акс}}a_{\text{акс}} \cos(\bar{a}_{\text{рот}} \wedge \bar{a}_{\text{акс}})}. \quad (12)$$

Сэ консидерэм акчелерацииле де ротацие ши аксипетэ ын парте. Акчелерация де ротацие се калкулязэ дупэ формула (9), аналожикэ ку формула (2) пентру витеза унуй пункт. Нумай кэ аич ын лок де витеза унгуларэ  $\bar{\omega}$  фигурязэ акчелерация унгуларэ  $\bar{\epsilon}$ . Деачея акчелерация де ротацие  $\bar{a}_{\text{рот}}$  есте ориентатэ ка ши витеза  $\bar{v}$ , дакэ корпул се ротеште ын моментул дат ку о витезэ унгуларэ, егалэ ку акчелерация унгуларэ  $\bar{\epsilon}$ . Мэри-  
 мя акчелерацией де ротацие  $\bar{a}_{\text{рот}}$  се детерминэ ка ши валоаря витезей  $\bar{v}$  [формула (3)]:

$$\bar{a}_{\text{рот}} = h_1 \bar{\epsilon}, \quad (13)$$

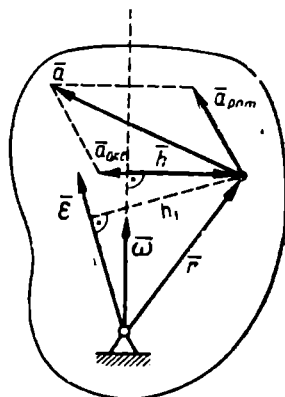
унде  $h_1$  есте дистанца минимэ де ла пунктул корпулуй пынэ ла линия, дупэ каре есте ориентатэ акчелерация унгуларэ  $\bar{\epsilon}$  (фиг. 157).

Формула (13) пентру  $\bar{a}_{\text{рот}}$  се капэтэ дин формула (9)

$$\bar{a}_{\text{рот}} = |\bar{\epsilon} \times \bar{r}| = \epsilon r \sin(\bar{\epsilon}, \bar{r}) = h_1 \bar{\epsilon},$$

унде

$$r \sin(\bar{\epsilon}, \bar{r}) = h_1.$$



Фиг. 157.

Дин формула (13) резултэ кэ векторул витезей унгуларэ  $\bar{\epsilon}$  се афлэ пе линия дряптэ, каре трече прин пунктул фикс. Ын каз контрар ачест пункт ва авя о акчелерацие де ротацие диферитэ де зеро.

Мэримя акчелерацией аксипете  $\bar{a}_{\text{акс}}$  се поате общине дин формула (10):

$$\bar{a}_{\text{акс}} = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega v \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega v = h \omega^2, \quad (14)$$

деоарече витеза унгуларэ  $\bar{\omega}$  есте перпендикулярэ пе витеза  $\bar{v}$ .

Акчелерация аксипетэ есте ориентатэ дупэ перпендикулара пе акса инстантане, кобортэ дин пунктул, пентру каре еа се калкулязэ, адикэ дупэ сегментул  $h$ , деоарече, фиинд продусул векториал ал векторилор  $\bar{\omega}$  ши  $\bar{v}$ , еа есте перпендикулярэ пе планул, ын каре се афлэ ачешть векторь, ши аре сенсул векторулуй ачестуй продус векториал. Дакэ ынтродучем векторулул  $h$ , ориентат дупэ перпендикулара дусэ де пе акса инстантане спре пунктул консидерат, атунч  $\bar{a}_{\text{акс}}$  ва фи

$$\bar{a}_{\text{акс}} = -h \omega^2. \quad (15)$$

Ын казул ротацией корпулуй солид ын журулул уней аксе фикс-

се, акчелерация унгуларэ ши витеза унгуларэ сынт ориентате дупэ ачаствэ аксэ, ши атунч дистанцеле  $h$  ши  $h_1$  сынт егале ын-тре еле. Деч, акчелерация де ротация ва фи акчелерация тан-женциалэ, яр акчелерация аксипетэ се ва трансформа ын акчелерация нормалэ сау центрипетэ. Прин урмаре, ротация корпулуй ын журул унуй пункт фикс се поате консидера ка о мишка-ре май жёнералэ декыт ротация корпулуй ын журул уней аксе фиксе.

## § 7. КАЛКУЛАРЯ АКЧЕЛЕРАЦИЕЙ УНГУЛАРЕ

Пентру а калкула акчелерация пунктелор унуй корп требуе сэ куноащем акчелерация унгуларэ  $\epsilon$ . Сэ консидерэм доуэ методе жёнерале де калкул.

1. Дакэ куноащем проекциле витезей унгуларе пе акселе мобиле сау фиксе де координате  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , проекциле акчелерацией унгуларе пе ачеляшь аксе се детерминэ ку ажуто-рул формулелор

$$\epsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \epsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (16)$$

Дупэ проекций се поате афла ушор мэримя акчелерацией унгуларе ши косинусуриле унгурило-рей ку акселе де к-донате.

2. Чялалтэ методэ де детерминаре а акчелерацией унгуларе  $\bar{\epsilon}$  се базязэ пе дескомпунеря ей ын доуэ компоненте речипрок перпендикуларе. Дакэ ынтродучем векторул унитате  $\bar{\omega}_0$ , ориен-тат дупэ  $\bar{\omega}$ , атунч

$$\bar{\omega} = \omega \bar{\omega}_0,$$

ши дупэ дефиниция луй  $\bar{\epsilon}$  обцинем

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \bar{\omega}_0 + \omega \frac{d\bar{\omega}_0}{dt}. \quad (17)$$

Компонента  $\bar{\epsilon}_1$  а акчелерацией унгуларе тотале

$$\bar{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \omega_0,$$

есте ориентатэ дупэ векторул  $\bar{\omega}$ , кынд  $\frac{d\omega}{dt} > 0$  ши контрар луй  $\bar{\omega}$ , кынд  $\frac{d\omega}{dt} < 0$ .

Компонента  $\bar{\epsilon}_2$  а акчелерацией унгуларе тотале

$$\bar{\epsilon}_2 = \omega \frac{d\bar{\omega}_0}{dt},$$



есте перпендикуларэ тотдяуна пе  $\bar{\omega}$ , деоарече деривата ын рапорт ку тимпул а векторулуй унитате  $\bar{\omega}_0$  есте ун вектор, перпендикулар пе векторул унитате де ла каре с'а луат деривата, ши деч, перпендикулар пе векторул  $\bar{\omega}$ .

Компонента акчелерацией унгуларе  $\bar{\epsilon}_1$  есте акчелерация унгуларэ тоталэ ла ротация корпулуй ын журул уней аксе фиксе, деоарече компонента  $\bar{\epsilon}_2$  ын ачест каз есте егалэ ку зеро. Сэ калкулэм компонента акчелерацией унгуларе  $\bar{\epsilon}_2$ . Ын проблемеле техниче адесея витеза унгуларэ есте константэ дупэ мэриме ши вариязэ нумай дупэ дирекције. Ын ачест каз компонента  $\bar{\epsilon}_1=0$  ши акчелерация унгуларэ тоталэ коинчиде ку  $\bar{\epsilon}_2$ . Дакэ, ынсэ,  $\bar{\epsilon}_1$  ну есте егалэ ку зеро, еа се поате калкула сепарат, ши апой, адунындо ку компонента  $\bar{\epsilon}_2$ , се детерминэ акчелерация унгуларэ тоталэ  $\bar{\epsilon}$ . Астфел, дакэ мэримя витезей унгуларе есте константэ,

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_2 = \omega \frac{d\bar{\omega}_0}{dt}.$$

Ын ачест каз вом фолоси дефиниция акчелерацией унгуларе прин витеза унгуларэ:

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Авынд ын ведере, кэ  $\omega = \text{const}$  ши аплчкынд формула аналожикэ дериватей ын рапорт ку тимпул а векторулуй де позиции [формула (6)]; кынд векторул де позиции есте констант дупэ мэриме, вом авя

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}, \quad (18)$$

унде  $\bar{\omega}_e$  есте витеза унгуларэ де ротацие а векторулуй  $\bar{\omega}$  деривабил ын рапорт ку тимпул, адикэ витеза унгуларэ де ротацие а аксей инстантанее, дупэ каре есте ориентат векторул  $\bar{\omega}$ . Мэримя акчелерацией унгуларе се поате гэси ка ши мэримя витезей пунктулуй, адикэ

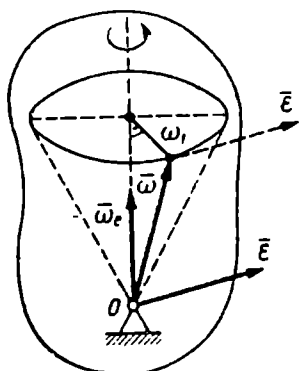
$$\epsilon = \omega_1 \omega_e, \quad (19)$$

унде ка дистанцэ  $h$  есте  $\omega_1$ —дистанца минимэ де ла екстремитатя векторулуй  $\bar{\omega}$  пынэ ла линия дряптэ, дупэ каре есте ориентатэ витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_e$  (фиг. 158). Векторул акчелерацией унгуларе  $\bar{\epsilon}$  трече прин пунктул фикс ши есте паралел

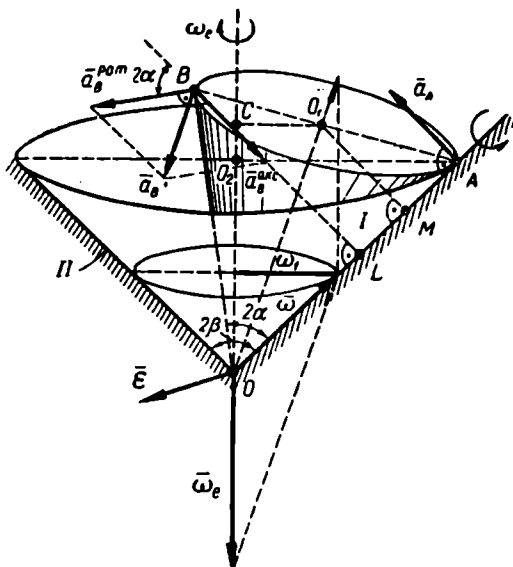
ку танжента дусэ ла ходографул векторулуй  $\bar{\omega}$ . Дефинитив, сенсул луй  $\bar{\epsilon}$  се я ын кореспундере ку формула (18), адикэ ын сенсул ротацией аксей инстантанее ын функции де витеза унгуларэ  $\omega_e$ .

Сэ консидерэм ун екземплу де калкул а витезей унгуларе, акчелерацией унгуларе ши а витезелор ши акчелерациилор линииаре але пунктелор унуй корп, че се ротеште ын журул унуй пункт фикс.

*Екземплу.* Ун кон циркулар  $I$ , авынд ун унгь де дескидере  $2\alpha$  се ростооголеште фэрэ алунекаре пе партя интериорэ а унуй кон циркулар фикс  $II$  ку ун унгь де дескриере  $2\beta$  (фиг. 159).



Фиг. 158.



Фиг. 159.

Витеза пунктулуй  $O_1$  а конулуй мобил есте константэ ши егалэ ку  $v$ , дистанца  $OO_1$  есте егалэ ку  $H$ . Сэ се детермине витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а конулуй мобил, прекум ши витезеле ши акчелерацииле пунктелор  $A$  ши  $B$  але ачестуй кон.

*Резолваре.* Аксэ инстантанее а конулуй  $I$  есте женераоторя  $OA$ . Дакэ витеза пунктулуй  $O_1$  есте ориентатэ ын партя екстериорэ а планулуй  $OAO_1$ , витеза унгуларэ а конулуй  $\bar{\omega}$  есте ориентатэ дупэ акса инстантанее де ла пунктул  $O$  опре  $A$ . Мэримя витезей унгуларе есте

$$\omega = \frac{v}{O_1M} = \frac{v}{H \sin \alpha} = \text{const.}$$

Витеза пунктулуй  $A$  есте егалэ ку zero, деоарече ачест

пункт се гэсеште пе акса инстантанеэ. Витеза пунктулуй  $B$  се поате общине дин формула

$$v_B = \omega BL = \frac{v}{H \sin \alpha} 2H \sin \alpha = 2v.$$

Витеза  $\bar{v}_B$  есте перпендикулярэ пе планул  $OLB$  а фигурий ши есте ориентатэ де ла еа спре партя екстериорэ.

Акчелерация унгюларэ  $\bar{\epsilon}$  се калкулязэ дин формула (19)

$$\epsilon = \omega_1 \omega_e.$$

Ходографул векторулуй  $\bar{\omega}$  есте о чиркумферинцэ де разэ  $\omega_1$

$$\omega_1 = \omega \sin \beta = \frac{v \sin \beta}{H \sin \alpha}.$$

Дакэ консидерэм планул, ын каре се афлэ акса инстантанеэ  $OA$  (фиг. 159), акса конулуй фикс  $OO_2$  ши акса конулуй мобил  $OO_1$  (планул фигурий), атулч ла мишкаря конулуй  $I$  ачест план се ротеште ын журул аксей конулуй фикс  $OO_2$  ситуате ын планул индикат, прин урмаре, ын журул ачестей аксе се ротеште ши акса инстантанеэ  $OA$ , че се гэсеште ын планул дат. Витеза унгюларэ а ачестей ротаций  $\omega_e$  се поате афла, дакэ ымпэрцим витеза унуй пункт оарекаре ал ачестуй план, че партиципэ нумай ла ротация ын журул луй  $OO_2$  ши каре ну аре алтэ мишкаре, ла дистанца минимэ а ачестуй пункт ла акса  $OO_2$ . Евидент, кэ тоате пунктеле, ситуате пе акса конулуй мобил  $OO_1$ , поседэ проприетатя ремаркатэ май сус. Прин урмаре, луынд ын ачест скоп пунктул  $O_1$ , пе ачестэ аксэ, вом авя

$$\omega_e = \frac{v}{O_1C},$$

унде  $O_1C$  есте дистанца минимэ де ла пунктул  $O_1$  пынэ ла акса  $OO_2$ .

Деоарече

$$O_1C = H \sin (\beta - \alpha),$$

атулч

$$\omega_e = \frac{v}{H \sin (\beta - \alpha)}.$$

Астфел, дефинитив

$$\epsilon = \omega_1 \omega_e = \frac{v \sin \beta}{H \sin \alpha} \cdot \frac{v}{H \sin (\beta - \alpha)} = \frac{v^2 \sin \beta}{H^2 \sin \alpha \sin (\beta - \alpha)}.$$

Ынтрукыт витеза пунктулуй  $O_1$  есте ориентатэ де ла фигурэ ын партя екстериорэ, акса инстантанеэ  $OA$  се ротеште ын журул луй  $O_1O_2$  ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник ши деч,  $\epsilon$  есте ориентатэ перпендикуляр пе планул  $OAC$ .

Акцелерация унуй пункт оарекаре ал конулуй мобил се поате детермина дупэ формула

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{рот}} + \bar{a}_{\text{акс.}}$$

Пентру пунктул  $A$

$$a_{\text{акс}} = \omega^2 h = 0,$$

деоарече пентру ачест пункт  $h = 0$ .

Акцелерация де ротация а пунктулуй  $A$  есте

$$a_{\text{рот}} = \varepsilon h_1 = \varepsilon OA = \frac{v^2 \sin \beta}{H^2 \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \cdot \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{v^2 \sin \beta}{H \sin \alpha \cos \alpha \sin(\beta - \alpha)}.$$

Мэримя  $\bar{a}_{\text{рот}}$  прин урмаре, ши акцелерация тоталэ а ачестуй пункт  $\bar{a}_A$  есте ориентатэ перпендикулар пе  $OA$  ын планул  $OAO_1$ , асфел, ынкыт дин вырфул векторулуй  $\bar{\varepsilon}$  се веде ротация ей ын сенсул опус ротацией ачелор де часорник.

Пентру пунктул  $B$  авем:

$$a_{\text{акс}} = \omega^2 BL = \frac{v^2}{H^2 \sin^2 \alpha} 2H \sin \alpha = \frac{2v^2}{H \sin \alpha}.$$

Акцелерация  $\bar{a}_{\text{акс}}$  есте ориентатэ дупэ  $BL$  де ла пунктул  $B$  спре пунктул  $L$

$$a_{\text{рот}} = \varepsilon OB = \frac{v^2 \sin \beta}{H^2 \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)} \cdot \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{v^2 \sin \beta}{H \sin \alpha \cos \alpha \sin(\beta - \alpha)}.$$

Акцелерация тоталэ а пунктулуй  $B$  се поате калкула ка диагонала паралелограмулуй, конструит пе  $\bar{a}_{\text{акс}}$  ши  $\bar{a}_{\text{рот}}$ , адикэ

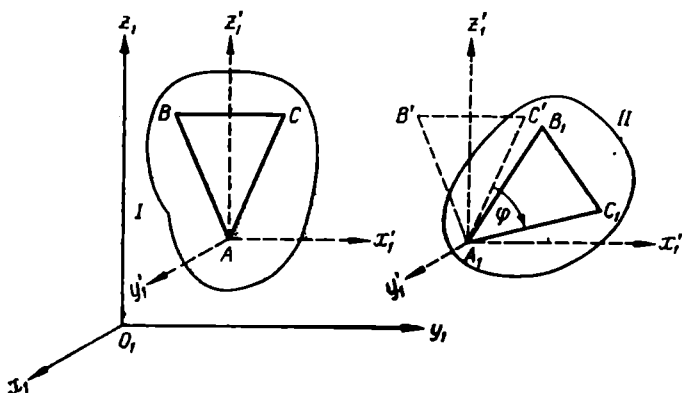
$$\begin{aligned} a_B &= \sqrt{a_{\text{акс}}^2 + a_{\text{рот}}^2 - 2a_{\text{акс}}a_{\text{рот}} \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{v^2}{H \sin \alpha} \sqrt{4 + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \sin^2(\beta - \alpha)} - \frac{4 \sin \beta \cos 2\alpha}{\cos \alpha \sin(\beta - \alpha)}}. \end{aligned}$$

Ремаркэм, кэ витеза унгюларэ  $\omega$ , се поате кэлэта, дакэ дескомпунем дупэ регула паралелограмулуй витеза унгюларэ  $\omega$ , ориентатэ дупэ акса инстантанее, ын доуэ компоненте пе акселе конурилор мобил ши фикс. Атунч компонента луй  $\bar{\omega}$  пе акса конулуй фикс ва фи токмай витеза унгюларэ  $\omega_e$ .

Дескомпунеря мишкэрий унуй корп либер ынтр'о мишкаре де трансляции ши уна де ротации

Сэ консидерэм казул жёнерал де мишкаре а унуй корп либер, адикэ а унуй корп, че аре шасе граде де либертате. Вом демонстра, кэ чя май жёнералэ мишкаре а унуй корп солид либер се поате репрезента ка о мишкаре конституентэ динтр'о мишкаре де трансляции ымпреунэ ку ун оарекаре пункт ал корпулуй ши о ротации ын журул ачестуй пункт.

Позиция корпулуй ын рапорт ку ун оарекаре систем де координате  $O_1x_1y_1z_1$  се детерминэ комплект фиинд дате трей пункте але корпулуй, каре ну се гэсеск пе ачеш дряптэ, сау фиинд дат ун триунгь фиксат ку корпул. Триунгюл  $ABC$  ши корпул фиксат ку ел поате фи мутат динтр'о позиции ын орьче алтэ позиции принтр'о депласаре де трансляции ымпреунэ ку ун оарекаре пункт ал корпулуй, де екземплу ку пунктул  $A$ , кынд системул де координате  $Ax'_1y'_1z'_1$  ефектуязэ о мишкаре де трансляции ши о ротации ын рапорт ку системул мобил де координате  $Ax'_1y'_1z'_1$  сау ын журул аксей, че трече прин ачест пункт (фиг. 160).



Фиг. 160.

Ка ши ын казул мишкэрий плане а уней фигурь плане, депласаря де трансляции а корпулуй депинде де алежеря пунктулуй, ымпреунэ ку каре се мишкэ корпул, яр ротация ын журул уней аксе сау ын журул унуй пункт ну депинде де алежеря ачестуй пункт. Депласаря де трансляции се поате скимба ку ротация ши, ын сфыршит, еле се пот фаче симултан, адикэ ын тимп че корпул етекуязэ мишкаря де трансляции динтр'о позиции ын алта, ын ачелаш тимп ел се поате роти ын журул унуй пункт ку ун унгь нечесар. Дакэ доуэ позиций але корпулуй сынт инфинит

де апропийте, депласаря элементарэ адевэратэ а унуй корп солид либер се поате ынлокуи принтр'о депласаре де трансляции элементарэ ымпреунэ ку ун пункт оарекаре ал корпулуй ши о ротации элементарэ ын журул аксей инстантанее, че трече прин ачест пункт, ефектуате ын ачелаш тимп ка ши депласаря адевэратэ а корпулуй.

Астфел, орьче мишкаре а унуй корп солид либер, се поате ынлокуи ку о тоталитате де мишкэрь де трансляции ымпреунэ ку ун оарекаре пункт ал корпулуй ши ротаций ын журул ачестуй пункт, ефектуате ын ачелаш тимп ка ши мишкаря адевэратэ. Мишкаря де трансляции ымпреунэ ку ун пункт ал корпулуй ши системул мобил де координате  $Ax'_1y'_1z'_1$  есте о мишкаре де транспорт, яр мишкаря корпулуй ын рапорт ку системул мобил де координате, че репрезинтэ ын орьче момент о ротации ын журул аксей сале инстантанее, каре трече прин ачест пункт мобил ал корпулуй, есте о мишкаре релативэ.

Аша дар, орьче мишкаре а унуй корп солид либер, поате фи алжэтуитэ динтр'о мишкаре де трансляции ымпреунэ ку системул мобил де координате ши о мишкаре сферикэ ын рапорт ку ачест систем. Пентру мишкаря сферикэ релативэ се поате ынтродуче витеза унгуларэ  $\omega$  ши акчелерация унгуларэ  $\epsilon$ , каре есте деривата ынтыя ын рапорт ку тимпул а луй  $\omega$ , ка ши ын казул де ротации а корпулуй ын журул унуй пункт фикс. Витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а мишкэрий релативе де ротации ын журул унуй пункт оарекаре ал корпулуй се нумеште ын каз жёнерал витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а корпулуй солид либер. Ачесте мэримь ну депинд де алежёря пунктулуй корпулуй. Нумай мишкаря де транспорт, каре есте о трансляции а корпулуй, депинде де алежёря ачестуй пункт.

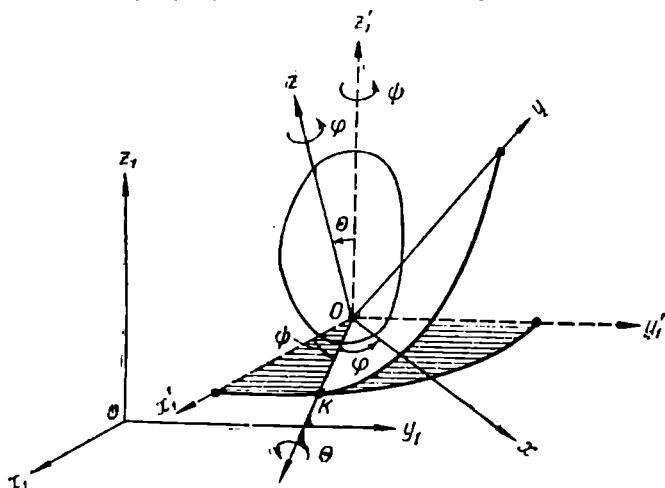
### Екуацииле мишкэрий унуй корп солид либер

Пентру а дефини позиция унуй корп солид либер ын рапорт ку ун систем де координате  $O_1x_1y_1z_1$ , ын каз жёнерал, есте суфициент сэ дефиним ын рапорт ку ачест систем де координате позиция унуй алт систем де координате  $Ox'_1y'_1z'_1$ , каре ефектуэзэ о мишкаре де трансляции фацэ де системул ынтый де координате ымпреунэ ку ун пункт оарекаре  $O$  ал корпулуй консидерат ши унгиуриле луй Ейлер, каре детерминэ позиция системулуй де координате  $Ox_2y_2z_2$  фиксат ку корпул ын мишкаре, ын рапорт ку системул де координате  $Ox'_1y'_1z'_1$  (фиг. 161).

Пентру симпличитате адмitem, кэ акселе  $Ox'_1, Oy'_1, Oz'_1$  сынт паралеле респектив ку акселе  $O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1$ . Астфел, позиция унуй корп солид либер ын рапорт ку системул де

координате  $O_1x_1y_1z_1$  се детерминэ комплект, дакэ дефиним ын рапорт ку ачест систем координателе пунктулуй  $O$  ал корпулуй ка ниште функций унивоचे де тимп ши унгюриле луй Ейлер але системулуй мобил  $Oxyz$ , фиксат ку корпул ын мишкаре, ын рапорт ку мишкаря де трансляcie а системулуй де координате  $Ox'y'z'$  ымпреунэ ку пунктул  $O$  ал корпулуй, адикэ

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t); & y_0 &= f_2(t); & z_0 &= f_3(t); \\ \psi &= f_4(t); & \theta &= f_5(t); & \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



Фиг. 161.

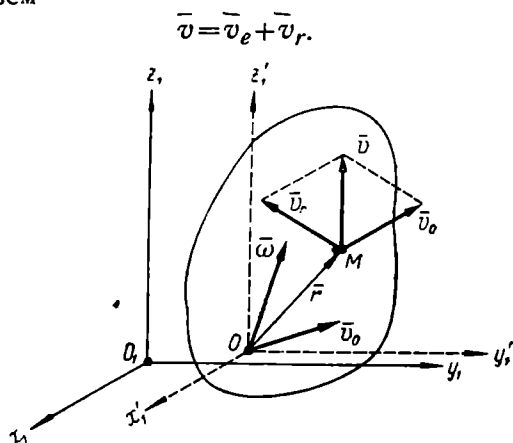
Екуациле (20) сынт екуациле чинематиче але мишкэрий унуй корп солид либер ын казул жєнерал де мишкаре. Екзистэ шасе екуаций де ачест фел, адикэ атытэ, жыте граде де либертате аре корпул солид либер. Примеле трей екуаций (20) детерминэ мишкаря де транспорт а корпулуй ымпреунэ ку пунктул  $O$ , яр челелалте трей екуаций — мишкаря де ротацие ын журул ачестуй пункт.

Примеле трей екуаций, пентру мишкаря консидератэ а корпулуй солид либер, депинд де алежерэ пунктулуй  $O$  ал корпулуй; ултимеле трей екуаций (унгюриле луй Ейлер) ну депинд де алежерэ пунктулуй  $O$ , ын журул кэруя се консидерэ ротация корпулуй.

#### Витезеле ши акчелерациле пунктелор унуй корп солид либер ын казул жєнерал

Деоарече мишкаря унуй корп солид либер ын казул жєнерал се поате репрезента ка о мишкаре компусэ, витеза ши акчелерация унуй пункт оарекаре  $M$  ал ачестуй корп се поате

калкула респектив дупэ теоремеле де компунере а витезелор ши акчелерациилор. Аша, пентру витеза  $\vec{v}$  а пунктулуй  $M$  (фиг. 162) авем



Фиг. 162.

Мишкаря де транспорт есте о мишкаре де трансляție а корпулуй ымпреунэ ку пунктул  $O$  ал ачестуй корп. Прин ур-маре, витезеле мишкэрий де транспорт каре есте о мишкаре де трансляție сынт ачеляшь пентру тоате пунктеле ши егале ку витеза  $\vec{v}_o$  а пунктулуй  $O$ . Мишкаря де ротация ын журул пунктулуй  $O$  есте о мишкаре релативэ ши, деч, витеза мишкэрий релативе се поате калкула дупэ формула векториалэ а луй Ейлер

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

унде  $\vec{r}$  есте векторул де позиции а пунктулуй  $M$ , дус дин пунктул  $O$ ;

$\vec{\omega}$ —витеза унгуларэ а ротацией релативе а корпулуй ын журул пунктулуй  $O$  сау ын рапорт ку акса инстантанее мобилэ, че трече прин пунктул  $O$ .

Пентру витеза пунктулуй  $M$  кэпэтэм дефинитив урмэтоаря формулэ

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (21)$$

Акчелерация  $\vec{a}$  а пунктулуй  $M$  (фиг. 163) ын казул пар-тикулар, кынд мишкаря де транспорт есте о трансляție, се детерминэ дупэ формула

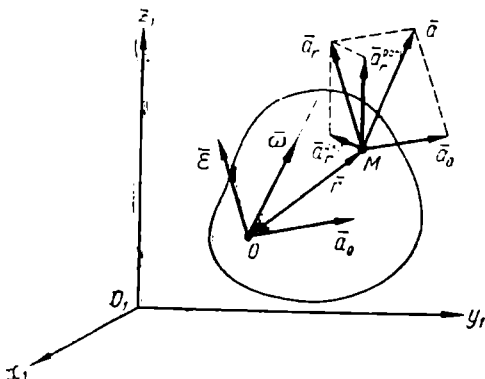
$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$



Акчелерация мишкэрий де транспорт а тутурор пунктелор корпулуй есте егалэ ку акчелерация  $\bar{a}_O$  а пунктулуй  $O$ , финдкэ дрепт мишкаре де транспорт се я мишкаря де трансляции а корпулуй ымпреунэ ку пунктул  $O$ . Акчелерация мишкэрий релативе, ка ши ла ротация унуй корп ын журул унуй пункт фикс, констэ дин компонента аксипетэ ши чя де ротации, адикэ

$$\bar{a}_r = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (22)$$

унде  $\bar{\epsilon}$  есте акчелерация унгуларэ а корпулуй.



Фиг. 163.

Формула дефинитивэ пентру акчелерация пунктулуй  $M$  ал унуй корп либер ын казул жєнерал ал мишкэрий сале аре форма

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (23)$$

сау пе база формулей луй Ривалс

$$\bar{a} = \bar{a}_O + \bar{a}_r^{\text{рот}} + \bar{a}_r^{\text{акс}}, \quad (24)$$

унде

$$\bar{a}_r^{\text{рот}} = \bar{\epsilon} \times \bar{r},$$

$$\bar{a}_r^{\text{акс}} = -\bar{r}\omega^2.$$

Ремаркэм, кэ дакэ ын чинематика унуй корп солид либер ын калитате де пункт  $O$  се поате луа орьче пункт ал корпулуй, ын динамикэ ын калитате де ун асеменя пункт есте конвенабил сэ алежем центрул маселор корпулуй.

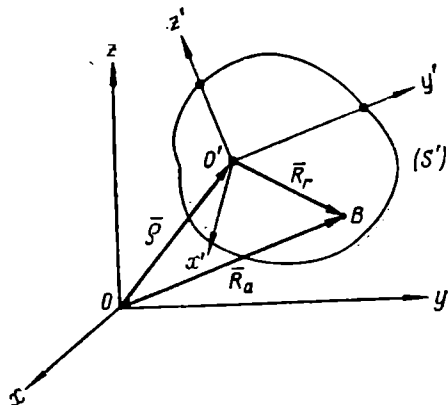
## ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ КОМПУНЕРЯ АКЧЕЛЕРАЦИИЛОР ПЕНТРУ УН ПУНКТ ЫН КАЗ ЖЕНЕРАЛ

Фолосинд экспрессииле пентру витезеле пунктелор унуй корп солид ын мишкаря луй ын журул унуй пункт фикс ши ын казул женерал де мишкаре а унуй корп ын опациу, се поате стабилити о регулэ де гэсире а акчелерацией абсолюте а пунктулуй ын мишкаря компусэ ын каз женерал — теорема деспре компунеря акчелерациилор унуй пункт. Ачаствэ теоремэ а фост демонстратэ ын каз партикулар, кынд мишкаря де транспорт се пресупуне а фи де трансляцие.

Вом демонстра теорема чинематикэ а луй Кориолис ын казул женерал пентру орьче мишкаре де транспорт. Май ынтый вом дедуче о формулэ импортантэ дин механикэ, каре експримэ релация динтре деривателе локалэ ши тоталэ але унуй вектор, че суфэрэ о вариацие дублэ: локалэ ын рапорт ку системул мобил де координате ши тоталэ ын рапорт ку системул фикс де координате. Ачаствэ релацие се нумеште формула луй Бур.

### § 1. ДЕДУЧЕРЯ РЕЛАЦИЕЙ ДИНТРЕ ДЕРИВАТА ТОТАЛЭ ШИ ЧЯ ЛОКАЛЭ (ФОРМУЛА ЛУЙ БУР)

Фие корпул ( $S'$ ) се мишкэ фацэ де системул фикс де координате  $Oxyz$  ын мод арбитрар. Ын рапорт ку корпул ( $S'$ ) се мишкэ пунктуй  $B$ . Сэ легэм фикс ку корпул системул мобил де координате  $O'x'y'z'$  авынд орижия ынтр'ун пункт оарекаре  $O'$  (фиг. 164).



Фиг. 164.

Фие  $\bar{R}_a$  есте векторул де позиции абсолют ал пунктулуй  $B$ ;  $\bar{R}_r$  — векторул де позиции релатив ал пунктулуй  $B$ ;  $\rho$  — векторул де позиции, че детерминэ позиция орижий  $O'$  а системул мобил де координате ын рапорт ку системул фикс де координате  $Oxyz$ .

Дупэ кум се штие, витеза абсолютэ  $\bar{v}_a$  а унуй пункт есте сума векториалэ динтре витеза де транспорт  $\bar{v}_e$ , пе каре о аре пунктуй, легат фикс ку системул мобил де координате  $O'x'y'z'$

(ку корпус  $S'$ ) ши витеза релативэ  $\bar{v}_r = \frac{d\bar{R}_r}{dt}$  ын мишкаре ын рапорт ку системул мобил де координате, адикэ

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

Мишкаря системулуй  $O'x'y'z'$  (а корпуслуй  $S'$ ) се поате сокоти ка финнд алкэтуитэ дин мишкаря де трансляции ымпреунэ ку пунктул  $O'$  ши мишкаря ын журул пунктулуй  $O'$ .

Аша дар, витеза де транспорт а пунктулуй  $B$

$$\bar{v}_e = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{R}_r,$$

унде  $\bar{v}_{O'}$  есте витеза мишкэрий де трансляции егалэ ку витеза пунктулуй  $O'$ ;

$\bar{\omega}$  — витеза унгуларэ инстантанее де ротации а корпуслуй ( $S'$ ) ын рапорт ку акса инстантанее, че трече прин пунктул  $O'$ .

Витеза релативэ а пунктулуй есте егалэ ку деривата локалэ а векторулуй де позиции  $\bar{R}_r$ :

$$\bar{v}_r = \frac{d\bar{R}_r}{dt}$$

сау о алтэ формэ де нотаре

$$\bar{v}_r = \left( \frac{d\bar{R}_r}{dt} \right)_r.$$

Прин урмаре, витеза абсолутэ а пунктулуй  $B$

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{R}_r}{dt} + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{R}_r. \quad (1)$$

Пе де алтэ парте, деоарече ын орьче момент  $\bar{R}_a = \bar{p} + \bar{R}_r$ , витеза абсолутэ а пунктулуй  $B$

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{R}_a}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{R}_r}{dt}. \quad (2)$$

Ын формула (2) тоате деривателе сынт тотале, ши карактеризээ вариация векторилор ын системул фикс де координате, унде

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{v}_{O'}. \quad (3)$$

Аич  $\bar{v}_{O'}$  есте витеза пунктулуй  $O'$  — орижиня системулуй мобил де координате.

Компарынд (1) ши (2) ши луынд ын консидерацие (3), кэ-пэтэм

$$\frac{d\bar{R}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{R}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{R}_r. \quad (4)$$

Формула луй Бур (4) есте дедусэ пентру векторул де позиции  $\bar{R}_r$ , ал унуй оарекаре пункт, каре аре о мишкаре релативэ. Ынсэ, евидент, кэ формула есте адеврэтэ, дакэ вом консидеру ын лок де векторул  $\bar{R}_r$ , орьче алт вектор  $\bar{H}_r$ , вариация комплектэ а кэруя ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс аре лок ынтр'ун мод компус, адикэ есте датэ вариация векторулуй  $\bar{H}_r$  ын системул мобил ши се куноаште ынсэшь мишкаря системулуй мобил де координате. Атунч дрепт пунктул  $B$  ва фи сокотит пунктул  $B_H$ , каре есте екстремитатя векторулуй  $\bar{H}_r$ . Ка вектор  $\bar{R}_r$  се я ачелаш вектор  $\bar{H}_r$ , ши формула луй Бур ва авя форма

$$\frac{d\bar{H}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{H}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{H}_r. \quad (4a)$$

Аша дар, пентру фиекаре вектор, че аре индичеле  $r$ , каре аратэ, кэ векторул есте дат ын системул мобил де координате, се поате аплика формула луй Бур. Диференца динтре деривата локалэ ши чя тоталэ, дупэ кум аратэ формула луй Бур, констэ ын ачея, кэ деривата локалэ ну цине сама де ротация де транспорт а векторулуй  $\bar{H}_r$ , че аре лок ымпреунэ ку системул мобил де координате, яр деривата тоталэ я ын консидерацие ачастэ ротацие.

## § 2. ТЕОРЕМА ЧИНЕМАТИКЭ А ЛУЙ КОРИОЛИС

*Акцелерация абсолютэ а унуй пункт ын мишкаря луй компусэ есте егалэ ку сума геометрике а трей векторы: векторул акцелерацией релативе а пунктулуй, векторул акцелерацией де транспорт а пунктулуй ши векторул акцелерацией суплиментаре, сау акцелерацией луй Кориолис, егалэ ку де доуз орь продусул векториал динтре витеза унгуларэ а мишкэрий де транспорт  $\bar{\omega}_e$  ши витеза релативэ а пунктулуй ын мишкаре  $\bar{v}_r$ .*

Демонстрация. Акцелерация абсолютэ  $\bar{a}_{a6c}$  а пунктулуй  $B$  есте егалэ ку деривата тоталэ а витезей абсолюте  $\bar{v}_a$ , адикэ

$$\bar{a}_{a6c} = \frac{d\bar{v}_a}{dt},$$

унде

$$v_a = \bar{v}_r + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_e \times \bar{R}_r. \quad (46)$$

Луынд деривата тоталэ ын рапорт ку тимпул де ла амбеле пэрць але егалитэций (46), кэпэтэм

$$\bar{a}_{a6c} = \frac{d}{dt} (\bar{v}_r + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}_e \times \bar{R}_r) = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{R}_r + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{R}_r}{dt}.$$

Апликэм формула луй Бур векторилор  $\bar{v}_r$  ши  $\bar{R}_r$ :

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r, \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{R}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{R}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{R}_r = \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{R}_r. \quad (6)$$

Вом авя

$$\bar{a}_{a6c} = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{R}_r + \bar{\omega}_e \times [\bar{v}_r + (\bar{\omega}_e \times \bar{R}_r)].$$

Апликынд лежя дистрибутивэ пентру продусул векториал дин ултимул термен авем

$$\bar{a}_{a6c} = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{R}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}_r),$$

сау, групынд термений дин партя дряптэ,

$$\bar{a}_{a6c} = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} + \left[ \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{R}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}_r) \right] + 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

Партя дряптэ а ачестей егалитэць есте презентатэ, дупэ кум се веде, ын форма сумей а трей векторь

$$\bar{a}_{a6c} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k,$$

унде  $\bar{a}_r$  есте акчелерация релативэ а пунктулуй  $B^*$

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt}; \quad (7)$$

$\bar{a}_e$  — акчелерация де транспорт а пунктулуй

$$\bar{a}_e = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{R}_r + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{R}_r);$$

---

\* Евидент, кэ деривата локалэ а витезей релативе а пунктулуй требуе нумитэ акчелерацие релативэ а пунктулуй.

$\bar{a}_\kappa$  — акчелерация суплиментарэ сау а луй Кориолис

$$\bar{a}_\kappa = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

Апликынд формула луй Ривалс

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{R}_r - \omega_e^2 h \bar{h}^0,$$

унде  $\bar{h}^0$  есте векторул унитате ал векторулуй  $\bar{h}$ .

### § 3. МЕТОДЕЛЕ ДЕ КОНСТРУКЦИИ ШИ ДЕ КАЛКУЛ А АКЧЕЛЕРАЦИЕЙ ЛУЙ КОРИОЛИС

Акчелерация луй Кориолис поате фи детерминатэ немижлочит дин формула (8). Пентру ачаста есте нечесар сэ конструим продусул векториал динтре векторул  $\bar{\omega}_e$  (ал витезей унгуларе инстантанее де ротации а системулуй мобил) ши векторул  $\bar{v}_r$  ал витезей линиаре релативе а пунктулуй.

Пентру а афла продусул векториал требуе сэ конструим ын пунктул  $B$  ун вектор егал ку векторул витезей унгуларе, ши ун вектор че репрезинтэ продусул векториал а дой векторь даць.

Валоаря нумерикэ а акчелерацией луй Кориолис се поате гэси дупэ формула, каре експримэ модулул продусулуй векториал а дой векторь,

$$|\bar{a}_\kappa| = 2|\bar{\omega}_e||\bar{v}_r|\sin\alpha, \quad (9)$$

унде партя дряптэ репрезинтэ ындоитул арией паралелограмулуй, конструит пе векторий, че фигурызэ ын формула акчелерацией луй Кориолис (8),

$$2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = \bar{a}_\kappa.$$

Индичеле  $e$  аратэ, кэ витеза унгуларэ анч есте витеза унгуларэ а мишкэрий де транспорт а системулуй мобил де референцэ. Аша дар, теорема чинематикэ а луй Кориолис, формулатэ май сус, деспре структура акчелерацией абсолюте а унуй пункт есте демонстратэ:

$$\bar{a}_{abs} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_\kappa. \quad (10)$$

Сэ анализэм прочесул де дедучере а експресией акчелерацией луй Кориолис а унуй пункт. Продусул векториал динтре векторул витезей унгуларе а ротацией де транспорт а системулуй мобил ши векторул витезей линиаре релативе а унуй пункт се капэтэ де доуэ орь. Прима датэ ел се общине, луынд деривата тоталэ а витезей релативе дупэ формула луй Бур. Ын ачастэ формулэ продусул векториал  $\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$  експримэ вариация векторулуй витезей релативе, че фигурызэ ын витеза абсолюте, даторитэ ротацией ачестуй вектор ымпреунэ ку траектория миш-

кэрий релативе ка' результат ал ротацией де транспорт а ынтре-гулуй систем мобил де реферинцэ.

А доуа оарэ ачест продус векториал апаре ла дериваря витезей де транспорт а пунктулуй ши апликаря формулей луй Бур. Ын ачест каз продусул векториал карактеризязэ вариация витезей де транспорт, че аре лок ын урма мишкэрий релативе а пунктулуй, деоарече даторитэ ачестей мишкэрь пунктул трече де пе о траекторие де транспорт пе алта.

#### § 4. КОНСТРУИРЯ АКЧЕЛАРАЦИЕЙ ЛУЙ КОРИОЛИС ДУПЭ МЕТОДА ЛУЙ ЖУКОВСКИЙ

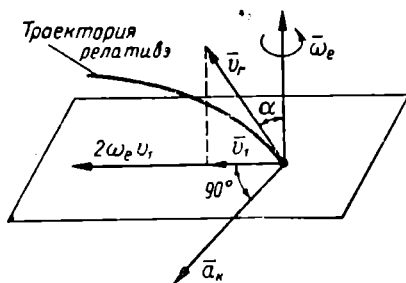
Модулул акчелерацией луй Кориолис

$$|\vec{a}_k| = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{v}_r| \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r).$$

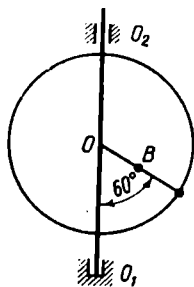
Ремаркэм, кэ експресия  $|\vec{v}| \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}) = |\vec{v}_1|$  репрезинтэ мэ-римя  $|\vec{v}_1|$  а проекцией витезей релативе пе планул, перпендику-лар пе векторул витезей унгуларе  $\vec{\omega}_e$ . Де аич

$$|\vec{a}_k| = 2 |\vec{\omega}_e| |\vec{v}_1|.$$

Астфел, регула луй Жуковский констэ ын урмэтоареле.



Фиг. 165.



Фиг. 166.

Проектынд витеза релативэ  $\vec{v}_r$  пе планул, перпендикулар пе векторул  $\vec{\omega}_e$ , ынмулцинд апой проекция ку  $2\vec{\omega}_e$  ши ротинд-о ку ун унгь дрепт ын журул луй  $\vec{\omega}_e$  ын сенсул ротацией де транспорт, кэпэтэм акчелерация луй Кориолис  $\vec{a}_k$  (фиг. 165).

Регула луй Жуковский ушурязэ ын унеле казурь афларя векторулуй  $\vec{a}_k$  ын спациу.

Казурь партнкуларе, ын каре акчелерация луй Кориолис есте егалэ ку zero:

1) пентру  $\bar{v}_r = 0$ , адикэ ын моментул, кынд витеза релативэ есте егалэ ку zero\*;

2) пентру  $\bar{\omega}_e = 0$ , адикэ дакэ системул мобил де координате ефектуязэ о мишкаре де трансляции;

3) пентру  $\bar{v}_r \parallel \bar{\omega}_e$ , адикэ дакэ унгул  $(\bar{v}_r, \bar{\omega}_e) = 0$  сау  $\pi$  ши, прин урмаре, векторул витезей релативе есте паралел ку векторул витезей унгуларе.

**Екземплу.** Дупэ раза унуй диск, каре се ротеште ын журул аксей  $O_1O_2$  ку витеза унгуларэ  $\omega = 2t$  1/сек, ын дирекция де ла чентру спре маржинне се мишкэ ун пункт  $B$  дупэ лежя  $OB = 4t^2$  см. Раза  $OB$  формязэ ку акса  $O_1O_2$  ун унгъ де  $60^\circ$ . Сэ се детермине мэрия акчелераций абсолюте а пунктулуй  $B$  ын моментул  $t = 1$  сек (фиг. 166).

**Резолваре.** 1. Конформ теоремей деспре компунеря акчелерацилор ын мишкаря компусэ, кынд мишкаря де транспорт ну есте де трансляции, авем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

Ын казул дат ротация дискулуй ымпреунэ ку пунктул  $B$  есте о мишкаре де транспорт; мишкаря релативэ — о мишкаре униформ-акчелератэ а пунктулуй де ла чентрул дискулуй ын дирекция  $OB$ . Векторий  $\bar{\omega}_e$  ши  $\bar{v}_r$  ну сынт паралель, прин урмаре,  $\bar{a}_k \neq 0$  ши тоць трей векторь ай акчелерацилор сынт дифериць де zero.

2. Детерминэм акчелерация релативэ; еа есте алкэтуитэ ну май дин акчелерация танженциалэ, деоарече траектория мишкэрий релативе есте о линии дряптэ:

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 8t,$$

унде

$$s = 4t^2; \quad \bar{a}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dt} = 8; \quad a_r = 8 \text{ см/сек}^2.$$

3. Мишкаря де транспорт есте о ротации ын журул аксей, деачея акчелерация пунктулуй се поате детермина дупэ формула  $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$ . Калкулынд пентру моментул  $t = 1$  сек, авем

$$a_e^n = OB\omega^2 \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} = 13,84 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2},$$

$$a_e^\tau = r\varepsilon = OB \sin 60^\circ \varepsilon = 4\sqrt{3} = 6,92 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2},$$

---

\* Дакэ  $\bar{v}_r = 0$  ынтр'ун интервал оарекаре де тимп, ын ачест интервал де тимп ну нумай  $\bar{a}_k$ , чи ши  $\bar{a}_r$  есте егалэ ку zero, ши деч мишкаря абсолюте конниче де ку чя де транспорт.



унде

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ 1/сек}^2; (OB)_{t=1} = 4 \text{ см}; \omega_{t=1} = 2 \text{ 1/сек}.$$

4. Детерминэм модулул акчелерацией луй Кориолис пентру  $t = 1 \text{ сек}$ :

$$a_k = 2\omega v_r \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 0,866 = 27,68 \text{ см/сек}^2.$$

5. Детерминэм акчелерация абсолютэ дупэ векторий акчелерациилор, апликаць ын пунктул  $B$  (фиг. 167). Авынд ын ведере кэ векторий  $\vec{a}_e$  ши  $\vec{a}_k$  сынт перпендикулярь пе планул дискулуй ши сынт ориентаць ын ачелаш сенс, яр векторий  $\vec{a}_e^n$  ши  $\vec{a}_r$  се афлэ ын планул дискулуй (фиг. 167), авем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_1 + (\vec{a}_e + \vec{a}_k),$$

унде

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r;$$

атунч

$$|\vec{a}_B| = \sqrt{a_1^2 + (a_e + a_k)^2},$$

унде

$$a_1^2 = (a_e^n)^2 + a_r^2 - 2a_e^n a_r \cos 30^\circ.$$

Субституинд дателе нумериче, обцинем

$$a_1^2 = 64 \text{ см}^2/\text{сек}^4$$

ши

$$|\vec{a}_B| = \sqrt{1264} = 35,6 \text{ см/сек}^2.$$

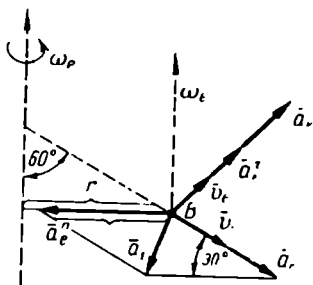
Гэсим ын ачест екземплу ши витеза абсолютэ а пунктулуй  $B$ :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Витеза релативэ  $\vec{v}_r$  есте ориентатэ тот ка ши акчелерация релативэ  $\vec{a}_r$  дупэ раза дискулуй, ын сенсул позитив, адикэ ын сенсул крештерий дистанцей  $OB$ ; пентру  $t = 1 \text{ сек}$ .

$$v_r = 8 \text{ см/сек}$$

Витеза де транспорт  $\vec{v}_e$  есте ориентатэ конформ формулей луй Ейлер  $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e + \vec{OR}$  перпендикуляр пе планул дискулуй ши



Фиг. 167.

перпендикуляр пе  $\overline{v_r}$ . Валоаря нумерикэ а витезей де транспорт се афлэ дупэ формула

$$v_e = \omega_e OB \sin 60^\circ (t = 1 \text{ сек}),$$

адикэ

$$v_e = 2 \cdot 2 \sqrt{3} \text{ чм/сек.}$$

Витеза абсолютэ ориентатэ дупэ диагонала дрептунгюлуй, авынд латуриле егале ку  $\overline{v_r}$  ши  $\overline{v_e}$ , се гэсеште дупэ формула

$$|\overline{v_a}| = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{64 + 48} = \sqrt{112} \text{ чм/сек} \approx 10,6 \text{ чм/сек.}$$

---

## ЧИНЕМАТИКА МИШКЭРИЛОР КОМПУСЕ АЛЕ УНУЙ КОРП СОЛИД

Се нумеште мишкаре компусэ а унуи корп солид ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс о астафел де мишкаре, каре есте алкэтуите дин мишкаря релативэ ши чя де транспорт. Ын ачест каз тоате карактеристичиле чинематиче але мишкэрий унуи корп ын рапорт жу ун систем де реферинцэ фикс се експримэ прин карактеристичиле мишкэрий релативе ши челей де транспорт а корпулуй.

Се нумеште мишкаре релативэ а унуи корп солид мишкаря луй ын рапорт ку ун систем оарекаре мобил де координате  $O_1x'y'z'$ . Пентру а кларифика мишкаря де транспорт а корпулуй ын фишкаре момент требуе сэ сокотим, кэ корпул е фиксат ку ун систем мобил де реферинцэ, ши мишкаря ачестуй систем мобил де реферинцэ ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс есте о мишкаре де транспорт а корпулуй.

Се нумеште мишкаре абсолутэ а унуи корп мишкаря луй компусэ сау резултантэ ын рапорт ку системул де реферинцэ фикс.

Требуе сэ менционэм, кэ корпул дат поате фи лэржит ши се поате консидера ну мишкаря корпулуй ын рапорт ку ун оарекаре систем де реферинцэ фикс, чи мишкаря ынтрегулуй спациу, легат ку корпул ын рапорт ку алт спациу, легат ку системул де реферинцэ фикс.

### § 1. КОМПУНЕРЯ МИШКЭРИЛОР ДЕ ТРАНСЛАЦИИ

*Дакэ ун корп ефектуязэ доуэ мишкэрь де трансляции симултане — релативэ ши де транспорт, атуни мишкаря абсолутэ а корпулуй де асеменя есте о мишкаре де трансляции ши витеза ей есте егалэ ку сума геометрикэ а витезелор релативэ ши де транспорт а мишкэрилор де трансляции.*

Адмitem, кэ ун корп рижид ( $S'$ ) ефектуязэ о мишкаре де трансляции ын рапорт ку системул де координате  $O_1x'y'z'$ , яр системул  $O_1x'y'z'$  ефектуязэ о мишкаре де трансляции ын рапорт ку системул фикс де координате  $Oxyz$  (фиг. 168). Ын ачест каз корпул аре доуэ мишкэрь: мишкаря де трансляции ын рапорт ку системул  $O_1x'y'z'$  (мишкаре релативэ) ши мишкаря де трансляции ымпреунэ ку системул  $O_1x'y'z'$  фацэ де системул фикс де координате  $Oxyz$  (мишкаре де транспорт).

Вом демонстра, кэ мишкаря абсолутэ а корпулуй ( $S'$ ) есте де асеменя о мишкаре де трансляции.

Нотэм прин  $\vec{v}_1$  витеза унуи оарекаре пункт  $B$  ал корпулуй

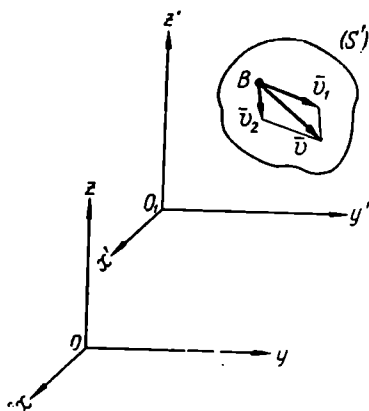
ын мишкаря луй релативэ, яр прин  $\bar{v}_2$  — витеза пунктулуй  $B$  ын мишкаря луй де транспорт.

Витеза абсолутэ а пунктулуй  $B$  есте

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Вом стабили, кэ пентру орьче пункте але корпусулуй витезеле абсолуте ши акчелерацииле сынт егале жеометрих ши паралеле ын фиекаре момент.

Деоарече ын мишкаря де трансляции фиекаре пункт ал корпусулуй солид се депласязэ ку ачешь витезэ, ку каре се мишкэ орьче алт пункт ал ачестуй корп, витезеле тутурор пунктелор корпусулуй ын мишкаря релативэ каре есте о мишкаре де трансляции сынт



Фиг. 168.

ачеляшь ши егале ку  $\bar{v}_1$ . Аналог витезеле тутурор пунктелор корпусулуй ын мишкаря де транспорт каре есте де трансляции де асемения сынт

ачеляшь ши егале ку  $\bar{v}_2$ . Ын urma компунерий векторилор егаль дупэ мэриме ши паралель обцинем векторь егаль ши паралель, деачея ын фиекаре момент витезеле абсолуте але тутурор пунктелор корпусулуй  $\bar{v}$  сынт егале дупэ мэриме, паралеле ши ориентате ын ачелаш сенс. Ачаста е адеврэт ши пентру акчелерацииле пунктелор корпусулуй.

Апликэм теорема деспре компунеря акчелерациилор пентру фиекаре пункт; аич вом луа ын консидерация, кэ акчелерация луй Кориолис пентру фиекаре пункт ал корпусулуй есте егалэ ку зеро деоарече мишкаря де транспорт есте де трансляции. Ынтрукыт ын фиекаре мишкаре де трансляции а корпусулуй акчелерацииле тутурор пунктелор ын фиекаре момент де асемения сынт егале ынтре еле, евидент, кэ ши акчелерацииле тутурор пунктелор корпусулуй ын мишкаря луй абсолутэ сынт егалс ынтре еле ши ачастэ акчелерация комунэ се поате сокоти ка акчелерация ынтрегулуй корп ын моментул дат:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2.$$

Астфел, мишкаря абсолутэ а корпусулуй есте де асемения о мишкаре де трансляции. Ачест резултат се поате формула ши алтфел: *тоталитатя а доуз мишкэрь де трансляции симултане а унуй корп солид есте еквивалентэ ку о оарекаре мишкаре де трансляции (абсолутэ), унде витеза мишкэрий де трансляции*

абсолюте ши акчелерация ей респективэ сынт егале ку сума жёометрикэ а витезелор сау акчелерациилор амбелор мишкэрь де трансляции дате, адикэ

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \propto \bar{v}, \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Евидент, резултатул обцинут поате фи жёенерализат ши ын казул унуй ансамблуде кытева мишкэрь де трансляции але корпусулуй. Атунч кэпэтэм урмэтоаря релации:

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \propto \bar{v},$$

унде

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i.$$

Аич витеза мишкэрий де трансляции абсолюте а корпусулуй, эквивалентэ ку мулцима де мишкэрь де трансляции инициале  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n)$ , че ау лок симултан, есте векторул принципал ал системулуй де векторы даць  $\bar{v}_i$ . Ачаста е карактеристик ши пентру акчелерация мишкэрий де трансляции абсолюте.

## § 2. КОМПУНЕРЯ МИШКЭРИЛОР ДЕ РОТАЦИИ АЛЕ УНУЙ КОРП СОЛИД

Компунеря мишкэрилор инстантанее де ротации але унуй корп ын журул акселор, че се интерсектыэз ынтр'ун сингур пункт

Адмitem, кэ ун корп, де екземплу ун чилиндру, се ротеште ын моментул дат ын журул аксей  $Oz_1$  ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_1$  (мишкаря релативэ), яр акса  $Oz_1$  се ротеште ын журул луй  $Oz_2$  ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_2$  (мишкаря де транспорт) (фиг. 169).

Луэм ун пункт оарекаре  $B$  ал чилиндролуй сау ал спациулуй фиксат рижид ку ел. Конформ теоремей деспре компунеря витезелор витеза абсолюте а пунктулуй  $B$  есте

$$\bar{v}_B = \bar{v}_B^{(r)} + \bar{v}_B^{(e)}. \quad (1)$$

Нотэм прин  $\bar{r}_B = \overline{OB}$  векторул де позиции ал пунктулуй  $B$ , дус дин пунктул де интерсекции ал акселор  $Oz_1$  ши  $Oz_2$  ын пунктул  $B$ . Атунч витеза релативэ  $\bar{v}_B^{(r)}$  дупэ формула луй Ейлер есте

$$\bar{v}_B^{(r)} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_B,$$

яр витеза де транспорт

$$\bar{v}_B^{(e)} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_B.$$

Деч, витеза абсолютэ

$$\bar{v}_B = \bar{v}_B^{(r)} + \bar{v}_B^{(e)} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_B + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_B = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}_B. \quad (2)$$

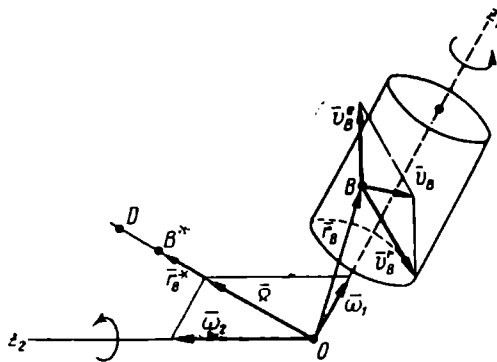
Нотынд

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \quad (3)$$

авем

$$\bar{v}_B = \bar{\Omega} \times \bar{r}_B, \quad (4)$$

унде витеза унгуларэ инстантанее  $\bar{\Omega}$  есте ориентатэ дупэ диагоналу паралелограмулуй, конструит пе  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$ .



Фиг. 169.

Депунем векторул  $\bar{\Omega}$  дин пунктул  $O$  ши консидерэм дряпта  $OD$ , дупэ каре ел есте ориентат. Дакэ пунктул  $B^*$  ал спациулуй, фиксат рижид ку чилиндрул ын ротацие, се гэсеште ын моментул дат пе дряпта  $OD$ , витеза луй абсолютэ, конформ формулей (4) есте егалэ ку zero:

$$\bar{v}_{B^*} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{B^*} = 0, \quad (5)$$

деоарече векторий  $\bar{\Omega}$  ши  $\bar{r}_{B^*}$  сынт колиинарь.

Аша дар, витезеле абсолюте але тутурор пунктелор спациулуй фиксат рижид ку чилиндрул ын ротацие, се афлэ дин формула (4), унде витеза абсолютэ а пунктелор, каре ын моментул дат се гэсеск пе дряпта  $OD$ , есте егалэ ку zero. Прин урмаре, доуэ ротаций симултане ын журул акселор, че се интерсектызэ, ку витезе унгуларе инстантанее  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$  сынт еквиваленте ку о ротацие авынд витеза унгуларэ инстантанее  $\bar{\Omega}$ , егалэ ку сума геомеетрике  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ . Акса инстантанее а ротацией абсолюте тре-

че прин пунктул де интерсекције ал витезелор унгуларе  $\omega_1$  ши  $\omega_2$  ши есте ориентатэ дупэ  $\bar{\Omega}$ .

Дакэ корпул аре симултан орьче нумэр де ротаций ын журул акселор инстантанее, че се интерсектязэ ынтр'ун пункт  $O$ .

ку витезеле унгуларе  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$  мишкаря абсолютэ есте де асемения о ротацие инстантанее ын журул аксей, че трече прин пунктул  $O$  ку витеза унгуларэ, егалэ ку сума жеометрике а витезелор унгуларе але ротациилор дате, адикэ

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n) \oslash \bar{\Omega},$$

ундэ

$$\bar{\Omega} = \sum \bar{\omega}_i.$$

Витеза унгуларэ абсолютэ  $\bar{\Omega}$  есте егалэ ку векторул принципал ал системулуй де векторы ай витезелор унгуларе але тутурор мишкэрилор де ротацие. Векторул  $\bar{\Omega}$  есте апликат ын пунктул де интерсекције а тутурор векторилор  $\bar{\omega}_i$ .

Астфел, екзистэ о аналожие комплектэ ынтре прочедеул де редучере а унуй систем де форце конкуренте ын статика корпулуй солид ши редучеря унуй систем де витезе унгуларе инстантанее але корпурилор ла о формэ май симплэ.

Апликынд теорема деспре компунеря мишкэрилор де ротацие пентру фиекаре момент, адикэ пентру фиекаре позиции а корпулуй, се поате стабилити карактерул ынтрежий мишкэрь континуе а корпулуй.

### **Компунеря мишкэрилор де ротацие инстантанее а унуй корп ын журул акселор паралеле**

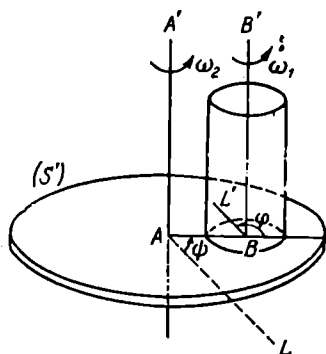
Витезеле унгуларе  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$  сынт ориентате ын ачелаш сенс.

Адмitem, кэ дискул ( $S'$ ) се ротеште ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_2$  ын журул аксей  $AA'$ , перпендикуларе пе планул луй; яр ын журул аксей  $BB'$ , фиксате рижид ку дискул ши паралеле ку акса  $AA'$ , се ротеште ун чилиндру ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_1$  (фиг. 170). (Акса  $BB'$  требуе сокотитэ инстантанее, деоарече еа ышь скимбэ позиция са ын спациул абсолют.)

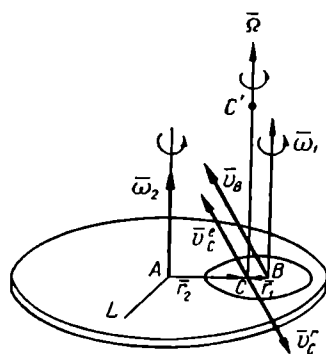
Витеза унгуларэ  $\omega_2 = \frac{d\psi}{dt}$ , яр унгул  $\psi$  се мэсоарэ де ла раза  $AL$ , фиксатэ ын спациу, пынэ ла раза  $AB$ , каре се ротеште ымпреунэ ку дискул. Витеза унгуларэ  $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$ , яр унгул се сокоате де ла раза  $AB$ , че се ротеште одатэ ку дискул.

(фиг. 170), пынэ ла о оарекаре разэ  $BL'$ , фиксатэ рижид ку чилиндрул.

Фиекаре пункт ал чилиндрулуй партичипэ ла доуэ мишкарэ: мишкарэ де ротацие ымпреунэ ку дискул, ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_2$  (витеза унгуларэ де транспорт) ши мишкарэ де ротацие а чилиндрулуй ын журул аксей сале ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_1$  (витеза унгуларэ релативэ). Адмitem, кэ амбеле ротаций ау лок ын ачелаш сенс, де екземплу, контрар ротаций ачелор де часорник, атунч векторий витезелор унгуларэ  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$  сынт паралель ши ориентаць ын ачелаш сенс. Гэсим мишкарэ абсолутэ а чилиндрулуй, каре евидент, есте планэ.



Фиг. 170.



Фиг. 171.

Мишкарэ планэ репрезентэ о сукчесиуне континуэ де ротаций инстантанеэ ын журул центрелор инстантанеэ де ротацие пентру диферите моменте. Вом демонстра май ынтый, кэ центрл инстантанеу де ротацие ал планулуй мобил ал базей чилиндрулуй се гэсеште пе дряпта, каре унэште амбеле аксе де ротацие, ынтре аксе ши ла дистанце де ла аксе, инверс пропорционале ку витезеле унгуларе респективе. Вом нота прин  $C$  пунктул кэутат (фиг. 171). Витеза луй абсолутэ есте егалэ ку zero ын моментул дат. Ынтр'адевр, дупэ теорема деспре компунеря витезелор пентру ун пункт ын мишкарэ компусэ витеза луй абсолутэ есте егалэ ку сума жеометрике а витезелор мишкэрилор релативэ ши де транспорт:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_C^{(r)} + \bar{v}_C^{(e)}.$$

Нотэм прин  $\bar{r}_1$  ши  $\bar{r}_2$  векторий де позиции ай пунктулуй  $C$  ын рапорт ку пунктеле  $B$  ши  $A$ . Тот одатэ

$$|\bar{\omega}_1| |\bar{r}_1| = |\bar{\omega}_2| |\bar{r}_2|.$$



Атунч

$$\bar{v}_C^{(r)} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 \quad \text{ши} \quad \bar{v}_C^{(e)} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2.$$

Сумынд, авем

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2.$$

Ынсэ деоарече векторий  $\bar{r}_1$  ши  $\bar{r}_2$  ау сенсуре контраре, атунч ши продуселе векториале консидаате ау сенсуре опусе пе дряпта, перпендикулярэ пе планул, ын каре се гэсеск акселе амбелор ротаций. Ынсэ, модулий продуселор векториале сынт егаль ынтре ей дупэ кондицие, ка урмаре а алежерий пунктулуй  $C$ . Ашадар, сума жеометрикэ а продуселор векториале есте егалэ ку zero, адикэ витеза пунктулуй  $C$  есте егалэ ку zero, витеза орькэруй ал пункт  $C'$  ал дрептей  $CC'$  де асеменя есте егалэ ку zero.

Мишкаря абсолутэ а корпулуй консидаат (чилиндрулуй) репрэзінтэ о ротацие инстантанеэ ын журул аксей, паралеле акселор амбелор ротаций. Акса ротацие абсолуте трече прин пунктул дрептей, че унэште акселе де ротацие, ши се гэсеште ынтре ачесте аксе ла дистанце инверс пропорционале ку мэримиле витезелор унгуларе. Нотэм прин  $\bar{\Omega}$  векторул витезей унгуларе абсолуте. Пентру а гэси модулул ачестуй вектор, дирекция ши сенсул луй, консидерэм витеза  $\bar{v}_B$  а пунктулуй  $B$ , ситуат пе акса де ротацие релативэ а корпулуй. Ачаствэ витезэ

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{AB}$$

сау

$$\bar{v}_B = \bar{\Omega} \times \overline{CB}.$$

Егалынд ачесте продусе векториале

$$\bar{\omega}_2 \times \overline{AB} = \bar{\Omega} \times \overline{CB},$$

обцинем, кэ векторул  $\bar{\Omega}$  есте ориентат ын ачелаш сенс, ка ши векторул  $\bar{\omega}_2$ , прин урмаре ка ши векторул  $\bar{\omega}_1$ . Егалэм модулий продуселор векториале, авем

$$|\bar{\omega}_2| AB = |\bar{\Omega}| CB,$$

де унде

$$|\bar{\Omega}| = |\bar{\omega}_2| \frac{AB}{CB} = |\bar{\omega}_2| \left( \frac{AC+CB}{CB} \right).$$

Деоарече  $AB = AC + CB$ , ефектуынд ымпэриця ши луынд ын консидаацие, кэ  $\frac{AC}{CB} = \frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|}$ , гэсим

$$|\bar{\Omega}| = |\bar{\omega}_1| + |\bar{\omega}_2|.$$

Ачаствэ демонстрацие есте аналожикэ ку демонстрация теоремей деспре редучеря а доуэ форце паралеле, ориентате ын

ачелаш сенс ын статика корпулуй солид, ши, деч, резултатул ей се поате скрие ын мод аналожик:

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \propto \bar{\Omega},$$

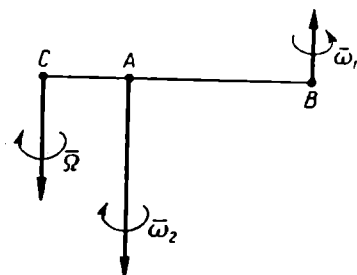
унде

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

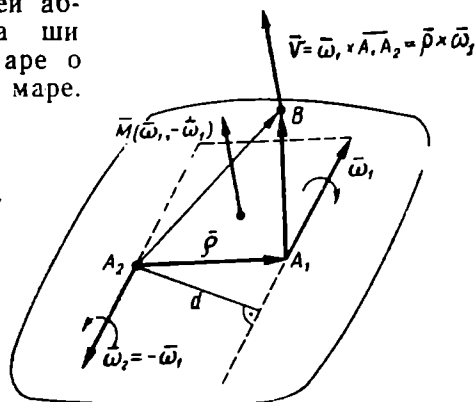
сау

$$|\bar{\Omega}| = |\bar{\omega}_1| + |\bar{\omega}_2|.$$

Сэ консидерэм казул, кынд витезеле унгуларе  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$  сынт паралеле, ынсэ ориентате ын сенсуре опусе, адикэ ротацииле релативэ ши де транспорт ау сенсуре контраре. Адмитем, кэ  $|\bar{\omega}_2| > |\bar{\omega}_1|$ . Фэкынд ачеляшь рационаменте ка ши ын казул редучерий мишкэрилор де ротацие ын журул акселор паралеле ла о сингурэ ротацие, вом гэси, кэ пунктул  $C$  (фиг. 172) прин каре трече акса ротацией абсолюте се афлэ пе линия  $BA$  ын екстериорул ей ши де партя челей май марь витезе унгуларе ла дистанце де ла акселе де ротацие дате, инверс пропорционале ку витезеле лор унгуларе. Витеза унгуларэ а ротацией абсолюте аре ачелаш сенс ка ши витеза унгуларэ, каре аре о валоре нумерикэ май маре.



Фиг. 172.



Фиг. 173.

Модулул витезей унгуларе абсолюте есте егал ку диференца модулилул витезелор унгуларе, адикэ

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \propto \bar{\Omega}; \quad \bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

ынсэ

$$|\bar{\Omega}| = |\bar{\omega}_2| - |\bar{\omega}_1|; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{|\bar{\omega}_1|}{|\bar{\omega}_2|}.$$

Аша дар, аналожия статикэ ку привире ла редучеря а доуэ форце паралеле ла о форце резултантэ аре лок ши ын казул дат.

Сэ консидерэм ун куплу де ротаций. Ка ши ын теория форцелор паралеле дин статикэ, есте нечесар сэ консидерэм казул, кынд витезеле унгуларе але ротацийлор релативэ ши де транспорт сынт егале дупэ валоаре, ынсэ ау семне опусе.

Се нумеште *куплу де ротаций* доуэ ротаций де сенсуре контраре, каре ау лок ын журул унор аксе паралеле ку витезеле унгуларе егале дупэ модулу.

Адмитем, кэ ун корп солид партичипэ ла доуэ ротаций инстантанее ку витезеле унгуларе  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$ , унде  $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$ , адикэ витезеле унгуларе  $\bar{\omega}_1$  ши  $\bar{\omega}_2$  формязэ ун куплу де ротаций (фиг. 173).

Витеза абсолютэ а унуй оарекаре пункт ал корпулуй (пунктул  $B$ ) есте

$$\bar{v}_B = \bar{v}_B^{(r)} + \bar{v}_B^{(e)},$$

унде

$$\bar{v}_B^{(r)} = \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1 B},$$

$$\bar{v}_B^{(e)} = \bar{\omega}_2 \times \overline{A_2 B};$$

де анч

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1 B} + \bar{\omega}_2 \times \overline{A_2 B} = \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1 B} - (\bar{\omega}_1 \times \overline{A_2 B}) = \\ &= \bar{\omega}_1 \times (\overline{A_1 B} - \overline{A_2 B}). \end{aligned}$$

Ынсэ

$$\overline{A_1 B} = \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 B}.$$

Прин урмаре,

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 B} - \overline{A_2 B},$$

де унде

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1 A_2}.$$

Аша дар, витеза пунктулуй  $B$  ну депинде де позиция луй ын корп. Деачея витезеле тутурор пунктелор корпулуй ын моментул дат сынт егале ынтре еле, адикэ куплул де ротаций есте еквивалент ку мишкаря инстантанее де трансляcie авынд витеза

$$\bar{v} = \bar{\omega}_1 \times \overline{A_1 A_2} = \bar{\omega}_1 \times (-\overline{A_2 A_1}) = \overline{A_2 A_1} \times \bar{\omega}_1 = \bar{\rho} \times \bar{\omega}_1,$$

унде

$$\bar{\rho} = \overline{A_2 A_1};$$

адикэ

$$\bar{v} = \overline{M}_{A_2}(\bar{\omega}_1).$$

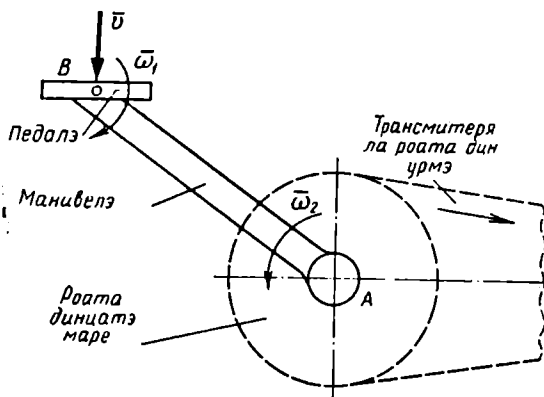
Прин урмаре, дин дефиниция моментулуй унуй куплу де векторь  $(\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1)$  кэпэтэм дефинитив

$$\bar{v} = \overline{M}(\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1).$$

Астфел, ун куплу де ротаций инстантане а унуй корп солид есте еквивалент ку о мишкаре де трансляции инстантане аынды витеза, егалэ ку векторул момент ал куплулуй де витезе унгуларе дат.

Ши инверс, дакэ есте датэ мишкаря де трансляции а унуй корп ку витеза  $\vec{v}$ , атунч еа се поате ынлокуи ку ун куплу де ротаций инстантане ( $\omega$ ,  $-\omega$ ). Тот одатэ планул куплулуй есте перпендикуляр пе векторул  $\vec{v}$ , яр модулулуй  $\omega$  ши брацул де пыргие ал куплулуй се гэсеште ынтр'о релации детерминатэ де формула ( $|\vec{\omega}|d = |\vec{v}|$ ); адикэ дупэ алежеря арбитрарэ а унея дин мэримиле  $|\vec{\omega}|$  сау  $d$  чялалтэ се детерминэ унивок. Астфел, екзистэ о мулциме инфинитэ де диферите методе де ынлокуире а мишкэрий де трансляции а унуй корп ку витеза  $\vec{v}$  принтр'ун куплу де ротаций инстантане.

Уинд тоате казуриле де компунере а мишкэрилор де трансляции инстантане але унуй корп солид, обцинем, жэ редучеря ла о мишкаре май симплэ а ротациилор инстантане але унуй корп атыт ын журул акселор, че се интерсектяэ кыт ши ын журул акселор паралеле есте аналожикэ ку редучеря унуй систем де форце конкуренте ши паралеле ын спациу ын статика корпулуй солид. Аич витезеле релативэ ши де транспорт кореспунд форцелор де редучере, яр витеза унгуларэ абсолутэ инстантане кореспунде форцей резултанте.



Фиг. 174.

**Екземплу.** Сэ консидерэм о педалэ де бичиклетэ (фиг. 174). Бичиклистул комуникэ педалей о мишкаре де трансляции ку витеза  $\vec{v}_a$ . Ку ажуторул манивелей  $AB$  ачастэ витезэ се дескомпуне ынтр'ун куплу де ротаций. О ротации се трансмите прин интермедиул роций динцате марь (пинион) ла роата динцатэ марэ а бичиклетей ши даторитэ ачестея бичиклистул се депла-

сязя ымпреунэ ку бичиклета. А доуа ротация есте ротация педалей ын рапорт ку акса манивелей ын пунктул  $B$ .

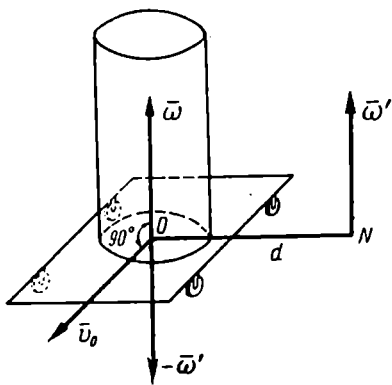
Тот одатэ ротация педалей фацэ де акса манивелей (прекум ши фацэ де ынсэшь манивела) аре сенсул опус примей ротаций; витезеле лор унгуларе сынт нумерик егале. Ын фигура 174 витеза  $\bar{v}$  репрезинтэ компонента вертикалэ а витезей абсолюте а педалей.

### § 3. КОМПОНЕРЯ МИШКЭРИЛОР ИНСТАНТАНЕЕ ДЕ ТРАНСЛАЦИЕ ШИ ДЕ РОТАЦИЕ АЛЕ УНУЙ КОРП СОЛИД

Компунеря мишкэрий де ротация ку чя де трансляция ын казул, кынд витеза мишкэрий де трансляция есте перпендикулярэ пе акса де ротация а корпулуй

Адмитем, кэ ун корп се ротеште ын моментул дат ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}$  ын журул аксей, фиксате рижид ку ун алт корп, че аре о мишкаре де трансляция ку витеза  $\bar{v}_0$ , перпенди-

кулярэ пе векторул витезей унгуларе  $\bar{\omega}$  а корпулуй ынтый (фиг. 175). Пунктул  $O$  есте ун пункт ал корпулуй ал дойля; прин каре трече акса ротацией релативе а корпулуй ынтый. Ынлокуим мишкаря де трансляция а корпулуй ал дойля, адикэ мишкаря де транспорт каре есте о трансляция пентру корпул ынтый ку ун куплу де ротаций  $\bar{v}_0 \propto (\bar{\omega}', -\bar{\omega}')$ ; аич витезеле унгуларе але ачестуй куплу де ротаций се алег астфел, ынкыт  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ . Атунч брацул де пыргие  $d$  ал ачестуй куплу есте егал ку  $d = \frac{|\bar{v}_0|}{|\bar{\omega}|}$ , деоарече векторул



Фиг. 175.

$\bar{v}_0$  есте моментул куплулуй екивалент де ротаций. Ачест куплу де ротаций се гэсеште ын планул, перпендикуляр пе векторул  $\bar{v}_0$ , адикэ ын планул, че трече прин векторул  $\bar{\omega}$ . Сенсул векторилор  $(\bar{\omega}', -\bar{\omega}')$  кореспунде сенсулуй векторулуй момент ал ачестуй куплу, адикэ а векторулуй  $\bar{v}_0$ .

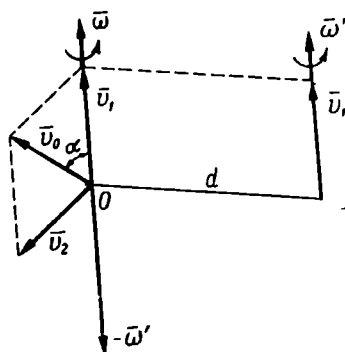
Депласэм куплул де ротаций  $(\bar{\omega}', -\bar{\omega}')$  астфел, ынкыт векторул  $(-\bar{\omega}')$  сэ трякэ прин пунктул  $O$ , адикэ сэ фие паралел ку векторул  $\bar{\omega}$ . Атунч системул де векторы  $(\bar{\omega}, -\bar{\omega}')$  ва фи

еквивалент ку zero, деоарече доуэ ротаций симултане але корпулуй ын журул унея ши ачелеяш аксе ку витезеле унгюларе егале дупэ мэриме, ынсэ де семне опусе, формязэ ун систем де мишкэрь, чинематик еквивалент ку zero, адикэ каре ну комуникэ корпулуй нич ун фел де мишкаре. Примулуй корп ый рэмыне нумай о сингурэ мишкаре: мишкаря. де ротации ку витеза унгюларэ  $\bar{\omega}'$  ын журул аксей, депласате ла дистанца  $d$  ын рапорт ку акса де ротации инициалэ, адикэ

$$(\bar{\omega}, \bar{v}) \propto \{\bar{\omega}, (\bar{\omega}', -\bar{\omega}')\} \propto \bar{\omega}'.$$

**Компунеря мишкэрилор де трансляции ши де ротации але унуй корп пентру о дирекции арбитрарэ а витезей мишкэрий де трансляции**

Адмитем акум, кэ витеза  $\bar{v}_0$  а мишкэрий де трансляции а корпулуй солид есте ориентатэ суб ун оарекаре унгь  $\alpha$  ын рапорт ку акса де ротации а корпулуй, адикэ фацэ де векторул  $\bar{\omega}$ . Вом фаче операцииле, каре се ефектуязэ ын статика корпулуй солид ла редучеря системулуй дин трей форце — форца ши купул де форце, ла ун торсор. Дескомпунем мишкаря де трансляции ку витеза  $\bar{v}_0$  ын доуэ мишкэрь де трансляции ку витезеле  $\bar{v}_1$  ши  $\bar{v}_2$ , динтре каре уна ( $\bar{v}_1$ ) есте ориентатэ ын лунгул векторулуй  $\bar{\omega}$ , яр алта ( $\bar{v}_2$ ) есте ориентатэ перпендикуляр пе  $\bar{\omega}$  (фиг. 176). Редучем тоталитатя мишкэрилор ( $\bar{\omega}_1, \bar{v}_2$ ) ла о сингурэ ротации ку витеза унгюларэ  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ , ынсэ ын журул аксей, депласате ла дистанца  $d$ . Тоталитатя инициалэ



Фиг. 176.

а мишкэрилор ( $\bar{\omega}, \bar{v}_0$ ) се редуче ла доуэ мишкэрь: мишкаря де ротации ку витеза унгюларэ  $\bar{\omega}'$  ши мишкаря де трансляции ку витеза  $\bar{v}_1$ , паралелэ ку акса де ротации, адикэ

$$(\bar{\omega}_1, \bar{v}_0) \propto \{\bar{\omega}, (\bar{v}_1, \bar{v}_2)\} \propto (\bar{\omega}', \bar{v}_1).$$

Тот одатэ  $d = \frac{|\bar{v}_2|}{|\bar{\omega}|}$ . Тоталитатя ачестор мишкэрь ( $\bar{\omega}; \bar{v}_1$ ) се нумеште *мишкаре еликоидалэ* (шурубул чинематик).

**Казул жєнерал де редучере а уней тоталитэць де мишкэрь арбитраре  
але унуй корп ла чя май симплэ мишкаре.**

### **Аналожий статиче**

Методеле де редучере а унуй систем де мишкэрь де ротацие ши де трансляcie симултане але ачелуяш корп солид сынт комплект аналожиче ку методеле де редучере дин статика корпулуй солид а унуй систем де форце ши куплурь де форце, апликате унуй корп, ла чел май симплу систем де форце. Аналогул форцей, апликате унуй корп солид — векторул алунокэтор ын статикэ, ын чинематика корпулуй солид есте векторул физик алунокэтор ши ануме витеза унгюларэ де ротацие а корпулуй ын журул аксей сале. Моментулуй куплулуй де форце ый кореспунде моментул куплулуй де ротаций, каре експримэ витеза мишкэрий де трансляcie, екивалентэ чинематик ку куплул де ротаций дат. Прочесул де редучере а системулуй де векторь алунокэторь ла чел май симплу систем есте ачелаш атыт ын статикэ кыт ши ын чинематикэ. Деачея фачем о ынкеере жєнералэ: *тоталитатя унуй нумэр оарекаре де ротаций ши мишкэрь де трансляcie симултане але унуй корп солид се пот редуче ла доуэ мишкэрь симултане: де ротацие ши де трансляcie.*

Витеза унгюларэ  $\bar{\Omega}$  а мишкэрий де ротацие резултанте есте егалэ ку векторул принципал ал ынтрегулуй систем де витезе унгюларе, инклюдив витезеле унгюларе, каре апар ла ынлокуиря мишкэрилор де трансляcie прин куплурь де ротаций. Дрепт пункт де апликация а векторулуй  $\bar{\Omega}$  се поате луа орьче чентру де редучере  $O$ . Атунч мишкаря де трансляcie резултантэ а корпулуй ва авя витеза  $\bar{v}_O$ , егалэ ку моментул принципал ын рапорт ку чентрул  $O$  ал системулуй де векторь, че експримэ витезеле унгюларе але системулуй инициал де ротаций дат, адикэ

$$\begin{aligned} &(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_e; \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k) \propto \\ &\propto \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_e, (\bar{\omega}_{e+1}, -\bar{\omega}_{e+1}), (\bar{\omega}_{e+2}, -\bar{\omega}_{e+2}), \dots \\ &\dots, (\bar{\omega}_{e+k}, -\bar{\omega}_{e+k})\} \propto (\bar{\Omega}, \bar{v}_O), \end{aligned}$$

унде

$$\bar{\Omega} = \sum_{i=1}^e \bar{\omega}_i; \quad \bar{v}_O = \sum_{i=1}^{e+k} \bar{M}_O(\bar{\omega}_i).$$

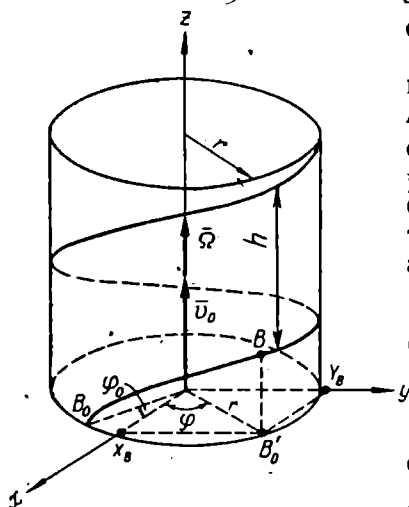
Евидент, кэ прин аналожие ку статика ши ын казул дат авем инварианций  $\bar{\Omega}$  ши  $\bar{\Omega} \bar{v}_O = |\bar{\Omega}| |\bar{v}_O| \cos \alpha$  ын рапорт ку чентрул де редучере ал системулуй де мишкэрь че се редук.

Форма дефинитивэ а челей май симпле мишкэрь, ла каре се пот редуче тоате мишкэриле дате, депинде де мэримя ачєс-тор инварианць. Ын партикулар дакэ  $\bar{\Omega} \bar{v}_O$  есте диферит де zero,

тот системул де мишкэрь се редуче ла ун торсор (шуруб чинематик). Ын ачелаш тимп презенца инвариантулуй  $\bar{\Omega}$  есте о демонстрация ригуроасэ а фаптулуй, кэ ын теория мишкэрий плане а унуй корп ши а мишкэрий арбитраре а ачестуя ын спациу, витеза унгуларэ ну депинде де алежеря полулуй, прин каре трече акса де ротация инстантанее, прин урмаре, де ел ну депинде нич акчелерация унгуларэ а корпулуй.

### Проприетэциле де базэ але мишкэрий еликоидале а унуй корп

Мишкарэ еликоидалэ се нумеште континуэ, дакэ ла скимбаря луй  $t$ ,  $\bar{\Omega} = \text{const}$  ши  $v_0 = \text{const}$ . Ороче пункт  $B$  ал корпулуй ын ачест каз рэмыне ын тот тимпул мишкэрий пе супрафаца чилиндрулуй чиркулар, дескриинд о линие еликоидалэ:



Фиг. 177.

Фие ла ынчепутул мишкэрий пунктул се афла ын позиция  $B_0(x_0, y_0, 0)$ . Дакэ пунктул  $B$  ефектуязэ нумай о мишкаре де ротация, пентру о позицияе арбитраре  $B$  се пот алкэтуи урмэтоареле екуаций чинематиче але ачестей мишкэрь (фиг. 177)

$$\begin{aligned} x_B &= r \cos \varphi, \quad y_B = r \sin \varphi \\ \text{сау} \quad x_B &= r \cos(\Omega t + \varphi_0), \\ y_B &= r \sin(\Omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (1)$$

фииндкэ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega, \quad d\varphi = \Omega dt \quad \text{ши} \quad \varphi = \Omega t + \varphi_0,^*$$

унде

$$\varphi_0 = \text{const.}$$

Ынсэ ын ачелаш интервал де тимп  $t$  пунктул се мишкэ пе акса  $z$  ку витеза  $v$ , ши деч, ел се ва ридика ла ынэлцимя

$$B_0B = z_0 + vt. \quad (2)$$

Екуацииле (1) ши (2) репрезинтэ екуацииле параметриче але линией еликоидале. Фиекаре пункт фаче о ротацияе комплектэ ын тимпул  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Дистанца  $h$ , ла каре се ридикэ ачест пункт

\* Мэрия  $\varphi_0$  есте негативэ.



ын тимп де о ротацие, се нумеште пасул еличей. Ачаствэ дистанцэ есте

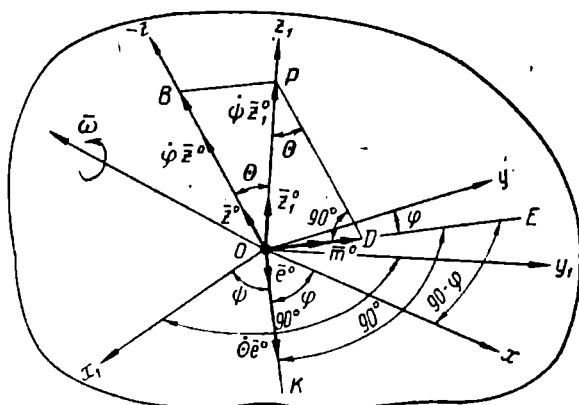
$$h = vT \text{ сая } h = v \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi p,$$

унде  $p$  се нумеште параметрул еличей

$$p = \frac{v}{\Omega} = \text{const.}$$

#### § 4. ЕКУАЦИИЛЕ ЧИНЕМАТИЧЕ АЛЕ ЛУЯ ЕЙЛЕР

Адмitem, кэ ун корп солид ( $S$ ) аре ун пункт фикс, пе каре-л нотэм прин  $O$ . Ачест пункт не ва серви дрепт орижине а доуэ триедре де координате — унул дин еле  $Ox_1y_1z_1$  репрезинтэ ун систем фикс де координате, легат ку спациул фикс; алт триедру —  $Oxyz$ , адмitem, кэ есте фиксат рижид ку корпул. Координателе пунктелор корпулуй ын системул  $Oxyz$  сынт мэримь константе ла мишкаря корпулуй.



Фиг. 178.

Сынт куноскуте доуэ методе де студиере а проприетэцилор мишкэрий унуй корп солид ын журул унуй пункт фикс. Конформ примей методе фиикаре депласаре а корпулуй се поате ефектуа ку ажуторул а трей ротаций але корпулуй ын журул акселор:  $Oz_1; OK; Oz$  (фиг. 178). Ла ачесте ротаций се скимбэ унгюриле луй Ейлер  $\psi, \theta, \varphi$ , че детерминэ позиция корпулуй ын спациу. Ын мишкаря континуэ а корпулуй ачесте унгюрь вариязэ ынконтинуу ши се поате ынтродуче ноциуня де витезэ унгюларэ де ротацие:  $\dot{\psi}\bar{z}_1^0, \dot{\theta}\bar{e}^0, \dot{\varphi}\bar{z}^0$ , унде  $\bar{z}_1^0, \bar{e}^0, \bar{z}^0$  сынт векторий унитате ай акселор де ротацие.

Пе де алтэ парте дупэ теорема луй Даламбер, орьче депласаре а корпулуй ын журул пунктулуй сзу фикс се поате ефектуа принтр'о ротацие ын журул уней аксе ануите. Ынсэ, орьче депласаре инфинит де микэ а корпулуй ын моментул дат се поате, прин урмаре, сокоти ка о ротацие инфинит де микэ ын журул уней ануите аксе, каре се нумеште акса де ротацие инстантанее пентру ачест момент.

Витеза унгюларэ инстантанее а корпулуй пентру моментул дат се репрезинтэ прин векторул  $\bar{\omega}$ , ориентат дупэ акса де ротацие инстантанее (фиг. 178).

Астфел, тоталитатя а трей ротаций але корпулуй ын журул акселор  $Oz_1, OK, Oz_2$  че се интересктызэ ын пунктул  $O$ , есте еквивалентэ дин пункт де ведере чинематик ку о сингурэ ротацие ын журул аксей, че трече прин ачелаш пункт. Ынсэ атунч дупэ теорема деспре редучеря уней тоталитэць де мишкэрь де ротацие а унуй корп ла о сингурэ ротацие векторул витезей унгюларе а ачестей ротаций резултанте есте егал ку сума жеометрике а векторилор витезелор унгюларе але ротациилор компоненте.

Прин урмаре, се поате стабили о астфел де релацие

$$\bar{\omega} = \psi \bar{z}_1^0 + \bar{\theta} \bar{e}^0 + \varphi \bar{z}^0. \quad (1)$$

Гэсим проекциле векторулуй  $\bar{\omega}$  пе акселе мобиле де координате  $Oxuz$ . Нотэм ачесте проекций прин  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ .

Ын база формулей (1) дедучем експресия пентру  $\omega_x$ , нотындын партя дряптэ проекциле векторилор пе скурт прин  $pr$ :

$$\omega_x = pr_x(\psi \bar{z}_1^0) + pr_x(\bar{\theta} \bar{e}^0) + pr_x(\varphi \bar{z}^0). \quad (2)$$

Терменул ал трейля дин партя дряптэ а егалитэций (2) диспаре, деоарече векторул  $\psi \bar{z}_1^0$  есте ориентат дупэ акса  $Oz$ , перпендикулар пе акса  $Ox$ . Ал дойля термен се поате детермина, деоарече унгюл динтре акселе  $OK$  ши  $Ox$  есте егал ку  $\varphi$ . Атунч

$$pr_x(\bar{\theta} \bar{e}^0) = \bar{\theta} \cos \varphi. \quad (3)$$

Пентру а калкула примул термен дин (2) апликэм проектаря дублэ, адикэ дескомпунем векторул  $\psi \bar{z}^0$ , ын дой векторь перпендикуларь:  $\overline{OB}$  ши  $\overline{OD}$ , динтре каре унул есте ориентат дупэ акса  $Oz$ , яр алтул дупэ линия  $OE$ , каре есте линия де интерсекцие а планелор  $xu$  ши  $zz_1$ .

Гэсим модулий векторилор  $\overline{OB}$  ши  $\overline{OD}$  дин дрептунгюл  $ODPB$ ; атунч репрезентэм ачешть векторь ын форма

$$\overline{OB} = \psi \cos \theta \bar{z}^0, \quad \overline{OD} = \psi \sin \theta \bar{m}^0.$$

Прин урмаре, авем

$$\psi \bar{z}_1^0 = \psi \cos \theta \bar{z}^0 + \psi \sin \theta \bar{m}^0, \quad (4)$$

унде  $\bar{m}^0$  есте ун вектор унитате ал векторулуй  $\overline{OD}$ .

Проектынд амбеле лэрць але егалитэций (4) пе акса  $Ox$ , кэпэтэм:

$$np_x(\psi \bar{z}_1^0) = \psi \sin \theta \cos(90^\circ - \varphi) = \psi \sin \theta \sin \varphi, \quad (5)$$

деоарече проекция пе  $Ox$  а примулуй термен дин партя дряптэ а формулей (4) есте егалэ ку zero.

Ын база формулелор (3) ши (5) детерминэм експресия кэу-татэ пентру  $\omega_x$ :

$$\omega_x = \psi \sin \theta \sin \varphi + \theta \cos \varphi.$$

Пентру гэсиря луй  $\omega_y$  фачем ачеляшь рационаменте. Аич акса  $OK$  формязэ ку акса  $Oy$  ун унгь де  $90^\circ + \varphi$ , фииндкэ векторул  $\overline{OD}$  есте перпендикулар пе линия нодурило  $OK$  ши се гэсеште ын планул  $Ozz_1$  перпендикулар пе линия нодурило. Деачея

$$\omega_y = np_y(\psi \bar{z}_1^0) + np_y(\theta \bar{e}^0);$$

$$\omega_y = np_y(\psi \sin \theta \bar{m}^0) + np_y(\theta \bar{e}^0) = \psi \sin \theta \cos \varphi + \theta \cos(90^\circ + \varphi).$$

Дефинитив

$$\omega_y = \psi \sin \theta \cos \varphi - \theta \sin \varphi.$$

Ултима формулэ а луй Ейлер де детерминаре а луй  $\omega_z$  се обцине, проектынд векторул  $\bar{\omega}$  пе акса  $Oz$ . Ачастэ проекция се компуне дин проекцияле векторилов  $\psi \bar{z}_1^0$  ши  $\theta \bar{z}^0$ ; ынсэ векторул  $\theta \bar{e}^0$  есте перпендикулар пе акса  $Oz$ .

Прин урмаре

$$\omega_z = \psi \cos \theta + \varphi.$$

Астфел, ам дедус формулеле чинематиче а луй Ейлер ын системул де аксе мобиле, че експримэ проекцияле витезей унгюларе инстантане  $\bar{\omega}$  пе акселе мобиле де координате прин унгюриле луй Ейлер ши деривателе лор ын рапорт ку тимпул:

$$\omega_x = \psi \sin \theta \sin \varphi + \theta \cos \varphi; \quad \omega_y = \psi \sin \theta \cos \varphi - \theta \sin \varphi;$$

$$\omega_z = \psi \cos \theta + \varphi.$$

Дескомпунем векторул  $\psi \bar{z}_1^0$  дупэ акса  $Oz_1$  ши дупэ линия де интерсекция а планелор  $Ozz_1$  ши  $Ox_1y_1$  путем дедуче фор-

мулеле луй Ейлер, че експримэ проекцииле витезей унгуларе а корпулуй пе акселе системулуй фикс  $Ox_1y_1z_1$

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta.\end{aligned}$$

Т а б е л а 3

	$OK$	$Oz$	$Oz_1$
$Ox$	$\cos \varphi$	0	$\sin \theta \sin \varphi$
$Oy$	$-\sin \varphi$	0	$\sin \theta \cos \varphi$
$Oz$	0	1	$\cos \theta$

Черчетынд екуацииле, че експримэ проекцииле унуй вектор пе акселе мобиле де координате, се поате алкэтуи о табелэ а косинусурило директоаре але акселор триедрулуй  $OKzz_1$  ку акселе триедрулуй  $Ox_1y_1z_1$  (табела 3).

**III**

**ДИНАМИКА**



## ПРИНЦИПИИЛЕ ДЕ БАЗЭ АЛЕ ДИНАМИЧИЙ

Динамика студиязэ мишкэриле механиче дин чел май же-  
нерал пункт де ведере ши ануме, еа студиязэ ну нұмай форма  
екстерноарэ, жеометрикэ, а мишкэрий, чи експликэ ши факто-  
рий, каре проваокэ диферите фелурь де мишкаре.

Фиинд партя чя май жемералэ а механичий теоретиче, дина-  
мика есте о дисциплинэ експериментал-теоретикэ. Концинутул  
динамичий се дезволтэ тот аша ка ши ла алте дисциплинь, ка-  
ре фолосеск методеле математиче. Ла база динамичий сынт  
пусе унеле принципий инициале, аксиоме, верификате пе кале  
експерименталэ. Дин ачесте принципий се дедук пе кале ложь-  
кэ ку ажуролу методелор математиче диферите принципий але  
механичий. Ачесте принципий, пе де о парте, експримэ унеле лежь  
жемерале але мишкэрий корпурилол материалэ, пе де алтэ пар-  
те, репрезентэ методеле жемерале де резолваре а диферитор  
проблеме але динамичий.

Принципиале инициале, аксиомеле динамичий, ау фост ела-  
борате де Ньютон ши Галилеу ын секолул XVII.

Аутентичитатя принципиилол динамичий, че стау ла база  
методелор де студиу а мишкэрилол механиче але материей, се  
контролязэ ын активитатя практикэ а оаменилол, ын дезволтаря  
техничий. Практика есте критериул принципал де верификаре а  
орькэрей теорий.

### § 1. АКСИОМЕЛЕ ДИНАМИЧИЙ

Ньютон а формулат принципиале де базэ але механичий ре-  
феритор ла чел май симплу корп материал — ла аша нумитул  
*пункт материал*. Се нумеште пункт материал ун пункт жеоме-  
трик, че поседэ масэ, адикэ ун пункт, ын каре есте концентратэ  
о анумитэ кантитате де материе (субстанцэ) (везь, статика,  
кап. 1).

Ла база механичий класиче стау доуэ ипотезе, каре афирмэ  
екзистенца спациулуй абсолют ши а тимпулуй абсолют. Се пре-  
супуне, кэ спациул аре проприетэць пур жеометриче, индепен-  
денте де материе ши мишкаря ей. Дупэ пэреря луй Ньютон,  
тимпул есте де асеменя о мэриме индепендентэ.

Дин челе спусе сус се поате афирма; ын примул рынд, ек-  
зистенца унуй систем де реферинцэ абсолют фикс ын рапорт ку  
каре се пот студия мишкэриле абсолюте але корпурилол мате-  
риале, прекум ши индепенденца вариацией тимпулуй де мишка-  
ря системулуй де реферинцэ.

Ын динамикэ се пресупуне де асеменя, кэ маселе пунктелор

ши корпурипор материале ын мишкаре: ну депинд де витезеле мишкэрий ши рэмын константе индиферент де кондицииле ын каре аре лок мишкаря.

#### Прима аксиомэ а динамичий (прима леже а луй Ньютон)

Прима леже а луй Ньютон—лежя инерцией—дескрие чя май симплэ мишкаре механикэ посибилэ—мишкаря унуй пункт материал комплект изолат де акциуниле алтор корпусь материале. Лежя инерцией се формулязэ астфел: *орьче пункт материал изолат, адикэ пунктул, асупра кэруя ну акционязэ алте корпусь материале, се гэсеште фацэ де ун систем де реферинцэ фикс нумай ынтр'о сингурэ старе чинематикэ ши ачуме ын старе де мишкаре ректилиние униформэ ( $v=\text{const}$ ) сау ын старе де репаус ( $v=0$ ).*

Ачаствэ старе чинематикэ а пунктулуй се нумеште старе *инерциалэ*. Старя инерциалэ а пунктулуй поате фи дефинитэ ши астфел: акчелерация пунктулуй есте нулэ:  $a=0$ .

#### Аксиомэ а доуа а динамичий (лежя а доуа а луй Ньютон)

Ачаствэ аксиомэ конствэ дин доуэ пэрць. Ын прима парте а ей се стабишеште кауза, че скоате пунктул материал дин старя чинематикэ инерциалэ, адикэ кауза, каре комуникэ пунктулуй материал акчелерации. Ын партя а доуа а аксиомей се стабишеште метода карактеристичий кантитативе а факторулуй, че инфлуенциязэ асупра пунктулуй материал, импримынду-й акчелерации.

Прима парте а ачестей аксиоме поате фи формулатэ астфел: *кауза, каре скоате пунктул материал дин старя инерциалэ, адикэ-й комуникэ акчелерации, есте акциуня алтор пункте сау корпусь материале асупра пунктулуй материал дат.*

Мэримя, каре карактеризязэ ачаствэ акциуне, есте о мэриме векториалэ, нумитэ форцэ, апликатэ ын пунктул дат.

Форца карактеризязэ, ын примул рынд, дирекция акциуний унуй пункт сау корп оарекаре асупра пунктулуй дат. Ын ал дойля рынд, форца карактеризязэ интенсивитатя ачестей акциуны ши депенденца резултатулуй акциуний, адикэ а акчелерацией комуникате пунктулуй, де капачитатя пунктулуй де а се опуне ачестей акциуны.

Се нумеште инерция а пунктулуй материал капачитатя луй де а се опуне скимбэрий стэрий сале де репаус сау де мишкаре ректилиние униформэ. Инерция се карактеризязэ прин маса пунктулуй.

Капачитатя пунктулуй материал де а се опуне акциуний де-



пинде де кантитатя де субстанцэ, материя, че се концине ын пунктул материал консидерат, адикэ де маса луй. Резултэ, кэ уна ши ачеш акциуне комуникэ диферите акчелераций пунктелор ку масе диферите. Пентру форце егале, апликате ла пунктеле materiale, ачесте акчелераций сынт инверс пропорционале ку маселе пунктелор консидерате.

Пе де алтэ парте, акчелерацииле пунктелор де масе егале сынт директ пропорционале ку интенситатя акциуний асупра лор.

Партя а доуа а ачестей аксиоме а динамичий поате фи формулатэ астфел: *форца, каре акционязэ асупра пунктулуй материал, есте пропорционалэ ку маса пунктулуй ши ку акчелерация, комуникатэ пунктулуй консидерат де ачастэ форцэ.*

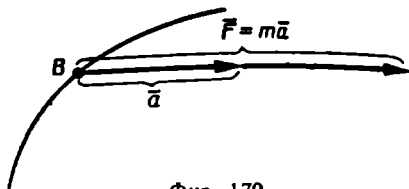
Нотынд форца ку векторул  $\vec{F}$ , маса пунктулуй прин  $m$ , акчелерация луй прин векторул  $\vec{a}$ , путем скрие урмэтоаря релацие динтре ачесте мэрымь

$$\vec{F} = k m \vec{a}, \quad (1)$$

унде  $k$  есте ун коэффициент де пропорционалитате.

Алегынд респектив унитэциле де масэ, де акчелерацие ши де форцэ, коэффициентул де пропорционалитате  $k$  поате фи егалат ку унитатя. Дефинитив (фиг. 179) обцинем урмэтоаря експресиe математикэ пентру аксиома а доуа и динамичий

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (2)$$



Фиг. 179.

Ачастэ екуацие не дэ посибилитатя сэ детерминэм маса пунктулуй мэсурынд акчелерация, комуникатэ ачестуй пункт де о форцэ оарекаре куноскутэ, каре акционязэ асупра луй. Де екземплу, дакэ акчелерация унуй пункт ын кэдере ын апропиеря супрафещей Пэмынтулуй есте константэ ши-й егалэ ку  $g$ , форца, че акционязэ асупра ачестуй пункт материал, о нумим *форцэ де греутате*, сау, симплу, *греутате*, адикэ  $P = mg$ . Де аич реесе ноциуна де масэ гравитационалэ, детерминатэ де греутатя пунктулуй:

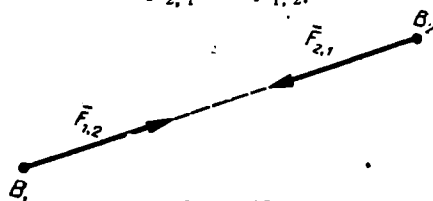
$$m = \frac{P}{g}.$$

#### Аксиома а трея а динамичий

Фие форца  $\vec{F}_{1,2}$  апликате ын  $B_1$  есте акциуна пунктулуй  $B_2$  асупра пунктулуй  $B_1$  (фиг. 180). Ачастэ акциуне ну есте унilaterалэ. Дин партя пунктулуй  $B_1$  асупра пунктулуй  $B_2$  акционязэ форца  $\vec{F}_{2,1}$  апликате ын  $B_2$ , егалэ дупэ модул ку форца

$\bar{F}_{1,2}$ , акционынд ын лунгул ачелаяш дрепте ка ши форца  $\bar{F}_{1,2}$ , ынсэ ын сенс опус ей. Астфел

$$\bar{F}_{2,1} = -\bar{F}_{1,2}.$$



Фиг. 180.

Деч аксиома а трея а динамичий поате фи формулатэ ын фелул урмэтор: *форцеле де интеракциуне а доуэ пункте материале акционязэ ын лунгул уней дрепте, сынт ындрептате ын сенсурь опусе ши егале дупэ модулу.*

#### Аксиома а патра а динамичий

Ачастэ аксиомэ експримэ индепенденца акциуний май мултор форце, апликате ынтр'ун пункт материал: *пунктул материал, супус акциуний кыторва форце, общине акчелерацие, егалэ ку сума жеометрикэ а акчелерациилор, комуникате де фиекаре форцэ ын прате, че акционязэ индепендент уна де алта.*

Ку алте кувинте, системул де форце апликат ынтр'ун пункт материал, есте еквивалент дин пункт де ведере динамик ку о сингурэ форцэ резултантэ, егалэ ку векторул резултант ал системулуй де форце.

Фие  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$  сынт форцеле, каре акционязэ асупра пунктулуй  $B$ . Акчелерацииле, комуникате де фиекаре дин ачесте форце ын парте че акционязэ индепендент уна де алта сынт  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ .

Конформ аксиомей а доуа

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_1, m\bar{a}_2 = \bar{F}_2, \dots, m\bar{a}_n = \bar{F}_n.$$

Дупэ аксиома а патра пентру акчелерация  $\bar{a}$ , комуникатэ пунктулуй де системул де форце  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ , авем

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n.$$

Ынмулцим ултима егалитате ку маса пунктулуй:

$$m\bar{a} = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 + \dots + m\bar{a}_n,$$

сау цинынд конт де екуацииле, каре експримэ аксиома а доуа, общинем

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n,$$

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_n.$$

Ачасть екуацие есте нумитэ екуация де базэ а динамичий пунктулуй материал ын казул май мултор форце, апликате ын пунктул дат.

## § 2. СИСТЕМЕ ДЕ УНИТЭЦЬ

Пынэ ын презент ын механикэ се ынтребуинцау доуэ системе де унитэць. Системул ЧГС (абсолют) авынд урмэтоареле унитэць фундамента: унитатя де лунжме — центиметрул, унитатя де масэ — грамул, унитатя де тимп — секунда «центиметру — грам — секундэ». Коефициентул де пропорционалитате  $k$  дин формула (1), че експримэ аксиома а доуа а динамичий, есте егал ку унитатя атунч, кынд дрепт унитате де форцэ се я форца, каре, акционынд асупра пунктулуй материал ку маса де 1 г комуникэ ачестуй пункт акчелерация де 1  $\text{cm}/\text{сек}^2$ . Ачасть унитате де форцэ о нумим *динэ*. Астфел, пентру о динэ авем

$$1 \text{ динэ} = 1 \text{ г} \cdot 1 \text{ cm}/\text{сек}^2.$$

Форца ын системул ЧГС аре дименсиуна  $\text{mlt}^{-2}$ .

Дина есте о унитате де мэсурэ микэ. Де екземплу, форца де атракцие, ку каре Пэмынтул акциязэ асупра пунктулуй материал ку маса де 1 г есте  $P = 1 \text{ г} \cdot 981 \text{ cm}/\text{сек}^2 = 981 \text{ дине}$ , адикэ апроксиматив ку о мие де дине\*.

Астфел, форца ын системул ЧГС есте о мэриме дериватэ.

Унитэциле фундаментаде але системулуй техник де унитэць сынт: килограмул-форцэ, метрул, секунда.

Ун килограм-форцэ есте егал ку форца, ку каре Пэмынтул атраже ун корп ку маса де 1 кг. Унитатя де масэ дин ачест систем есте о унитате дериватэ. Дрепт унитате де масэ се я маса унуй корп, каре обцине о акчелерация де 1  $\text{m}/\text{сек}^2$  суб акциуныя форцей де 1 кг. Есте евидент, кэ унитатя де масэ дин системул техник есте де 9,8 орь май маре декыт ун килограм-масэ дин системул ЧГС.

Ын презент есте адоптат Системул Интернационал де унитэць — системул СИ, авынд урмэтоареле унитэць фундамента: метрул, килограмул-масэ, секунда. Ын системул СИ, спре деосебире де системул ЧГС, унитатя де лунжме есте де о сутэ де орь май маре, яр унитатя де масэ — де о мие де орь май маре. Унитатя де форцэ ын системул СИ есте ун *ньютон* (н), егал ку форца, каре комуникэ корпулуй ку маса де 1 кг о акчелерация де 1  $\text{m}/\text{сек}^2$ . Релация динтре ньютон ши динэ есте урмэтоаря:

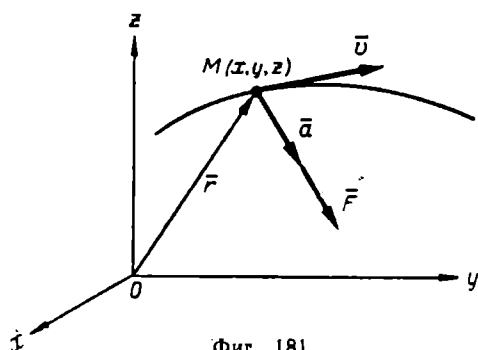
$$1 \text{ н} = 10^5 \text{ дине} \text{ (о сутэ де мий де дине)}.$$

\* Форца де атракцие а Пэмынтулуй комуникэ тутурор корпурилор, ситуате ле супрафаца луй, уна ши ачеш акчелерация, валлоаря медие а кэрея есте 9,8  $\text{m}/\text{сек}^2$ .

# ЕКУАЦИИЛЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ ШИ ПРОБЛЕМЕЛЕ ДЕ БАЗЭ АЛЕ ДИНАМИЧИЙ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

## § 1. ЕКУАЦИИЛЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Лежя де базэ а динамичий пермите дедучеря екуациилор диференциале але мишкэрий пунктулуй материал ын диферите системе де координате. Аксиома деспре легэтурь ши реакциуниле лор не дэ посибилитатя де а обцине екуацииле диференциале але мишкэрий пунктулуй супус ла легэтурь тот ын аша фел, ка ши пентру пунктул материал либер, ку ексцепция, кэ ын казул пунктулуй супус ла легэтурь требуе адэугате реакциуниле



Фиг. 181.

легэтурилор. Ын женерал, реакциуниле легэтурилор депинд ну нумай де натура легэтурий ши форцеле, каре акционязэ асупра пунктулуй материал, чи ши де характерул мишкэрий, де екземплу, де витеза луй ла мишкаря ын аер сау ынтр'ун алт медиу оарекаре, че опуне резистенцэ. Ын виитор ну вом фаче деосебире ынтре пунктеле материала либере ши челе супусе ла легэтурь. Фие  $F$  есте резултанта тутурор форцелор консидерате ши а реакциунилор легэтурилор, яр  $m$  — маса пунктулуй. Атунч

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (1)$$

Дин чинематика пунктулуй кunoаштем, кэ акчелерация луй  $\bar{a}$  се експримэ принц раза векторе  $\bar{r}$  (фиг. 181)

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Екуация динамикэ дифференциалэ а мишкэрий пунктулуй материал ын форма векториалэ аре аспектуй

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2)$$

Проектынд амбеле пэрць але егалитэцилор (1) сау (2) пе акселе де координате, обцинем екуацииле дифференциале але мишкэрий пунктулуй материал ын проекций пе ачесте аксе.

Ын системул де координате картезиене авем ын каз жене-  
рал

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Проекцииле акчелерацией пе акселе де координате лот фи экспримате прин деривателе де ординул дой але координателор пунктулуй ын мишкаре ын рапорт ку тимпул, адикэ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Екуацииле дифференциале але мишкэрий пунктулуй материал ын системул ректангулар де координате картезиене сынт

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (3)$$

Казурь партикуларе. Дакэ пунктул материал ын тот тимпул мишкэрий рэмыне ын унул ши ачелаш план, кон-  
сидерынд ачест план дрепт планул де координате  $Ox$ , авем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y. \quad (4)$$

Ын орьче момент  $z=0$  ши, прин урмаре,  $F_z=0$ .

Ын казул мишкэрий ректилиний, консидерынд дряпта пе каре се мишкэ пунктул дрепт акса де координате  $Ox$ , обци-  
нем о сингурэ екуацие дифференциалэ а мишкэрий пунктулуй

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x. \quad (5)$$

Ын тот тимпул мишкэрий  $y=z=0$  ши деч,  $F_y=F_z=0$ .

Дакэ мишкаря пунктулуй материал се рапортэ ла триедрул натурал мобил (фиг. 182), проектынд амбеле пэрць але екуа-  
цией (1) пе ачесте аксе, обцинем

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

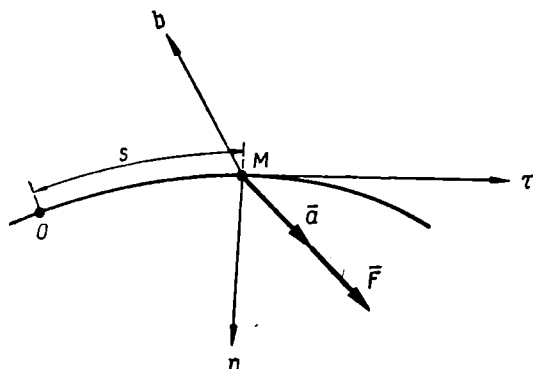
унде  $a_\tau$ ,  $a_n$ ,  $a_b$  ши  $F_\tau$ ,  $F_n$ ,  $F_b$  сынт респектив, проекцииле акчелерацией ши форцей резултанте пе тангентэ, нормала

принципалэ ши бинормала ла траекторие ын пунктул консидерат. Цинынд самэ, кэ

$$a_{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

унде  $\rho$  есте раза де курбурэ а траекторией, обцинем урмэтоареле екуаций дифференциале але мишкэрий пунктулуй ын проэкций пе акселе триедрулуй натурал:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F_{\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b. \quad (6)$$



Фиг. 182.

Трансформэм екуация а доуа дин (6)

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}; \quad \frac{v^2}{\rho} = v \cdot \frac{v}{\rho} = v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\varphi}} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Аич  $\frac{d\varphi}{dt}$  есте витеза унгуларэ а танжентей ла траектория пунктулуй ын мишкарэ ши, прин урмаре,  $d\varphi$  есте унгул де континженцэ динтре танжентеле ла траекторие ын доуэ пункте инфинит вечине.

Екуацииле дифференциале (6) се пот пуне суб форма

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau}; \quad mv \frac{d\varphi}{dt} = F_n; \quad 0 = F_b. \quad (6')$$

Ачастэ формэ а екуацинлор дифференциале але мишкэрий пунктулуй есте комодэ ла студиул унор казурь але мишкэрий обузелор ши ракетелор, май ку самэ дупэ траекторий, ситуате ынтр'ун план. Ын ачест каз  $\varphi$  есте унгул динтре танжента ла траекторие ши о аксэ оарекаре дин планул траекторией.

Екуацииле дифференциале але мишкэрий пунктулуй пот фи скриси ши ын орькаре алт систем де координате. Пентру ачаста есте нечесар сэ куноаштем експресиеле пентру проекцииле акчелерацией пе акселе де координате але системулуй кореспунзэтор.

## § 2. ДОУЭ ПРОБЛЕМЕ ДЕ БАЗЭ АЛЕ ДИНАМИЧИЙ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Куноаштеря екуациилор дифференциале але мишкэрий пунктулуй материал ын диферите системе де координате не дэ посибилитатя де а резолва доуэ проблеме де базэ але динамичий пунктулуй.

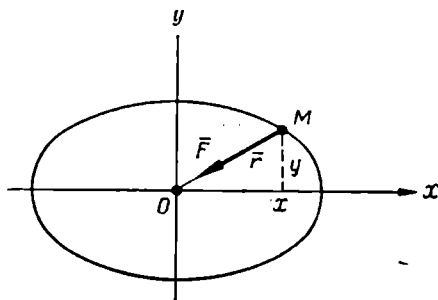
**Прима проблемэ.** Сэ се детермине форца, че акциязэ асупра пунктулуй материал, фиинд куноските маса ши лежя мишкэрий луй. Ынтр'эдевэр, дакэ, де екземплу, се куноск екуацииле мишкэрий пунктулуй ын системул де координате картезиене

$$x=f_1(t); y=f_2(t); z=f_3(t),$$

проекцииле форцей пе акселе де координате се детерминэ дин екуацииле дифференциале (3) але мишкэрий пунктулуй, адикэ

$$F_x=m \frac{d^2x}{dt^2}=m \frac{d^2f_1}{dt^2}; \quad F_y=m \frac{d^2y}{dt^2}=m \frac{d^2f_2}{dt^2}; \quad F_z=m \frac{d^2z}{dt^2}=m \frac{d^2f_3}{dt^2}.$$

Куноскынд проекцииле форцей пе акселе де координате, путем детермина ушор мэрия форцей ши косинусуриле унгюрилор динтре форцэ ши акселе де координате.



Фиг. 183.

**Екземплул 1.** Пунктул ку маса  $m$  се мишкэ ын планул  $Oxy$  астрел, ынкыт екуацииле мишкэрий луй сынт

$$x=a \cos kt; \quad y=b \sin kt,$$

унде  $a, b, k$  сынт ниште мэрымь константе, яр  $t$  — тимпул (фиг. 183).

Сэ се детермине форца, суб акциуня кэрея се мишкэ ачест пункт материал.

Резолваре. Елиминынд тимпул дин екуацииле мишкэрий, обцинем траектория пунктулуй:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 kt + \sin^2 kt + 1.$$

Траектория пунктулуй есте о елипсэ ку семиакселе  $a$  ши  $b$ . Пе база екуациилор дифференциале (4) але мишкэрий пунктулуй авем

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2a \cos kt; F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2b \sin kt,$$

сау, ынтродукынд координателе пунктулуй ын мишкаре,

$$F_x = -mk^2x; F_y = -mk^2y.$$

Резултэ, кэ

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2r,$$

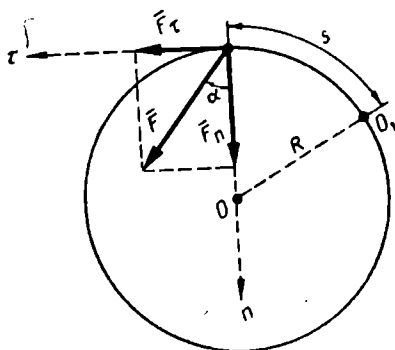
унде  $r$  есте раза вектоаре а пунктулуй ын мишкаре.

Пентру косинусуриле унгюрилор динтре форца  $\bar{F}$  ши акселе де координате авем:

$$\cos(\bar{F}, \hat{x}) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}; \cos(\bar{F}, \hat{y}) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Де аич путем траже конклузия, кэ форца  $\bar{F}$  есте ындрептатэ ын сенс опус сенсулуй разей вектоаре  $\bar{r}$ . Дефинитив пентру форца  $\bar{F}$  обцинем

$$\bar{F} = -mk^2\bar{r}.$$



Фиг. 184.

Екземплул 2. Ун пункт ку маса  $m$  се мишкэ дин старя де репаус пе о чиркумферинцэ де разэ  $R$ , акчелерация танженциалэ  $a_t$  а луй фиинд константэ. Сэ се детермине мэримя форцей, че акционязэ асупра пунктулуй ын мишкаре ын моментул, кынд ел паркурже пе траекторие дистанца  $s_1 = R\sqrt{2}$  (фиг. 184).



Резолваре. Апликынд екуацииле дифференциале (6) але мишкэрий пунктулуй материал ын проекций ле акселе триедрулуй натурал, авем

$$F_{\tau}=ma_{\tau}; F_n=m\frac{v^2}{R}; F_b=0.$$

Мишкаря аре лок ку акчелерация танжэнциалэ  $a_{\tau}$  константэ ши фэрэ витезэ инициалэ ши деачея

$$v=a_{\tau}t; s=\frac{a_{\tau}t^2}{2}.$$

Атунч

$$F_{\tau}=ma_{\tau}; F_n=m\frac{a_{\tau}^2t^2}{R},$$

яр

$$F=\sqrt{F_{\tau}^2+F_n^2}=ma_{\tau}\sqrt{1+\frac{a_{\tau}^2t^4}{R^2}}.$$

Ын моментул, кынд

$$s=RV\sqrt{2}=\frac{a_{\tau}t^2}{2},$$

$$\frac{a_{\tau}t^2}{R}=2\sqrt{2}$$

ши прин урмаре,

$$\frac{a_{\tau}^2t^4}{R^2}=8.$$

Астфел

$$F=ma_{\tau}\sqrt{1+8}=3ma_{\tau}.$$

Танжента унгулуй  $\alpha$  динтре раза чиркумферинцей ши форца  $\bar{F}$  есте

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\tau}}{F_n} = \frac{ma_{\tau}}{m\frac{a_{\tau}^2t^2}{R}} = \frac{R}{a_{\tau}t^2} = \frac{R}{2\sqrt{2}R} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Дин анализа примей проблеме а динамичий пунктулуй материал реесе, жэ куноаштеря масей пунктулуй материал ши а екуациилор мишкэрий луй детерминэ ын ынтрежиге форца атыт дупэ модул кыт ши дупэ дирекции ши сенс.

**Проблема а доуа.** Сэ се детермине мишкаря пунктулуй материал, фиинд куноскуте маса пунктулуй ши форца, каре акционязэ асупра луй. Вом резолва ачастэ проблемэ ын системул ректангулар де координате картезиене. Форца  $\bar{F}$ , прин урмаре, ши проекцииле ей ле акселе де координате пот депинде де тымп,

де координателе пунктулуй ын мишкаре ши де витеза дуй. Екуацииле дифференциале (3) але мишкэрий пунктулуй материал сынт

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Екуацииле мишкэрий пунктелор се обцин прин интеграря ачестуй систем де екуаций дифференциале ординаре де градул дой. Дин теория екуациилор дифференциале ординаре куноаштем, кэ солуция уней сингуре екуаций дифференциале де ординул дой концине доуэ константе арбитраре. Деч, солуция системулуй де трей екуаций дифференциале ординаре ва концине шасе константе арбитраре  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ .

Координателе  $x, y, z$  але пунктулуй ын мишкаре, обцинуте прин интеграря системулуй (3), депинд де тимпул  $t$  ши де ачесте шасе константе арбитраре, адикэ

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= f_2(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= f_3(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

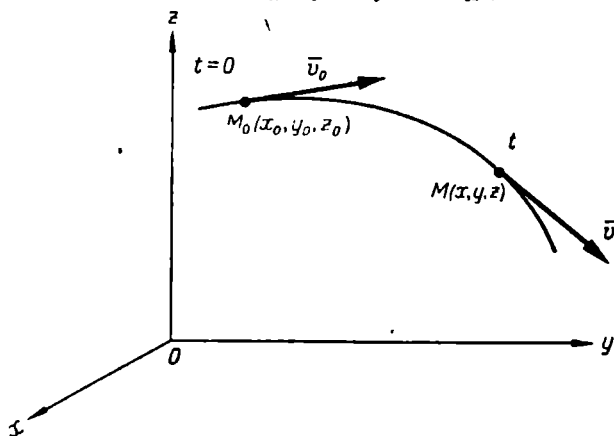
Проекцииле витезей пунктулуй пе акселе де координате се обцин прин дериваря екуациилор (7) ын рапорт ку тимпул

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x} = f'_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_y &= \dot{y} = f'_2(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_z &= \dot{z} = f'_3(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Астфел, форца ну детерминэ мишкаря конкретэ а пунктулуй материал, чи сепарэ о класэ ынтрягэ де мишкэрь, че се карактеризязэ ку шасе константе арбитраре. Форца детерминэ нумай акчелерация пунктулуй ын мишкаре, пе кынд витеза ши позиция пунктулуй пе траекторие пот депинде ынкэ де витеза, коммуникатэ пунктулуй ын моментул инициал ши де позиция инициалэ а луй. Астфел, де екземплу, дакэ ну цинем конт де резистенца аерулуй, акчелерация орькэруй пункт материал, че се мишкэ ын апропиеря сулрафцей Пэмынтулуй суб акциуныя форцей де треутате, есте егалэ ку  $g$ . Ынсэ куноаштем, кэ витеза пунктулуй, позиция луй ын спациу ын унул ши ачелаш момент пот фи диферите. Кяр ши траекторииле пунктелор пот фи де диферите форме ын функцие де позиция, дин каре с'а ынчепут мишкаря, ши де мэримя, дирекция ши сенсул витезей инициале а пунктулуй мобил.

Пентру а сѣпара казул конкрет де мишкаре а пунктулуй материал, есте нечесар сѣ дефиним суплиментар ниште кондиций, каре ар да посибилитате сѣ детерминѣм константеле арбитраре, деспре каре а фост ворба май сус. Ын казул жѣнерал авѣм шасе константе арбитраре ши деч, сынт нечесаре шасе кондиций. Дрепт кондиций суплиментаре се фолосеск де обичей аша нумителе кондиций инициале, адикѣ ынтр'ун ануит екземплу пентру  $t=0$  (фиг. 185), се дефинеск координателе  $x_0, y_0, z_0$  але пунктулуй мобил ши проекцииле витезей луй  $v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$ ,

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0, & y &= y_0, & z &= z_0, \\ x &= v_{0x}, & y &= v_y, & z &= v_{0z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Фиг. 185.

Ачесте кондиций инициале ши формулеле (7) ши (8) пермит обцинеря а шасе екуаций, нечесаре пентру детерминаря челор шасе константе арбитраре:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); & y_0 &= f_2(0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z_0 &= f_3(0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); & v_{0x} &= f'_1(0; C_1, C_2, \dots, C_6); \\ v_{0y} &= f'_2(0; C_1, C_2, \dots, C_6); & v_{0z} &= f'_3(0; C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (10)$$

Дакѣ системул де екуаций (10) есте компатибил, дин ел се пот детермина тоате челе шасе константе арбитраре.

Кондицииле инициале (9) детерминѣ о солуцие уникѣ а системулуй (3) де екуаций диференциале, дакѣ се респектѣ кондицииле кореспунзѣтоаре але теорией екуациилор диференциале. Алте форме але кондициилор суплиментаре, ка, де екземплу, дефиниря а доуѣ пункте, прин каре требуе сѣ трякѣ траектория пунктулуй ын мишкаре, пот детермина сау кытева солуций, каре сатисфак ачесте кондиций, сау нич о солуцие.

Ын казул мишкэрий пунктулуй ын планул  $Oxy$  авем доуэ екуаций дифференциале але мишкэрий, яр солуцииле ачестор екуаций концин патру константе арбитраге. Еле се детерминэ дин кондицииле инициале:

$$t=0, x=x_0, y=y_0, \dot{z}=v_{0x}, \dot{y}=v_{0y}.$$

Ын казул уней мишкэрь ректилиний авем о сингурэ екуацие дифференциалэ, солуция кэрея концине доуэ константе арбитраге. Пентру а ле детермина есте нечесар сэ стабилим доуэ кондиций инициале:

$$t=0, x=x_0, \dot{x}=v_{0x}.$$

Интеграря системулуй де екуаций дифференциале (3) пентру кондицииле инициале стабилите, ын женерал, есте о проблемэ дестул де тря. Пынэ ши ын казул мишкэрий ректилиний, чел май симплу каз ал мишкэрий, кынд авем о сингурэ екуацие дифференциалэ, солуция ачестей екуаций поате фи експриматэ екзакт ын куадратурь нумай пентру о аномитэ релацие динтре форцэ, тимпул  $t$ , координата  $x$  ши витеза  $v$ . Деачея о импортанцэ маре аре стабилиря де база системулуй де екуаций (3) а унор аша релаций, каре сынт консечинце але ачестуй систем ши каре концин деривате нумай де ординул ынтый а координателор пунктулуй. Астфел де релаций, де екземплу, де форма

$$f(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})=C$$

се нумеск *интеграле приме* але системулуй де екуаций дифференциале (3). Обцинеря дин системул (3) а трей интеграле приме индепенденте дуче ла симплификаря интегрэрий, деоарече ын локул интегрэрий унуй систем де екуаций дифференциале де ординул дой есте суфициент сэ интегрэм ун систем де трей екуаций дифференциале де ординул ынтый, систем конституит дин интеграле приме. Ын виитор вом фаче куноштинцэ ку теоремеле женерале але динамичий, каре ын унеле казурь партикуларе але мишкэрий пунктулуй материал пермит обцинеря унор интеграле приме але екуациилор дифференциале.

Пентру а кларифика партикуларитэциле резолвэрий проблемей а доуа де базэ а динамичий, каре аре ун карактер апликатив вом консидера резолваря ей атыт ын казул мишкэрий ректилиний кыт ши ын казул мишкэрий курбилиний але пунктулуй материал.

### § 3. ФЕЛУРИЛЕ ПРИНЧИПАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ РЕКТИЛИНИЙ А ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Конформ формулей (5), екуация дифференциалэ а мишкэрий ректилий а пунктулуй ын лунгул аксей  $Ox$  есте

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t; x, v).$$

Кондицииле инициале пот фи стабилите аспфел

$$t=0, x=x_0, v_x=v_0.$$

Челе май импортанте казурь але мишкэрий ректилий а пунктулуй материал сынт: форца  $F_x$  есте константэ сау депинде нумай де тимп, сау де координата  $x$ , сау де витеза  $v$ . Ын казул форцей константе авем мишкаре униформ вариетэ, адикэ мишкаре ку акчелерацие константэ. Де обичей форца депинде де тимп атунч, кынд еа поате фи регулатэ, ка, де екземплу, форца де тракциуне а авионулуй поате фи регулатэ, скимбынд режимул де лукру ал мотоарелор луй.

Спирала комприматэ сау ынтинсэ, кыт ши алте корпурь еластиче, ла деформаря лор наск о форцэ, каре депинде де координата  $x$ . Екземпле де форце каре депинд де витеза мишкэрий сынт, ын примуд рынд, форцеле де резистенцэ ла мишкаря пунктулуй материал ынтр'ун медиу оарекаре, ка аерул, апа ш. а. Менсионэм, кэ интеграря екуацией дифференциале (5) ын казуриле енумерате се ефектуязэ чел май симплу ши поате фи резолватэ прин куадратурь. Ын казул женерал, кынд форца депинде симултан де тимпул  $t$ , координата  $x$  ши витеза  $v$  поате фи обцинутэ нумай солуция апроксимативэ а екуацией дифференциале (5).

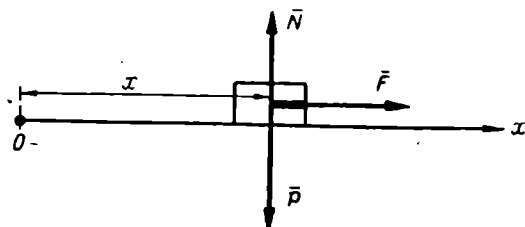
Сэ консидерэм кытева екземпле де компунеря ши интеграря екуацией дифференциале ын казул мишкэрий ректилий а пунктулуй. Ачесте екземпле не пермит сэ скоатем ла ивялэ унеле партикуларитэць але резолвэрий проблемелор де ачест фел. Ын екземплеле де май жос форца депинде сау нумай де тимп, сау нумай де витезэ, сау нумай де координатэ.

*Екземплу 1.* Ун аутокамион, греутатя кэруя есте 70 кн, ынчепе мишкаря са диң старя де репаус пе ун сегмент ректилийу де друм. Де ла ынчепутул мишкэрий сурплусул форцей де тракциуне фацэ де форца де резистенцэ креште пропорционал ку тимпул ын фиекаре секундэ ку 1 кн. Сэ се афле екуация мишкэрий аутокамионулуй.

*Резолваре.* Дрепт аксэ  $Ox$  луэм дряпта, ын лунгул кэрея аре лок мишкаря. Орижня  $O$  о ситуэм ын позиция инициалэ а аутокамионулуй. Ынтр'о позиции арбитрарэ а аутокамионулуй, диферитэ де чя инициалэ, де екземплу, атунч кынд  $x > 0$ ,

асупра аутокампионулуй акцияныз форцелле  $\bar{F}$ ,  $\bar{P}$  ши  $\bar{N}$  (фиг. 186). Сэ компунем екуация диференциалэ а мишкэрий. Партя стынгэ а екуацией аре семнул плус, яр чя дряптэ — семнул проекцией форцей резултанте пе акса  $Ox$ . Екуация диференциалэ есте

$$\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = F; \quad F = 1t \text{ кн.}$$



Фиг. 186.

Консидерынд  $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$ , скрием екуация диференциалэ астфел

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{7}t.$$

Ынтрукыт

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

обцинем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{7}t.$$

Сепарынд вариабилеле, апой интегрынд, обцинем урмэтоаря експрессие пентру витезэ

$$v = \frac{1}{7} \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Ынтрукыт пентру  $t=0$   $v=0$ , субституинд ачесте валорь ын формула витезей  $v$ , обцинем пентру константа де интеграре

$$C_1 = 0.$$

Субституинд валоаря луй  $C_1$  ын формула витезей ши циньнд конт кэ  $v = \frac{dx}{dt}$ , авем урмэтоаря екуацие диференциалэ пентру детерминаря екуацией мишкэрий

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{14}t^2.$$

Сепарэм вариабилеле ши интегрэм експрессия обцинутэ. Резултэ

$$x = \frac{1}{14} \frac{t^3}{3} + C_2.$$

Орижния координатей е алясэ астфел, ынкыт пентру  $t=0$  авем  $x=0$ . Дин формула пентру  $x$  резултэ:  $C_2=0$ .

Астфел екуация кэутатэ а мишкэрий аутокамионулуй есте

$$x = \frac{t^3}{42} M.$$

**Екземплул 2.** Ун пункт материал де масэ  $m$  каде вертикал ын жос ку витеза инициалэ нулэ. Асупра пунктулуй акциянэе форца де греутате ши форца де резистенце дин партя аерулуй  $\bar{R}$ , мэрия кэрея есте пропорционалэ ку патратул витезей пунктулуй ши ку маса луй, адикэ  $R=kmv^2$ , унде  $k$  есте ун коэффициент де пропорционалитате констант. Сэ се афле екуация мишкэрий пунктулуй.

**Резолваре.** Ындрептэм акса  $Ox$  дупэ вертикалэ ын жос, алегынд дрепт орижине  $O$  а системулуй де координате позиция инициалэ а пунктулуй. Ын ачест момент консидерэм  $t=0$ . Репрезентэм пентру ун момент арбитрар форцеле  $\bar{P}$  ши  $\bar{R}$ , каре акциянэе асупра пунктулуй (фиг. 187). Екуация диференциалэ а мишкэрий есте

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kmv^2.$$

Витеза поате фи експриматэ атыт ка функție де тимпул  $t$  кыт ши ка функție де координата  $x$  фолосинд субституцииле

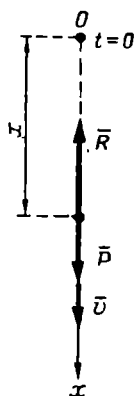
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Ултима субституție пермите ексклудеря тимпулуй дин екуация диференциалэ пентру детерминаря витезей. Ынмулцинд ши ымпэринд симулан прима субституție ла  $dx$  авем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v.$$

Фолосим прима субституție. Екуация диференциалэ капэтэ форма

$$\frac{dv}{dt} = k \left( \frac{g}{k} - v^2 \right).$$



Фиг. 187.

Сепарынд вариабилеле ши интегрывнд, обцинем

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{g}{k} - v^2} = k \int_0^t dt.$$

Пентру а ну ынтребуинца константа арбитрарэ се пот луа интегралеле дефините, лимителе де сус але кэтора се ласэ вариабиле, яр челе де жос се алег асфел ка сэ сатисфакэ кондицииле инициале, — ын казул де фазэ пентру  $t=0$   $v=0$ . Ын легэтурэ ку ачаста с'ау луат лимителе де жос але интегралелор. Резултатул интегрэрий ши субституирий лимителор есте

$$\int_0^v \left( \frac{d\left(\sqrt{\frac{g}{k}} - v\right)}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} + \frac{d\left(\sqrt{\frac{g}{k}} + v\right)}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v} \right) = 2\sqrt{\frac{g}{k}} k \int_0^t dt.$$

сау

$$-\ln \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} - v}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v} \bigg|_0^v = 2\sqrt{gk} t \bigg|_0^t.$$

адикэ

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} - v}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v} - \ln 1 = -2\sqrt{gk} t.$$

Дупэ потенциере, резолвынд ын рапорт ку  $v$ , обцинем

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{g}{k} \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}}} = \sqrt{\frac{g}{k} \frac{e^{\sqrt{gk}t} - e^{-\sqrt{gk}t}}{e^{\sqrt{gk}t} + e^{-\sqrt{gk}t}}} \\ &= \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{gk}t). \end{aligned} \quad (a)$$

Дупэ тречеря ын (а) ла лимитэ пентру  $t$  тинзынд ла инфинит, авём

$$v_{\text{лим}} = v_{t \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{g}{k}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk}t}}{1 + e^{-2\sqrt{gk}t}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Витеза лимитэ се обцине дупэ ун интервал инфинит де маре де тимп, ынсэ студиул май амэнуцит аратэ, кэ витеза апропиятэ де чя лимитэ, се обцине дестул де репеле. Менционэм, кэ ви-



теза лимитэ а парашутистулуй ла кэдеря либерэ а луй фэрэ а дескиде парашута ын апролиеря Пэмынтулуй есте де 50—60 м/сек, яр а бомбей де авион — 200—250 м/сек.

Пентру а общине лежя мишкэрий субституим ын (а) витеза  $v$  прин  $\frac{dx}{dt}$ . Атунч

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{gk} t).$$

Дупэ сепараря вариабилелор ши интеграря экспресией общинуте, авем

$$\int_0^x dx = \sqrt{\frac{g}{k}} \int_0^t \operatorname{th}(\sqrt{gk} t) dt$$

сау

$$x = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{\frac{1}{gk}} \ln \operatorname{ch}(\sqrt{gk} t) \Big|_0^t = \frac{1}{k} \ln \operatorname{ch}(\sqrt{gk} t).$$

**Екземплул 3.** Ун пункт материал де масэ  $m$ , фиинд арункат, вертикал ын сус де пе супрафаца Пэмынтулуй ку витеза  $v_0$ , се мишкэ суб акциуня форцей де атракцие а Пэмынтулуй конформ лежий гравитацией универсале. Сэ се детермине витеза пунктулуй ка функции де дистанца динтре пункт ши центрул Пэмынтулуй.

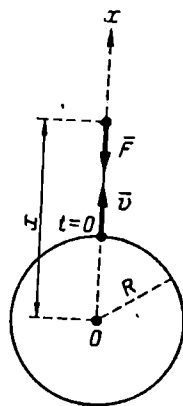
**Резолваре.** Сэ ындрептэм акса  $Ox$  ын лунгул траекторией ректилиний а пунктулуй, яр орижина координателор о луэм ын центрул Пэмынтулуй (фиг. 188). Модулул форцей де атракцие  $\bar{F}$  есте

$$F = \frac{k}{x^2}.$$

Коефициентул констант  $k$  поате фи экспримат прин алте мэримь, де екземплу  $k = \mu M m$ , унде  $M$  есте маса Пэмынтулуй, яр  $\mu$  — константа гравитацией универсале. Ын казул де фаца е май конвенабил сэ экспримэм  $k$  дин кондиция, кэ пе супрафаца Пэмынтулуй форца де атракцие  $F$  есте егалэ ку форца де греутате  $P = mg$ . Егалымд  $F$  ши  $P$  пентру  $x = R$ , общинем

$$mg = \frac{k}{R^2}; \quad k = mg R^2,$$

унде  $g$  есте акчелерация кэдерий либере пе супрафаца Пэмынтулуй, яр  $R$  — раза Пэмынтулуй.



Фиг. 188.

Субституиңд  $k$  ын формула форцей, авем:

$$F = \frac{mg R^2}{x^2}.$$

Екуация дифференциалэ а мишкэрий пунктулуй есте

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{mg R^2}{x^2}.$$

Семнул минус ын партя дряптэ а ачестей екуаций есте дe-терминат де семнул проекцией форцей  $\bar{F}$  пе акса  $Ox$ . Пентру валориле позитиве але луй  $x$ , консидерате ын ачест екземплу, проекция форцей  $\bar{F}$  пе акса  $Ox$  есте негативэ.

Дупэ субституция

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx},$$

каре пермите ексклудеря тимпулуй дин екуация дифференциалэ, авем

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{gR^2}{x^2}.$$

Сепарыңд вариабилеле ши луыңд интеграла дефинитэ де ла амбеле лэръц але експресией обцинуте, цыңыңд конт кэ пентру  $x=R$  витеза  $v=v_0$ , авем

$$\int_{v_0}^v v dv = -gR^2 \int_R^x \frac{dx}{x^2}.$$

сау

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -gR^2 \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{R} \right).$$

Резултэ

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)}.$$

Дистанца максимэ  $x_{\max}$  де ла супрафаца Пэмынтулуй, адикэ атунч кыңд  $v=0$ , ын функции де витеза инициалэ  $v_0$  есте

$$x_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}.$$

Дин ачастэ формулэ резултэ, кэ одатэ ку мэриря витезей инициале  $v_0$  креште ши  $x_{\max}$ , девениңд инфинит де маре пентру  $v_0 = \sqrt{2gR}$ . Прин урмаре, корпул аруңкат де пе супрафаца Пэмынтулуй вертикал ын сус ку витеза  $v_0 = \sqrt{2gR}$  ну се май

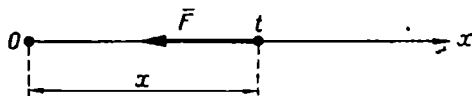
ынтоарче пе Пэмынт. Луынд  $g \approx 9,8 \text{ м/сек}^2$ ,  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ , обцинем

$$v_0^* = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/сек.}$$

Витеза  $v_0^* \approx 11,2 \text{ км/сек}$  се нумеште *витеза а доуа космикэ*. Аста есте чя май микэ витезэ нечесарэ корабией космиче пэнтру зборул ей спре алте планете.

Чя май микэ витезэ, ла каре корабия девине сателит ал Пэмынтулуй, се нумеште *прима витезэ космикэ*. Еа есте апроксиматив де  $8 \text{ км/сек}$  (везь кап. 12).

**Екземплул 4.** Ун пункт материал ку маса  $m$  се мишкэ суб акциуня форцей де атракция спре пунктул фикс  $O$ . Форца датэ есте директ пропорционалэ ку маса puntuлуй мобил  $m$  ши инверс пропорционалэ ку кубул дистанцей динтре пунктул мобил ши чел фикс. Коэффициентул де пропорционалитате есте егал ку унитатя. Ын моментул инициал  $t=0$ ,  $x_0=2 \text{ м}$  ши  $v_0 = \frac{1}{2} \text{ м/сек.}$  Сэ се детермине лежя мишкэрий puntuлуй.



Фиг. 189.

Резолваре. Алежем дрепт орижине а координателор puntuлу  $O$  (фиг. 189). Мэримя форцей  $\bar{F}$  есте

$$F = \frac{m}{x^3}.$$

Компунем екуация диференциалэ а мишкэрий puntuлуй:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{m}{x^3}.$$

Апликынд субституция

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx}$$

обцинем

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{x^3}.$$

Дупэ сепараря вариабилелор ши ефектуаря интегрэрий авем

$$\int_{v_0}^i v dv = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^3}$$

сау

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x_0^2}.$$

Субституинд валориле нумериче але мэримилор  $x_0$  ши  $v_0$ , обцинем

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{1}{x}.$$

Дупэ интеграря ачестей екуаций дифференциале авем

$$\int_{x_0}^x x dx = \int_0^t dt$$

сау

$$\frac{x^2}{2} - 2 = t.$$

Авем дефинитив урмэтоаря леже а мишкэрий

$$x = \sqrt{4 + 2t} \text{ м.}$$

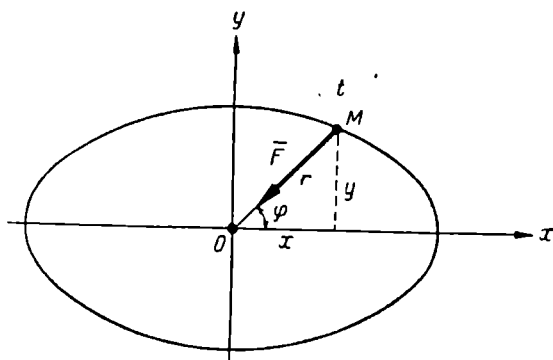
#### § 4. МИШКАРЯ КУРБИЛИНИЕ А ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Дакэ мишкаря курбилияне аре лок ынтр'ун план оарекаре, ын системул де координате картезиене авем нумай доуэ екуаций дифференциале але мишкэрий. Ын казул женерал ал мишкэрий пунктулуй материал ын спациу авем ун систем де трей екуаций дифференциале. Екуацииле дифференциале але мишкэрий курбилияний а пунктулуй материал пот фи интеграте релатив симплу атунч, кынд фиекаре дин ачесте екуаций се интегрязэ индепендент де челелалте ши, ын афарэ де ачаста, пентру де-пенденца проекцией форцей резултанте де тимп, координате ши витезэ авем унул дин челе трей казурь менционате май жос.

Сэ консидерэм кытева екземпле але мишкэрий курбилияний а пунктулуй пе план ши ын спациу.

**Екземплул 1.** Ун пункт материал ку маса  $m$  се мишкэ ын план (фиг. 190) суб акциуня форцей де'атракције  $\vec{F}$  спре' пунктул фикс  $O$ , форцэ, че вариязэ дупэ лежя  $\vec{F} = -mk^2 \vec{r}$  (форца де еластичитате), унде  $\vec{r}$  есте раза вектоаре а пунктулуй мобил дусэ дин  $O$ , яр  $k$ —ун коефициент констант. Ын моментул инициал  $t=0$ ,  $x=l$ ,  $y=0$ ,  $v_x=0$ ,  $v_y=v_0$  орижия де координате

финд аласэ ын  $O$ . Сэ се детермине екуация мишкэрий пункту-  
луй ши екуация траекторией луй ын координателе картезиене.



Фиг. 190.

Резолваре. Сэ луэм о позиции арбитрарэ а пунктулуй  
мобил ши сэ репрезентэм форца  $\vec{F}$ . Екуацииле диференциале  
але мишкэрий пунктулуй ын проекций пе акселе де координате  
сынт:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2r \cos \varphi; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2r \sin \varphi.$$

Ынтрукыт

$$r \cos \varphi = x; \quad r \sin \varphi = y,$$

екуацииле диференциале се пот пуне суб форма

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Пентру прима интеграре се пот ынтребуинца субституциле

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v_x \frac{dv_x}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v_y \frac{dv_y}{dy}.$$

сау се пот фолоси регуиле де интеграре але екуациилор ди-  
фференциале лиңаре ку коефициенць констанць. Интегрэм апли-  
кынд субституциле:

$$\int_0^{v_x} v_x dv_x = -k^2 \int_l^x x dx$$

сау

$$\frac{v_x^2}{2} = -\frac{k^2}{2}(x-l^2).$$

Аналог пентру  $v_y$  авем

$$\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -\frac{k^2}{2} y^2.$$

Цинынд сама кэ

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

обцинем

$$\frac{dx}{dt} = k \sqrt{l^2 - x^2}; \quad \frac{dy}{dt} = k \sqrt{\frac{v_0^2}{k^2} - y^2}.$$

Ачесте екуаций диференциале пот фи интеграте дупэ метода сепарэрий вариабилелор

$$\int_l^x \frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = k \int_0^t dt; \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k^2} - y^2}} = k \int_0^t dt.$$

Калкулынд интегралеле ши пунынд лимите, обцинем

$$\arcsin \frac{x}{l} - \arcsin 1 = kt; \quad \arcsin \frac{y}{\frac{v_0}{k}} - \arcsin 0 = kt,$$

сау

$$\frac{x}{l} = \sin \left( kt + \frac{\pi}{2} \right) = \cos kt; \quad \frac{y}{\frac{v_0}{k}} = \sin kt.$$

Авем дефинитив урмэтоареле екуаций але мишкэрий

$$x = l \cos kt; \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Ридикынд  $\cos kt$  ши  $\sin kt$  ла патрат ши апой адунынд, обцинем екуация траекторией пунктулуй ын координателе картезиене

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{k^2 y^2}{v_0^2} = 1.$$

Траектория пунктулуй мобил репрезintă о елипсэ, семиакселе кэрея сынт  $l$  ши  $\frac{v_0}{k}$ .

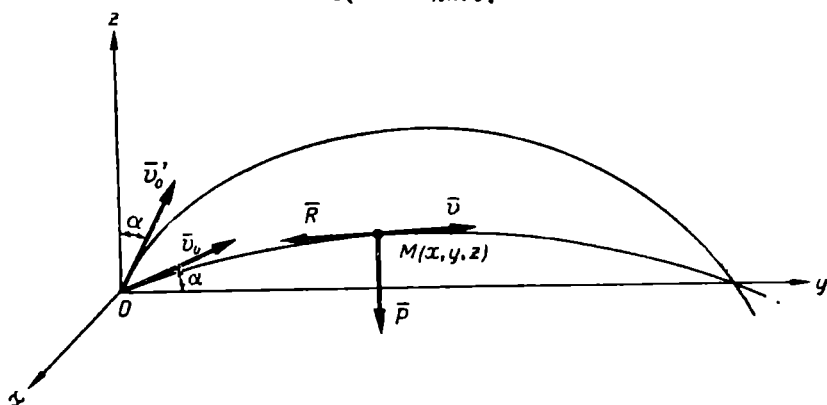
**Екземплул 2.** Ун пункт материал авынд маса  $m$  есте арункат де пе супрафаца Пэмынтулуй ын планул вертикал ку витеза инициалэ  $v_0$  суб унгул  $\alpha$  фацэ де оризонт (фиг. 191). Сэ се афле екуацииле мишкэрий пунктулуй, дакэ форца де резистенцэ а аерулуй есте ориентатэ ын сенсул опус витезей, фиинд пропорционалэ ку витеза ши ку маса, адикэ  $R = kmv$ , унде  $k$  есте ун коефициент де пропорционалитате.

Резолваре. Проблема се резолвэ май симплу ын системул де координате картезиене алес ын фелул урмэтор: орижиня есте луатэ ын пунктул де арункаре, акса  $Oz$  есте ориентатэ вертикал ын сус, яр акселе  $Ox$  ши  $Oy$  сынт ын планул оризонтал. Пентру фиксаля идеилор вом пресупуне, кэ витеза инициалэ  $\bar{v}_0$  есте ситуатэ ын планул  $Oxy$ . Луэм позиция пунктулуй мобил ын моментул  $t$ , кынд координателе луй куренте  $x, y, z$  сынт позитиве, ши репрезентэм форцеле, каре акционяэ асупра пунктулуй. Аvem доуэ форце: форца де греутате  $\bar{P}$ , ындрептатэ вертикал ын жос, ши форца де резистенцэ  $\bar{R}$ , ориентатэ ын сенс опус векторулуй витезэ  $\bar{v}$ . Резултанта ачестор форце  $\bar{F}$  есте

$$\bar{F} = \bar{P} + \bar{R},$$

унде

$$\bar{R} = -km\bar{v}.$$



Фиг. 191.

Проектынд форца  $\bar{F}$  пе акселе де координате ши пресупунынд, кэ проекциле  $v_x, v_y, v_z$  сынт позитиве ын пунктул алес пентру алкэтуиря екуацилор диференциале але мишкэрий, аvem

$$F_x = -kmv_x = -km\dot{x}; \quad F_y = -kmv_y = -km\dot{y};$$

$$F_z = -mg - kmv_z = -mg - km\dot{z}.$$

Семнеле минус але проекцилор форцей де резистенцэ индикэ, кэ семнеле лор сынт опусе семнелор проекцилор витезей, пе каре ле-ам пресупус позитиве.

Пе база експрессиор (3) аvem урмэторул систем де екуаций диференциале але мишкэрий пунктулуй:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk\dot{x}; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mk\dot{y}; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg - mk\dot{z}. \quad (a)$$

Ын системул де координате алес кондицииле инициале сынт:

$$t=0, x=0, y=0, z=0, v_x=0; v_y=v_0 \cos \alpha, v_z=v_0 \sin \alpha. \quad (6)$$

Фиекаре екуацие дифференциалэ а системулуй (а) поате фи интегратэ индепендент де челелалте. Дупэ ымпэрциря амбелор пэрць але екуацийлор ла маса  $m$  системул де екуаций дифференциале есте

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x; \frac{dv_y}{dt} = -kv_y; \frac{dv_z}{dt} = -g - kv_z. \quad (в)$$

Сепарынд вариабилеле ши интегрынд фиекаре екуацие дин (в), обцинем

$$\ln v_x = -kt + \ln C_1; \quad \ln v_y = -kt + \ln C_2;$$

$$\ln \left( v_z + \frac{g}{k} \right) = -kt + \ln C_3,$$

сау

$$v_x = C_1 e^{-kt}; \quad v_y = C_2 e^{-kt}; \quad v_z = -\frac{g}{k} + C_3 e^{-kt}. \quad (г)$$

Субституинд ын (г) валориле проекцийлор  $v_x, v_y, v_z$  ын моментул  $t=0$ , обцинем екуацииле пентру детерминаря константелор арбитраре  $C_1, C_2, C_3$ :

$$0 = C_1; \quad v_0 \cos \alpha = C_2; \quad v_0 \sin \alpha = -\frac{g}{k} + C_3.$$

Пентру константеле арбитраре авем

$$C_1 = 0; \quad C_2 = v_0 \cos \alpha; \quad C_3 = \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha.$$

Субституинд валориле ачестор константе ын (г), яр проекциле витезелор прин деривателе координателор ын рапорт ку тимпул, обцинем

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kt}; \quad \frac{dz}{dt} = \left( \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

Дупэ сепараря вариабилелор ын (г) ши интеграря ачестор екуаций дифференциале де ординул ынтый, авем:

$$x = C_4; \quad y = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} e^{-kt} + C_5; \quad z = -\frac{1}{k} \left( \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} t + C_6. \quad (д)$$

Екуацииле пентру детерминаря константелор  $C_4, C_5, C_6$ , обцинуте ла субституиря кондицийлор инициале ын (д), сынт

$$0 = C_4; \quad 0 = -\frac{v_0 \cos \alpha}{k} + C_5; \quad 0 = -\frac{1}{k} \left( \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right) + C_6.$$



Де унде

$$C_4 = 0; C_5 = \frac{v_0 \cos \alpha}{k}; C_6 = \frac{1}{k} \left( \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right).$$

Ынтродукуынд ачесте валорь ын (д), обцинем

$$\left. \begin{aligned} x &= 0; y = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}), \\ z &= \frac{1}{k} \left( \frac{g}{k} + v_0 \sin \alpha \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Екуацииле (е) сынт екуацииле кэутате але мишкэрий пунктулуй. Сэ анализэм май амэнуницт мишкаря луй.

Дакэ ын екуацииле мишкэрий (е) тречем ла лимитэ пентру  $k \rightarrow 0$ , обцинем екуацииле мишкэрий пунктулуй мобил, асупра кэруя акционязэ нумай форца де греутате. Сэ нотэм прин  $x_1, y_1, z_1$  координателе куренте але пунктулуй ын ачест каз партикулар. Пентру а обцине  $x_1, y_1, z_1$  дин (е) есте нечесар сэ ридижэм недетерминаря дупэ регула луй Лопитал. Пентру  $y_1$  авем

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 \cos \alpha \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-kt}}{k} = v_0 \cos \alpha \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dk}(1 - e^{-kt})}{\frac{dk}{dk}} = \\ &= v_0 \cos \alpha \lim_{k \rightarrow 0} \frac{te^{-kt}}{1} = v_0 \cos \alpha t. \end{aligned}$$

Ынаинте де а трече ла лимитэ сэ скрием  $z$  асфел

$$z = \frac{g(1 - e^{-kt})}{k^2} + \frac{v_0 \sin \alpha (1 - e^{-kt}) - gt}{k}.$$

Резултэ

$$\begin{aligned} z_1 &= g \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2}{dk^2}(1 - e^{-kt})}{\frac{d^2}{dk^2}(k^2)} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dk}[v_0 \sin \alpha (1 - e^{-kt}) - gt]}{\frac{dk}{dk}} = \\ &= g \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-t^2 \cdot e^{-kt}}{2} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v_0 \sin \alpha \cdot e^{-kt} \cdot t}{1} = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t. \end{aligned}$$

Обцинем дефинитив урмэтоареле екуаций але мишкэрий пунктулуй материал:

$$x_1 = 0; y_1 = tv_0 \cos \alpha; z = tv_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Елиминынд тимпул  $t$  дин ачесте екуаций, обцинем екуация траекторией пунктулуй ын координате картезиене (фиг. 191).

$$x_1 = 0; z_1 = y_1 \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy_1^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (ж)$$

Траектория пунктулуй есте о параболэ, ситуатэ ын планул  $x_1 = 0$ .

Дакэ субституим ын (ж)  $z_1 = 0$ , валоаря координатей  $y_1$  детерминэ дистанца  $l$  дупэ оризонталэ. Пентру ачастэ дистанцэ авем

$$l = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3)$$

Дин формула (3) резултэ, кэ дистанца арункэрий дупэ оризонталэ есте максимэ пентру унгул де арункаре  $\alpha = 45^\circ$ :

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Тот дин формула (3) резултэ, кэ дистанца арункэрий дупэ оризонталэ  $l$  есте уна ши ачеш ла арункаря пунктулуй суб унгул  $\alpha$  (фацэ де оризонталэ сау ла арункаря ку о ачеш витезэ  $v_0$  суб унгул  $\alpha$  фацэ де вертикалэ).

## § 5. МИШКАРЯ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ СУПУС ЛА ЛЕГЭТУРЬ

Дупэ кум с'а менционат май сус, лежя де базэ а динамичий пентру пунктул материал супус ла легэтурь, прин урмаре, ши екуацииле диференциале але мишкэрий луй ау ачеш формэ ка ши пентру пунктул материал либер, дакэ ла форцеле, каре акциязэ асупра пунктулуй, адэугэм тоате реакциуниле легэтурилор. Е натурал, кэ ын ачест каз се ивеск партикуларитэць специфиче але резолвэрий примей ши челей де а доуа проблеме але динамичий, деоарече реакциуниле легэтурилор ну сынт куноскуте динаинте ши требуе детерминате суплиментар куноскынд легэтуриле ла каре е супус пунктул материал.

Ла резолваря примей проблеме де базэ а динамичий, куноскынд мишкаря пунктулуй ши апликынд екуацииле диференциале але мишкэрий, детерминэм форца резултантэ, каре акциязэ асупра ачестуй пункт. Дупэ ачеш, куноскынд легэтуриле, сепарэм реакциуниле лор дин ачастэ резултантэ. Астфел, проблема се редуче ла дескомпунеря форцей куноскуте ын компоненте.

Ын проблема а доуа а динамичий требуе детерминатэ мишкаря пунктулуй материал супус ла легэтурь, дакэ куноаштем форцеле ши кондицииле инициале. Спецификул казулуй де фацэ констэ ын ачеш, кэ о парте дин форцеле, каре акциязэ асупра пунктулуй, ши ануме, реакциуниле легэтурилор, ну сынт куноскуте динаинте ши требуе детерминате ын прочесул резолвэрий проблемей. Прин урмаре, проблема а доуа а динамичий пунктулуй материал супус ла легэтурь поате фи формулатэ астфел: куноскынд форцеле, кондицииле инициале ши легэтуриле, ла ка-

ре есте супус пунктул материал, сз се детермине мишкаря ачестуй пункт ши реакциуниле легэтурилор.

Вом студия резолваря ачестей проблеме ын казул мишкэрий унуй пункт пе о супрафацэ ши пе о линие курбэ. Екуацинле диференциале але мишкэрий се скриу ын системул де координате, каре кореспунде май мулт проблемей конкрете. Сз анализэм формуларя проблемей ши резолваря ей ын системул ректангулар де координате картезиене.

### Мишкаря пунктулуй пе о супрафацэ

Фие  $f(x, y, z) = 0$ , унде  $x, y$  ши  $z$  сынт координателе пунктулуй мобил, есте екуация уней супрафеце фиксе ши нетеде, пе каре се мишкэ пунктул ку маса  $m$  суб акциуня уней форце дате  $\vec{F}$ . Форца де фрекаре липсеште, деоарече супрафаца есте нетедэ. Нотынд прин  $\vec{N}$  реакциуня некуноскутэ, нормалэ а супрафейей, обцинем урмэтоареле екуаций диференциале але мишкэрий пунктулуй пе супрафацэ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N_x, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N_z. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ын жеометрия диференциалэ се демонстраээ, кэ косинусуриле унгюрилор динтре нормала екстериоарэ ла супрафацэ ши акселе де координате, деч ши косинусуриле унгюрилор динтре форца  $\vec{N}$ , паралелэ ку нормала принципалэ, ши акселе де координате, пот фи калкулате дупэ формулеле

$$\cos(\widehat{\vec{N}, x}) = \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \cos(\widehat{\vec{N}, y}) = \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \cos(\widehat{\vec{N}, z}) = \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z},$$

унде

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Астфел

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N \cos(\widehat{\vec{N}, x}) = \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ N_y &= N \cos(\widehat{\vec{N}, y}) = \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ N_z &= N \cos(\widehat{\vec{N}, z}) = \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Нотынд  $\lambda = \frac{N}{\Delta f}$  ши субституинд валориле мэримилор  $N_x, N_y, N_z$  дин (12) ын (11), о бцинем

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Ачесте екуаций дифференциале сынт нумите екуацииле дифференциале але луй Лагранж де жэнул ынтый лентру мишкаря унуй пункт материал супус ла легэтурь. Резолвынд ачесте трей екуаций дифференциале ши о екуацие финитэ — екуация супрафещей  $f(x, y, z) = 0$  обцинем патру некуноскуте, ши ануме координателе  $x, y, z$  але пунктулуй ши факторул недетерминат ал луй Лагранж  $\lambda$ , ка функций де тимп ши константеле арбитраре де интеграре. Константеле арбитраре се детерминэ дин кондицииле инициале дате.

Куноаштеря факторулуй недетерминат ал луй Лагранж  $\lambda$  дэ посибилитате де а афла модулул реакциуний супрафещей, егал ку  $N = \lambda \cdot \Delta f$  ши каре, ын жэнерал, депинде де тимп.

Дакэ супрафаца ну-й нетедэ, асупра пунктулуй супус ла легэтурь афарэ де форца нормалэ де реакциуне акционязэ ши форца де фрекаре  $F_{\max}$ , проекцииле кэрея требуе адэугате ын пэрииле дрепте але екуациилор дифференциале але мишкэрий. Ачаста компликэ резолваря проблемей, ынсэ еа рэмыне резолвабилэ ын принчипиу, деоарече де рынд ку адэугаря уней форце некуноскуте се адаугэ ши о екуацие финитэ, каре лягэ форца датэ ку реакциуня нормалэ:

$$F_{\max} = kN,$$

унде  $k$  есте коефициентул де фрекаре.

Форца де фрекаре де алунекаре есте ынтотдяуна опусэ витезей ши, прин урмаре, проекцииле ей пе акселе де координате пот фи репрезентате ын фелул urmэтор

$$F_{\max}^x = -F_{\max} \cdot \cos(\widehat{v, x}) = -F_{\max} \cdot \frac{v_x}{v} = -F_{\max} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

ши, аналог

$$F_{\max}^y = -F_{\max} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \quad F_{\max}^z = -F_{\max} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Презенца форцей де фрекаре де алунекаре компликэ интеграря екуациилор дифференциале але мишкэрий пунктулуй материал супус ла легэтурь.

Линия курбэ фиксэ ын спациу поате фи консидератэ ка о линии де интерсекции а доуэ супрафеце  $f_1(x, y, z)=0$  ши  $f_2(x, y, z)=0$ . Дин партя ачестор доуэ супрафеце асупра пунктулуй мобил акцияээ доуэ реакциунь нормале  $\bar{N}_1$  ши  $\bar{N}_2$ . Прин ур-маре, реакциуня тоталэ а линейей курбе есте

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2.$$

Екуацииле диференциале але луй Лагранж де специа ынтий пентру мишкарят пунктулуй пе линия курбэ сынт

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

унде

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}; \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}; \quad \Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2};$$

$$\Delta f_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.$$

Трей екуаций диференциале але луй Лагранж де специа ынтий (13) ши доуэ екуаций фините але супрафецелор  $f_1(x, y, z)=0$  ши  $f_2(x, y, z)=0$  репрезентэ ун систем де чинч екуаций пентру детерминаря а чинч мэримь  $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$  ка функций де тимп. Астфел проблема лусэ поате фи резолватэ ши ын ачест каз. Проблема есте резолвабилэ ын принципиу ши атунч, кынд асупра пунктулуй мобил акцияээ ши форца де фрекаре.

Дакэ ла резолваря ачестей проблеме, алежем системул натурал де координате, екуацииле диференциале але мишкэрий пунктулуй пе о курбэ нетедэ сынт

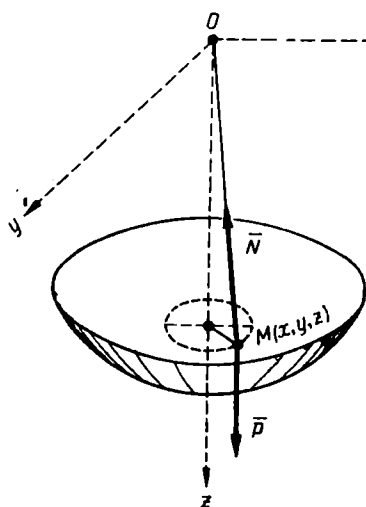
$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= F_{\tau}, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

унде  $F_{\tau}$  есте проекция форцей  $\bar{F}$  пе тангентэ,  $F_n$  ши  $N_n$  — проекцииле форцелор пе нормала принципалэ,  $F_b$  ши  $N_b$  — проекцииле форцелор пе бинормалэ,  $\rho$  — раза де курбурэ а линейей.

Резолвынд прима екуацие дин системул де екуаций диференциале (14) индепендент де челелалте доуэ екуаций, обцинем лежя мишкэрий пунктулуй, адикэ ши витеза луй  $v$ . Дупэ ачаста

резолваря екуацилор а доуа ши а трея дин системул (14) дэ посибилитатя де а детермина проекциле реакциуний нормале  $\bar{N}$  респектив пе нормала принчипалэ ши пе бинормалэ.

*Екземплу.* Ун пункт материал ку маса  $m$  се мишкэ суб акциуня форцей де греутатэ пе партя интериорэ а уней супра-



Фиг. 192.

феце сфериче де разэ  $R$  ын вечинэтатя позицией де екилибру стабил (фиг. 192). Ын моментул инициал  $t=0$ ,  $x=x_0$ ,  $y=0$ ,  $v_x=0$ ,  $v_y=v_0$ . Акса  $Oz$  есте ориентатэ вертикал ын жос, яр акселе  $Ox$  ши  $Oy$  сынт ситуате ын планул оризонтал. Орижиня де координате есте луатэ ын чентрул сферей. Сэ се детермине мишкаря пунктулуй ши форца де реакциуне, каре акционяэ асупра пунктулуй дин партя сферей. Ачастэ проблемэ есте куноскутэ суб нумиря де проблемэ деспре пендулул сферик.

Резолваре. Екуациле диференциале але мишкэрий пунктулуй пе супрафаца сферей сынт

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

унде

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f}.$$

Ла екуациле диференциале (а) требуе сэ адэугэм екуация супрафэцей сфериче:

$$f(x, y, z) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Де унде резултэ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z;$$

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R,$$

деоарече

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R.$$

Субституинд валориле луй  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ын екуацииле (а) авем

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= -2\lambda y, \\ m\ddot{z} &= mg - 2\lambda z. \end{aligned} \right\} \quad (a')$$

Сэ резолвэм системул де екуаций (а'). Ын ачест скоп ексcludем май ынтый некуноскута  $\lambda$ , деоарече деривателе ей ну фигурызэ ын (а'). Вом обцине солуция апроксимативэ а системулуй де екуаций, деоарече ел есте пря компликат пентру а путя фи интеграт екзакт. Пентру ачаста мэримиле  $\frac{x}{R}$  ши  $\frac{y}{R}$  се яу ку експонентул уну, неглижынд патрателе лор ын експресия пентру  $z$ :

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Ын урма дескомпунерий ачестей експресий дупэ формула биномулуй авем

$$z = R \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} = R \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{1/2} \approx R \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right) \approx R.$$

Субституинд  $z = R$  ши  $\ddot{z} = 0$  ын екуация а трея а системулуй (а'), обцинем

$$mg - 2\lambda R = 0; \quad \lambda = \frac{mg}{2R},$$

адикэ

$$N = \lambda \Delta f = mg.$$

Дупэ субституиря луй  $\lambda$  ын примеле доуэ екуаций але системулуй (а') обцинем

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x; \quad \ddot{y} = -\frac{g}{R}y$$

сау

$$\ddot{x} + \frac{g}{R}x = 0; \quad \ddot{y} + \frac{g}{R}y = 0.$$

Солуцииле ачестор екуаций диференциале (§ 4, екземплул 1)

депинд фиекаре ын парте де доуэ константе де интеграре ши пот фи пусе суб форма

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \sin \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t + C_2 \right), \\ y &= C_3 \sin \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t + C_4 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Дупэ дериваря ын рапорт ку тимпул авем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \sqrt{\frac{g}{R}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t + C_2 \right), \\ \dot{y} &= C_3 \sqrt{\frac{g}{R}} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t + C_4 \right). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Апликынд кондициле инициале дин (б) ши (в), обцинем урмэ-тоареле екуаций пентру детерминаря константелор  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  ши  $C_4$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \sin C_2, \\ 0 &= C_1 \sin C_4, \\ 0 &= C_1 \sqrt{\frac{g}{R}} \cos C_2, \\ v_0 &= C_3 \sqrt{\frac{g}{R}} \cos C_4. \end{aligned}$$

Дин екуациле а доуа ши а трея але ачестуй систем резултэ, кэ  $C_4 = 0$  ши  $C_2 = \frac{\pi}{2}$ . Субституинд валориле лор ын прима ши а патра екуацие, обцинем

$$C_1 = x_0; \quad C_3 = v_0 \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Астфел екуациле мишкэрий ын апроксимация консидератэ сынт

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sin \sqrt{\frac{g}{R}} t, \\ y &= \sqrt{\frac{R}{g}} v_0 \cos \sqrt{\frac{g}{R}} t, \\ z &= R. \end{aligned}$$



Ексклудем тимпул  $t$  дин екуацииле мишкэрий ши обцинем екуация траекторией ын координате картезиене

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{Rv_0^2} = 1,$$

$$z = R,$$

адикэ траектория пунктулуй ын апроксимация консидератэ есте о елипсэ, ситуатэ ын планул  $z=R$  ши ку чентрул пе акса  $Oz$ . Системул  $(a')$  ну есте интеграл абстракцие фэкынд де термений де градул ынтый  $\frac{x}{R}$  ши  $\frac{y}{R}$ , деоарече с'а луат суплиментар  $\ddot{z}=0$ . Луынд солуция обцинутэ май сус дрепт прима апроксимацие ши интегрынд системул  $(a')$ , абстракцие фэкынд де термений суснумиць, вом кэпэта ын локул елипсей о курбэ, каре ну есте ынкисэ, прима спирэ а ей фиинд апроксиматив о елипсэ. Мишкаря пе ачастэ курбэ поате фи обцинутэ ла ротация униформэ ку о витезэ детерминатэ а елипсей де май сус ын дирекция мишкэрий пунктулуй\*.

---

\* Везь «Собрание трудов академика А. Н. Крылова, вып. III, математика, ч. I, Издание АН СССР, 1949, паж. 333».

---

**ДИНАМИКА МИШКЭРИЙ РЕЛАТИВЕ А ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ****§ 1. ЕКУАЦИИЛЕ ДИНАМИЧЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ РЕЛАТИВЕ А ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ**

Ын чинематикэ с'а демонстрат, кэ карактерул мишкэрий обсервате а пунктулуй сау а корпусул депинде де старя чинематикэ а системулуй де реферинцэ, ын рапорт ку каре се студиязэ мишкаря датэ. Мишкаря пунктулуй материал суб акциуны унор форце оарекаре се презинтэ диферит пентру обсерваторул, легат ку системул де реферинцэ фикс, ши пентру обсерваторул, легат ку системул де реферинцэ, каре аре о мишкаре де транспорт фацэ де системул фикс. Ын ачесте системе де реферинцэ тоате карактеристичиле чинематиче але пунктулуй, ын партикулар ши акчелерация, сынт диферите. Ын ачелаш тимп мишкэриле релативе жоакэ ун рол импортант: де екземплу, ын теория зборурилоу космиче се ефектуязэ калкуле фоарте компlicate але траекториилоу апарателор де збор коомиче ын рапорт ку системеле мобиле де координате, легате ку планетеле.

Методеле динамичий, креате пе база лежилор луй Ньютон, презинтэ ун апарат математик симплу ши комод пентру студия мишкэрий пунктулуй материал ын системул де координате фикс. Ачесте методе пот фи трансферате ши ла студия мишкэрилоу релативе. Диференца динтре мишкаря релативэ ши чя абсолютэ а пунктулуй констэ ын ачея, кэ акчелерация релативэ ши чя абсолютэ а пунктулуй сынт диферите, релация динтре дынселе фиинд детерминатэ де теорема чинематикэ а луй Кориолис. Ын фонд, деосебиря ачаста есте каузатэ де мишкаря де транспорт а системулуй де реферинцэ мобил, фапт, даторитэ кэруя обсерваторул легат ку ачест систем ышь скимбэ позиция са фацэ де системул де реферинцэ фикс.

Е натурал сэ пресупунем, кэ ачастэ диференца динтре акчелераций ын системул де реферинцэ мобил се наште даторитэ акциуний унор форце суплиментаре, афарэ де форцеле, каре акционязэ асупра пунктулуй консидерат дин партя алтор пункте материалае ши корпусь. Ачаста ынсямнэ, кэ лежиле луй Ньютон пот фи апликате ши ла ачесте форце, адикэ лежя а доуа а луй Ньютон поате фи екстинсэ, фиинд трансфератэ асупра мишкэрилоу релативе. Путем, деч, консидера, фэрэ а скимба прочесул адевэрат ал феноменулуй студият, кэ продусул динтре маса пунктулуй ши акчелерация релативэ а луй есте егал ку резултанта форцелор, акциуны кэроуа комуникэ пунктулуй о мишкаре релативэ. Пентру а стабиле карактерул ачестор форце ши рапортул лор ла форцеле, апликате де фапт пунктулуй, се пот

фолоси релацииле динтре карактеристичиле чинематиче ын мишкаря абсолутэ ши ын чя релативэ.

Сэ дедучем екуацииле динамиче дифференциале але мишкэрий пунктулуй ын рапорт ку ун систем мобил де координате. Сэ консидерэм ын ачест скоп мишкаря унуй пункт материал  $B$  ку маса  $m$  пе о траекторие ын системул де координате мобил  $Ox'y'z'$ , каре се мишкэ арбитрар фацэ де системул фикс  $Oxyz$ .

Позиция ачестуй пункт пе траекторие фацэ де системул мобил, адикэ ын мишкаря релативэ, есте детерминатэ прин раза вектоаре  $\bar{R}_r$ , пунктул авынды витеза релативэ  $\bar{v}$ , ши акчелерация релативэ  $\bar{a}_r$ .

Нотэм прин векторул  $\bar{F}$  резултанта тутурор форцелор апликате немижлочит пунктулуй материал дат  $B$ . Ачестэ форцэ комуникэ пунктулуй акчелерация абсолутэ ын системул де координатэ фикс, прин урмаре, апликынды аксиома а доуа а динамичий, путем скрие урмэтоаря екуацие динамикэ ын формэ векториалэ

$$\bar{F} = m\bar{a}_{abs}. \quad (1)$$

Акум апликэм теорема чинематикэ а луй Кориолис деспре компунеря акчелерациилор ши репрезентэм векторул акчелерацией абсолуте а пунктулуй ка сума жеометрикэ а векторилов акчелерациилор релативэ, де транспорт ши а луй Кориолис:

$$\bar{a}_{abs} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k. \quad (2)$$

Ынтродукинды ачестэ експрессие ын локул луй  $a_{abs}$  дин (1), авем

$$F = m\bar{a}_e + m\bar{a}_r + m\bar{a}_k, \quad (3)$$

де унде, експримынды  $m\bar{a}_r$  прин чейлалць термень дин (3), обцинем

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_k). \quad (4)$$

Консидерынды партя дряптэ а егалитэций (4), путем траже конклузия, кэ форца, каре акционяээ асупра пунктулуй, комуникынду-й акчелерация релативэ, констэ дин трей форце: форца  $\bar{F}$ , апликатэ пунктулуй дат, ши доуэ форце суплиментаре, каре се обсервэ нумай ын системул де реферинцэ мобил. Уна дин ачесте форце есте нумитэ форцэ де инерция ын мишкаря де транспорт ши се нотяээ прин  $\bar{F}_e$ :

$$\bar{F}_e = -m\bar{a}_e. \quad (5)$$

Форца де инерция ын мишкаря де транспорт а пунктулуй ла мишкаря релативэ а луй есте ындрептатэ ын сенс опус вектору-

луй акчелерацией де транспорт а пунктулуй ши есте егалэ нумерик ку продукул масей пунктулуй прин модулул акчелерацией де транспорт а ачестуй пункт.

Чялалтэ форцэ се нотязэ прин  $\bar{F}_k$  ши се нумеште форца де инерции а луй Кориолис. Экспрессия векториалэ а ачестей форце есте

$$\bar{F}_k = -m\bar{a}_k. \quad (6)$$

Форца де инерции а луй Кориолис есте ындрептатэ ын сенс директ опус акчелерацией луй Кориолис а пунктулуй ши есте егалэ нумерик ку продукул масей пунктулуй прин модулул акчелерацией луй Кориолис.

Экспрессии (5) ши (6) пермит а пуне релация (4) суб форма

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_e + \bar{F}_k. \quad (7)$$

Экспримынд акчелерация релативэ прин деривата а доуа локалэ а векторулуй  $\bar{R}_r$ , обцинем екуация

$$m \left( \frac{d^2 \bar{R}_r}{dt^2} \right)_r = \bar{F} + \bar{F}_e + \bar{F}_k. \quad (7')$$

Екуация (7') експримэ теорема динамикэ а луй Кориолис, каре поате фи формулатэ ын фелул урмэтор: *мишкаря релативэ а пунктулуй материал аре лок ку нумай суб акциуня форцей проприу-зисе  $\bar{F}$ , чи ши суб акциуня форцей де инерции ын мишкаря де транспорт  $\bar{F}_e$  ши а форцей де инерции а луй Кориолис  $\bar{F}_k$ .*

Проектынд амбеле мэрць але егалитэций (7') пе акселе де координате мобиле, обцинем екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий релативе а пунктулуй материал.

## § 2. КАЗУРЬ ПАРТИКУЛАРЕ АЛЕ ТЕОРЕМЕЙ ДИНАМИЧЕ А ЛУЙ КОРИОЛИС

Пресупунем, кэ мишкаря де транспорт а системулуй де координате мобил есте о трансляция, адикэ  $\bar{\omega}_e = 0$ . Атунч

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) \equiv 0 \text{ ши } \bar{F}_k = -m\bar{a}_k \equiv 0,$$

прин урмаре,

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_e,$$

адикэ, пунктул партичипэ ын мишкаря релативэ нумай суб ак-

циуня а доуэ форце: форца проприу-зисэ, апликацэ ачестуй пункт, ши форца де инерции ын мишкаря де транспорт.

Дакэ май пресупунем кэ акселе системулуй де координате мобил се мишкэ ректилиниу ши униформ, фиинд паралеле ку акселе системулуй де координате фикс, атунч проекцииле форцей  $F$  пе акселе фиекэруй систем де координате сынт егале, яр форца де инерции ын мишкаря де транспорт е нулэ. Резултэ, кэ екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий пунктулуй сынт ачеляшь ын ачесте доуэ системе де координате.

Сэ не ынкипуим ун обсерватор, каре се афлэ ынтр'о ынкэ-пере ынкисэ, че се мишкэ ректилиниу ши униформ. Ел ну есте супс акциуний форцей де инерции ын мишкаря де транспорт ши а форцей де инерции а луй Кориолис ши ну поате сэ стабилискэ позиция са ын рапорт ку алте системе де реферинцэ. Деачея обсерваторул ну поате детермина, дакэ системул сэу (ынкэперя) се афлэ ын репаус сау се мишкэ ын виртуця инерцией ынтр'ун сенс оарекаре. Дин ачастэ каузэ аша системе де координате сынт нумите *инерциале*.

Аша дар, се пот нуми системе инерциале де координате астфел де системе, ын рапорт ку каре корпул материал поате обцине акчелерации нумай ка резултат ал акциуний алтор корпурь асупра луй, ши ну ка резултат ал мишкэрий системулуй де координате. Пе де алтэ парте, системул инерциал де координате поате фи детерминат ка ун астфел де систем мобил, ын рапорт ку каре екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий ау ачеляш формэ ка ши ын рапорт ку системул де координате фикс, адикэ фэрэ а луа ын консидации форца де инерции ын мишкаря де транспорт ши форца де инерции а луй Кориолис. Ачеста есте концинутул принципиулуй релативитэций ал луй Галилей—Ньютон дин механика класикэ.

Требуе сэ авем ын ведере, кэ ну тоате феноменеле механиче декурт ла фел ын системеле инерциале. Пунктул материал, асупра кэруя акционязэ о форцэ оарекаре, аре уна ши ачеляш акчелерации ын тоате системеле инерциале. Дар координателе ши витеза луй, прин урмаре ши траектория луй, пот фи диферите, деоарече еле депинд де кондицииле инициале але пунктулуй ын системул де координате консидаат; де екземплу, ын чинематика мишкэрилор компусе траектория уней греутэць, арункате дин авион, есте диферитэ ын системул де координате мобил ши ын чел фикс.

Сэ стабилим кондицииле, ын каре акчелерация релативэ а пунктулуй е нулэ ( $\bar{a}_r = 0$ ), адикэ кондицииле, ын каре пунктул се мишкэ ректилиниу ши униформ фацэ де системул де координате мобил ку о витезэ релативэ константэ ( $\bar{v}_r = \text{const}$ ) кыт ши кондицииле кынд аре лок казул партикулар  $\bar{v}_r = 0$ , адикэ пунктул се афлэ ын репаус фацэ де системул де реферинцэ

мобил. Сэ субституим  $\bar{a}_r = 0$  ын екуация (7). Вом обцине релация

$$\bar{F} + \bar{F}_e + \bar{F}_k = 0. \quad (8)$$

Екуация (8) експримэ токмай кондиция мишкэрий ректилиний ши униформе а пунктулуй ын системул де координате мобил, каре ефектуязэ о мишкаре де транспорт.

Пентру а стабили кондиция екилибрулуй релатив ал пунктулуй, адикэ кондиция ка пунктул материал, ашезат фэрэ витезэ инициалэ ынтр'о позиции оарекаре фацэ де системул де координате мобил, сэ континуе сэ рэмынэ ын ачастэ позиции, есте нечесар сэ консидерэм нулэ форца де инерции а луй Кориолис дин екуация (8), деоарече  $\bar{v}_r = 0$  ши форца луй Кориолис е нулэ. Астфел дин екуация (8) обцинем

$$\bar{F}_e + \bar{F} = 0, \quad (9)$$

чея че се поате формула ын фелул урмэтор: *пентру ка ун пункт материал сэ се афле ын екилибру релатив ын системул де координате мобил есте нечесар ши суфициент ка форца апликацэ проприу-зис пунктулуй консидерат ши форца де инерции ын мишкаря де транспорт сэ се екилибрезе речинрок.*

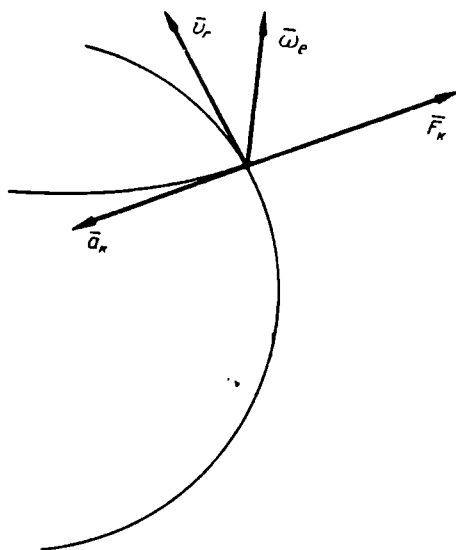
### § 3. ЕКЗЕМПЛЕ ДЕ АПЛИКАЦИЙ АЛЕ ТЕОРЕМЕЙ ДИНАМИЧЕ А ЛУЙ КОРИОЛИС

Унуй обсерватор, каре студиязэ мишкаря релативэ а пунктулуй материал ын рапорт ку системул де координате мобил, форца де инерции ын мишкаря де транспорт ши форца де инерции а луй Кориолис и се презинтэ ка форце реале. Ачесте форце пот кауза мишкаря релативэ акчелератэ а пунктулуй материал либер, каре ну есте супус реакциуний дин партя корпурилол материала, ку каре есте легат системул де координате мобил. Де екземплу, форца де инерции а луй Кориолис абате спре рэсэрит корпуриле, каре кад спре Пэмынт.

Дакэ пунктул материал се мишкэ пе о супрафацэ сау пе о линии мобилэ, атунч форца де инерции ын мишкаря де транспорт ши форца де инерции а луй Кориолис се манифестэ прин пресиуня пунктулуй пе ачастэ супрафацэ сау линии. Де екземплу, пресиуня мэритэ асупра шиней дин дряпта ын емисфера нордикэ: роадеря малурилол дрепте але рыурилол дин емисфера нордикэ (лежя луй Бер).

Сэ консидерэм ун трен, каре се мишкэ ку витеза  $\bar{v}_r$  ын емисфера нордикэ ын дирекция меридионалэ де ла суд спре норд (фиг. 193). Пэмынтул се ротеште де ла Асфинцит спре Рэсэрит ши деч витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_e$  есте ындрептатэ дупэ акса

Пэмынтулуй де ла полул суд спре полул норд (ын системул де координате дрепт). Акчелерация луй Кориолис пентру о астфел де ашезаре а векторилор  $\vec{v}$ , ши  $\vec{\omega}_e$  есте ындрептатэ спре Асфинцит дупэ танжента ла паралелэ, адикэ спре стынга, дакэ привим ын сенсул мишкэрий тренулуй. Пресиуня тренулуй асупра шиней, кондиционатэ де форца де инерцие а луй Кориолис, есте ориентатэ ын сенс опус, адикэ акцияээ асупра шиней дин дряпта. Дакэ тренул се мишкэ де ла норд спре суд, акчелерация луй Кориолис  $\vec{a}_k$  есте ындрептатэ спре Рэсэрит, адикэ ын стынга дупэ мишкаря тренулуй, яр пресиуня се трансмите асупра шиней дрепте дупэ мерсул тренулуй. Ка урмаре, шинеле дрепте але кэилор ферате ку доуэ шине дин емисфера нордикэ се узяээ май репедэ декыт шинеле стынжь.



Фиг. 193.

Ын мод аналог, акцияня форцей де инерцие а луй Кориолис кондицияээ роадеря малурилор дрепте але рыурилор дин емисфера нордикэ (лежя луй Бер), каре кург дупэ меридиан. Ын емисфера судикэ, димпотривэ, сэ узяээ май репедэ шинеле стынжь ши се род малуриле стынжь але рыурилор.

Акцияня форцей де инерцие а луй Кориолис ын мишкаря релативэ кондицияээ де асеменя ши фаптул, кэ ын емисфера нордикэ вынтуриле де норд ау тендинца де а се трансформа ын вынтурь де рэсэрит. Астфел се експликэ вынтуриле ализее де норд-ест ын емисфера нордикэ.

Ын анул 1857 савантул франчез Фуко а стабилит пе кале експерименталэ, кэ ротация фацэ де Пэмынт а планулуй ын каре осциляээ пендулул, се датореште форцей де инерцие а луй Кориолис, каре я наштере ын урма ротацией Пэмынтулуй ын журул аксей сале.

#### § 4. ИМПОНДЕРАБИЛИТАТЯ

Теорема динамикэ а луй Кориолис пермите экзаминаря стэрий де импондерабилитате ын зборуриле космиче. Сэ студием импондерабилитатя унуй пункт материал. Прин импондерабили-

тате а пунктулуй материал ынтр'ун оарекаре систем де координате ынцележем липса пресиуний ачестуй пункт асупра корпурилор, каре се афлэ ын репаус фацэ де системул де координате консидерат. Ын партикулар, пунктул материал импондерабил ну апасэ асупра талерулуй баланцей, каре се афлэ ын репаус фацэ де системул де координате консидерат. Импондерабилитатя се обсервэ атунч, кынд форца де реакциуне дин партя орькэруй корп, каре се афлэ ын репаус ын системул де координате консидерат ши ку каре се атинже пунктул материал фикс дат, есте нулэ, деоарече пресиуня пунктулуй асупра корпулуй есте егалэ ку реакциуня ачестуй корп асупра пунктулуй.

Сэ студиём импондерабилитатя пунктулуй материал ын системул де координате мобил ши неинерциал, каре есте легат рижид ку ун корп либер, че се мишкэ суб акциуня форцей де атракцие а Пэмынтулуй. Ун астфел де корп поате фи сателитул артифичнал ал Пэмынтулуй, каре се афлэ ын афара атмосфрей.

Феноменул импондерабилитэций требуе консидерат пентру ун пункт материал, каре се афлэ ын екилибру релатив, кынд витеза ши акчелерация луй ын мишкаря релативэ сынт нуле. Кондиция екилибрулуй релатив есте

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_e = 0,$$

унде  $\bar{F} = m\bar{g}$  есте форца ку каре Пэмынтул атраже пунктул,

$\bar{N}$  — форца де реакциуне а сателитулуй сау а унуй корп оарекаре фикс дин ачест сателит,

$\bar{F}_e = -m\bar{a}_e$  — форца де инерцие ын мишкаря де транспорт.

Дин кондиция екилибрулуй релатив резултэ

$$-\bar{N} = \bar{F} + \bar{F}_e.$$

Ын казул импондерабилитэций  $\bar{N} = 0$  ши

$$\bar{F} + \bar{F}_e = 0.$$

Прин урмаре, импондерабилитатя се обсервэ, дакэ

$$\bar{F} = -\bar{F}_e = m\bar{a}_e,$$

адикэ атунч, кынд акчелерация де транспорт а пунктулуй  $\bar{a}_e$  есте егалэ ку акчелерация кэдериый либере  $\bar{g}$ . Ачестэ кондиция аре лок пентру пунктул материал, ситуат ын центрул маселор сателитулуй, деоарече центрул маселор се мишкэ нумай суб акциуня форцей екстерноаре де атракцие а Пэмынтулуй. Акчелерация луй есте егалэ ку  $\bar{g}$ , фиинд ын ачелаш тимп ши ак-

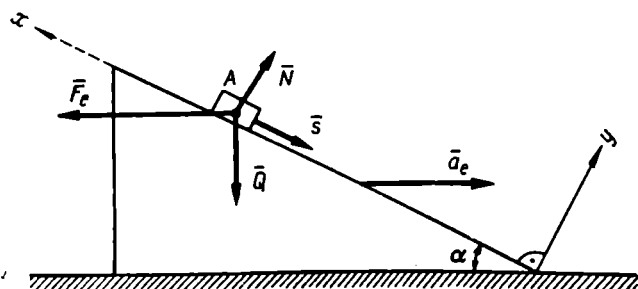


челерация де транспорт а пунктулуй материал. Дакэ пунктул материал ну се гэсеште ын чентрул маселор, акчелерация де транспорт а пунктулуй диферэ де акчелерация чентрулуй маселор даторитэ мишкэрий де ротация а сателитулуй, аша кэ пунктул материал ну есте импондерабил. Дакэ мишкаря сателитулуй есте мишкаре де трансляция, пунктул материал есте импондерабил ын орьче пункт ал сателитулуй.

*Екземплу.* Сэ се детермине акчелерация мишкэрий ректильный а уней призме триунгуларе пе ун план оризонтал, кынд ун корп ку греутатя  $Q$ , ситуат пе фаца латералэ а призмей, ну се мишкэ пе еа. Фрекаря есте неглижабилэ. Фаца латералэ а призмей формязэ ку оризонтул унгул  $\alpha$ .

*Резолваре.* Корпул се афлэ ын екилибру фацэ де призма, каре се мишкэ ку о акчелерация оарекаре. Системул де координате мобил есте легат ку призма. Кондиция екилибрулуй корпулуй фацэ де призмэ есте урмэтоаря: сума жеометрике а форцелор, каре акциянэ асупра корпулуй, ши а форцей де инерция ын мишкаря де транспорт есте нулэ.

Ын казул дат путем пресупуне, кэ мишкаря корпулуй пе фаца латералэ а призмей поате фи нумай де трансляция ши, прин урмаре, системул де форце, каре акциянэ асупра корпулуй, есте ун систем де форце конкуренте ку орижина ын чентрул де греутате ал корпулуй.



Фиг. 194.

Асупра корпулуй акциянэ форца де греутате  $\bar{Q}$  ши реакция нормалэ  $\bar{N}$  а планулуй нетед. Форца де инерция ын мишкаря де транспорт есте ындрептатэ спре стынга, дакэ кон siderэзм акчелерация призмей ындрептатэ спре дряпта (фиг. 194).

Компунем екуация, каре експримэ кондиция де екилибру а форцелор:

$$\bar{Q} + \bar{N} + \bar{F}_e = 0.$$

Егалэм ку zero сума проекциилор тутурэр форцелор пе акса мобилэ  $x$ , ындрептатэ спре стынга

$$Q_x + N_x + F_{ex} = 0; \quad N_x \equiv 0, \quad Q_x = -Q \sin \alpha,$$

$$F_{ex} = M | \bar{a}_e | \cos \alpha = \frac{Q}{g} a \cos \alpha.$$

Компунем екуация

$$-Q \sin \alpha + \frac{Q}{g} a_e \cos \alpha = 0,$$

де унде резултэ

$$a_e = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Се рекомандэ сэ резолвэм ачастэ проблемэ цинынд конт де фрекаря динтре корп ши планул призмей, коэффициентул де фрекаре фиинд егал ку  $f$ .

---

## ЖЕОМЕТРИЯ МАСЕЛОР

## § 1. ЧЕНТРУЛ МАСЕЛОР СИСТЕМУЛУЙ

Се нумеште систем механик де пукте материале тоталитатя: ачестор пукте материале.

Се деосебеск системе вариабиле ши инвариабиле де пукте-материале. Системул се нумеште инвариабил, дакэ дистанца динтре оарекаре доуэ пукте але луй рэмыне константэ ын тот тимпул мишкэрий, де екземплу, рижидул. Дакэ ын тимпул мишкэрий дистанца динтре доуэ пукте але системулуй вариазэ, системул есте нумит вариабил, де екземплу, корпуриле де-формабиле.

Сэ консидерэм ун систем де пукте материале  $B_1, B_2, \dots, B_N$ . Нотэм маселе ачестор пукте кореспунзэтор прин  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Позициле пуктелор ын рапорт ку системул де координате хуз се карактеризязэ ку

разеле вектоаре  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ . Се нумеште масэ а системулуй сума маселор тутурор пуктелор системулуй  $M = \sum m_k$  (фиг. 195).

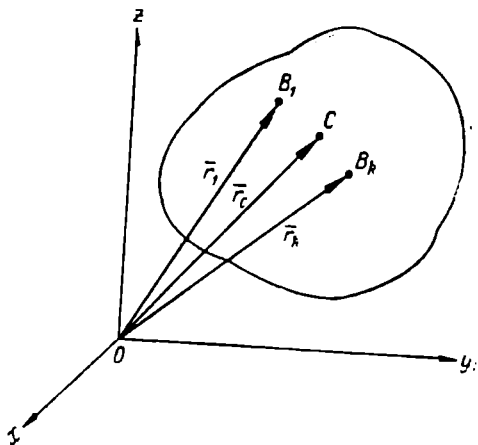
Ун рол импортант ла резолваря проблемелор динамичий ыл жоакэ пуктул жеометрик  $C$ , нумит *центрул маселор системулуй*, позиция луй фининд детерминатэ де раза вектоаре  $\vec{r}_C$ , каре се калкулязэ дупэ формула

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}. \quad (1)$$

Проектынд амбеле пэрць але егалитэций (1) пе акселе де координате, обцинем формулеле пентру координателе центрулуй маселор системулуй

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (2)$$

Чентрул маселор системулуй, конституит динтр'ун сингур пункт материал коинчиде ку ачест пункт.



Фиг. 195.

Ын казул системулуй формат дин доуэ пункте  $B_1$  ши  $B_2$  дин формулеле (2) авем

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad y_C = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad z_C = \frac{z_1 + \frac{m_2}{m_1} z_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Чентрул маселор системулуй алкэтуит дин доуэ пункте  $B_1$  ши  $B_2$  есте ситуат пе сегментул  $B_1 B_2$  ши ымпарте ачест сегмент ын лэрць инверс пропорционале ку маселе пунктелор.

Фие системул се афлэ ла супрафаца Пэмынтулуй. Ынмулцинд нумэрэторул ши нумиторул пэрсый дрепте а формулей (1) ку акчелерация кэдэрий либере  $g$ , обцинем урмэтоаря експрессие пентру  $\bar{r}_C$ :

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{Mg} = \frac{\sum P_k \bar{r}_k}{P},$$

унде  $P_k = m_k g$  есте греутатя пунктулуй ку маса  $m_k$ , яр  $P$  — греутатя корпулуй.

Ла супрафаца Пэмынтулуй чентрул маселор системулуй коинчиде ку чентрул луй де греутате. Ноциуня де чентрул маселор системулуй есте май жёнералэ декыт чентрул де греутате. Чентрул маселор системулуй екзистэ ши ын казул, кынд системул де пункте материала се афлэ ын екстериорул кымпулуй гравитационал ал Пэмынтулуй.

Дин формулеле (1) ши (2) авем

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C, \quad \sum m_k x_k = M x_C, \quad \sum m_k y_k = M y_C, \quad \sum m_k z_k = M z_C.$$

Мэримя  $\sum m_k \bar{r}_k$  се нумеште моментул статик ал масей системулуй ын рапорт ку полул  $O$ ; мэримиле  $\sum m_k x_k$ ,  $\sum m_k y_k$ ,  $\sum m_k z_k$  сынт моментеле статиче але масей системулуй ын рапорт ку планеле  $yOz$ ,  $xOz$ ,  $xOy$ .

Сэ луэм ын калитате де пол чентрул маселор системулуй  $C$  ши сэ нотэм прин  $\bar{\rho}_k$  раза вектоаре а пунктулуй ку маса  $m_k$ , дусэ дин полул  $C$ .

Пентру моментул статик ал масей системулуй ын рапорт ку чентрул маселор авем:

$$\sum m_k \bar{\rho}_k = M \cdot \bar{\rho}_C = 0,$$

деоарече  $\bar{\rho}_C = 0$ , адикэ моментул статик ал масей системулуй ын рапорт ку чентрул маселор есте нул.

Моментул статик ал масей системулуй ын рапорт ку орьче план, каре трече прин чентрул маселор, де асеменя есте нул.

## § 2. МОМЕНТЕ ДЕ ИНЕРЦИИ

### Дефиниции ши формуле женерале

Резолвынд унеле проблеме але динамичий системулуй, детерминэм мэримь динамиче, каре се експримэ прин сумеле продуселор динтре маселе пунктелор системулуй ши патрателе дистанцелор ачестор пункте де ла акса, пункте сау плане. Есте евидент, кэ ачесте суме карактеризязэ дистрибуция маселор системулуй ын рапорт ку акса, пунктул сау планул консидерат ши жоакэ ун рол дестул де импортант ын динамика системулуй. Ачесте суме сынт нумите *моменте де инерции* ын рапорт ку о аксэ, ун пункт сау ун план.

Моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку о аксэ (моментул де инерции аксиал) се нотязэ прин  $J$ , ынсоцит де индичеле аксей, ын рапорт ку каре есте консидерат ачест момент де инерции.

Астфел, моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку акса  $z$  есте

$$J_z = \sum m_k r_k^2,$$

унде  $m_k$  есте маса пунктулуй системулуй, яр  $r_k$  — дистанца ачестуї пункт де ла акса  $z$ .

Ын мод аналог се детерминэ ши се нотязэ моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку ун пункт сау ку ун план оарекаре. Де екземплу, моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку пунктул  $O$  (моментул де инерции полар) есте

$$J_O = \sum m_k r_k^2,$$

яр моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку планул  $xOy$

$$J_{xOy} = \sum m_k z_k^2.$$

Унитэциле де мэсурэ але моментулуй де инерции ын системул техник де унитэць сынт:

$$[J] = 1 \text{ кгм} \cdot \text{сек}^2;$$

ын системул ЧГС

$$[J] = 1 \text{ гсм}^2;$$

яр ын Системул Интернационал де унитэць (СИ)

$$[J] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Моментул де инерции ал унуй корп солид ын рапорт ку о аксэ оарекаре есте лимита сумей продуселор динтре маселе елементаре але корпулуй ши патрателе дистанцелор кореспун-

ээтоаре де ла ачасть аксэ, кынд фиекаре элемент ал корпулуй тинде кэтре зеро, адикэ

$$J_z = \lim_{\Delta m_k \rightarrow 0} \sum r_k^2 \Delta m_k \text{ сау } J_z = \int_{(M)} r^2 dm.$$

Ачасть интегралэ есте екстинсэ асупра масей ынтрегулуй корп, адикэ лимителе интегрэрий се стабилиеск астьфел, ынкыт орьче масэ элементарэ се ынмулцеште ку патратул дистанцей кореспунзэтоаре.

Дакэ нотэм волумул масей элементарэ  $dm$  прин  $d\sigma$ , маса уней унитэць де волум прин  $\gamma$ , атунч

$$dm = \gamma d\sigma.$$

Пентру ун корп оможен, адикэ пентру  $\gamma = \text{const}$ ,

$$J_z = \int_{(M)} r^2 dm = \int_{(\sigma)} r^2 \gamma d\sigma = \gamma \int_{(\sigma)} r^2 d\sigma, \quad (3)$$

унде интеграла есте екстинсэ асупра ынтрегулуй волум ал корпулуй.

Ын казул уней супрафече материалае оможене, адикэ а унуй систем, маса кэруа есте дистрибуитэ униформ пе о супрафэць оарекаре суб форма унуй страт субцире, ын мод аналог авем

$$J_z = \gamma_1 \int_{(\sigma)} r^2 d\sigma, \quad (4)$$

унде  $\gamma_1$  есте маса уней унитэць де арие а супрафечей,  $d\sigma$ —ария элементарэ, яр интеграла есте екстинсэ пе тоатэ ария ачестей супрафече.

Ын казул уней линий материалае оможене

$$J_z = \gamma_2 \int_{(l)} r^2 dl, \quad (5)$$

унде  $\gamma_2$  есте маса уней унитэць де лунжме а линией,  $dl$  — лунжимя элементарэ.

Интеграла есте екстинсэ пе тоатэ лунжимя линией.

Десеорь моментул де инерции аксиал есте репрезентат суб форма продусулуй масей корпулуй  $M$  прин патратул уней дистанце оарекаре медий пынэ ла ачасть аксэ  $J_z = Mr_z^2$ .

Мэримя  $P_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$  есте нумитэ раза де инерции а корпулуй ын рапорт ку акса консидератэ. Раза де инерции се мэсоарэ ын унитэць де лунжме. Экспримаря моментулуй де инерции а корпулуй прин раза де инерции есте фoарте потри-

витэ, деоарече еа пермите сэ калкулэм моментул де инерции ал корпусулуй, куноскынд валоаря разей де инерции, индикатэ ын табелэ, ши материалул, дин каре есте фэкут корпусул.

Сэ дефиним позиция унуй систем ын рапорт ку ун оарекаре систем де координате  $x, y, z$ . Вом нота ку  $x_k, y_k, z_k$  координателе пунктулуй де масэ  $m_k$ .

Моментул де инерции ал системулуй ын рапорт ку орижия координателор есте

$$J_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

Моментеле де инерции аксиале але системулуй се експримэ прин формулеле

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Адунын де моментеле де инерции аксиале, обцинем

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O. \quad (6)$$

Формула (6) експримэ релация динтре моментеле де инерции але системулуй ын рапорт ку акселе де координате ши моментул де инерции ын рапорт ку орижия координателор. Унеорь ачастэ формулэ дэ посибилитатя де а детермина ушор моментеле де инерции нечесаре.

### § 3. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ МОМЕНТЕЛЕ ДЕ ИНЕРЦИИ ЫН РАПОРТ КУ АКСЕЛЕ ПАРАЛЕЛЕ (ТЕОРЕМА ЛУЙ ШТАЙНЕР)

Сэ луэм чентрул маселор системулуй  $S$  ын калитате де орижине а координателор. Консидерэм ын планул  $yz$  акса  $z_1$ , паралелэ ку акса  $z$ , ши сэ нотэм ку  $d$  дистанца динтре ачесте аксе паралеле. Нотэм координателе пунктулуй  $A_k$  де масэ  $m_k$  ал системулуй прин  $x_k, y_k, z_k$ , яр дистанцеле динтре ачесте пункт ши акселе  $z$  ши  $z_1$  кореспунзэтор прин  $r_k$  ши  $\rho_k$ .

Авем

$$J_z = \sum m_k r_k^2 \text{ ши } J_{z_1} = \sum m_k \rho_k^2.$$

Конформ теоремей косинусурило дин  $\Delta CO_1 A'_k$  (фиг. 196) авем

$$\rho_k^2 = r_k^2 + d^2 - 2r_k d \sin \varphi_k,$$

унде  $\varphi_k$  есте унгул динтре  $CA'_k$  ши акса  $x$ .

Пентру  $J_{z_1}$  обцинем

$$J_{z_1} = \sum m_k (r_k^2 + d^2 - 2r_k d \sin \varphi_k) = \sum m_k r_k^2 + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k y_k;$$

$$y_k = r_k \sin \varphi_k,$$

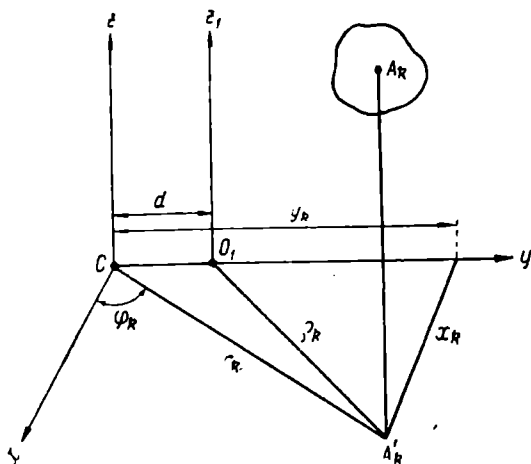
$\sum m_k = M$  есте маса системулуй,

$$\sum m_k y_k = M y_C = 0,$$

деоаре че конформ ипотезей центрул маселор се афлэ ын орижиня координателор ши  $y_C = 0$ .

Прима сумэ ын експресия пентру  $J_{z_1}$  фиинд  $J_z$ , обцинем дефинитив

$$J_{z1} = J_z + M d^2. \quad (7)$$



Фиг. 196.

Де обичей формула (7) есте нумитэ формула луй Штайнер.

Моментул де инерцие ал унуй систем ын рапорт ку о аксэ оарекаре есте егал ку моментул де инерцие ал системулуй ын рапорт ку акса, каре трече прин центрул маселор, паралел ку акса консидератэ, плус продусул динтре маса системулуй ши патратул дистанцей динтре ачесте аксе.

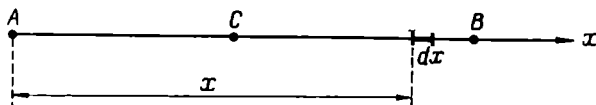
Дин формула (7) реесе, кэ пентру тоталитатя акселор паралеле, инклузив акса каре трече прин центрул маселор, чел май мик момент де инерцие есте моментул ын рапорт ку акса, каре трече прин центрул маселор.



#### § 4. МОМЕНТЕЛЕ ДЕ ИНЕРЦИЕ АЛЕ ЧЕЛОР МАЙ СИМПЛЕ КОРПУРЬ ОМОЖЕНЕ

##### Бара

Сэ жалкулэм моментул де инерције ал уней बारे ын рапорт ку екстремитатя ей  $A$  ши мижлокул  $C$  (фиг. 197). Маса барей есте  $M$ , яр лунжия  $l$ . Сэ ындрептэм акса  $x$  ын лунгул барей, луынд орижия ын пунктул  $A$ .



Фиг. 197.

Ын конформитате ку формула (5) моментул де инерције ал линей материалесте

$$J_A = \gamma_2 \int_{(l)} r^2 dl = \gamma_2 \int_0^l x^2 dx = \gamma_2 \frac{l^3}{3}$$

сау, ынлокуинд  $\gamma_2$  ку валоаря луй  $\gamma_2 = \frac{M}{l}$ , обцинем дефинитив

$$J_A = \frac{1}{3} M l^2. \quad (8)$$

Ын мод аналог обцинем

$$J_C = \frac{1}{12} M l^2. \quad (9)$$

##### Дискул

Сэ нотэм маса дискулуй прин  $M$ , яр раза прин  $R$ . Калкулэм май ынтый моментул де инерције ын рапорт ку чентрул луй  $C$ . Конформ формулей (4) моментул де инерције ал супрафцей материалесте

$$J_C = \gamma_1 \int_{(\sigma)} r^2 d\sigma.$$

Дрепт арие элементарэ  $d\sigma$  луэм ария, мэржинитэ де доуэ чиркумферинце концентриче ку чентрул ын  $C$  ши разеле егале ку  $r$  ши  $r + dr$ . Вом авя  $d\sigma = 2\pi r dr$  (фиг. 198). Дистанца динтре пунктеле елементулуй  $d\sigma$  ши чентрул  $C$  есте песте тот уна ши ачеш ши егалэ ку  $r$ . Деачея

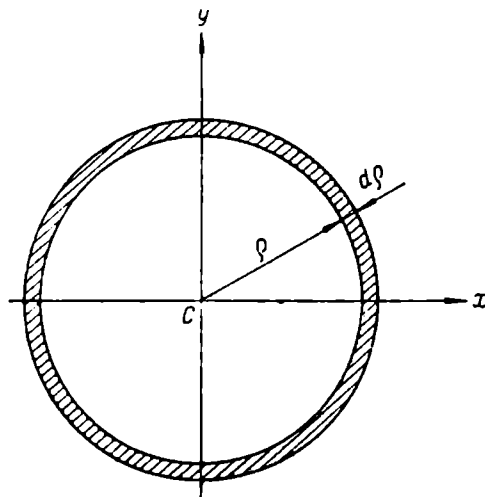
$$J_C = \gamma_1 \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \gamma_1 \frac{R^4}{4} = \pi \gamma_1 \frac{R^4}{2}.$$

Субституинд валоаря  $\gamma_1 = \frac{M}{\pi R^2}$ , обцинем дефинитив

$$J_C = \pi \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2} MR^2. \quad (10)$$

Есте евидент, кэ моментул де инерции ал дискулуй ын рапорт ку акса  $z$ , каре трече прин центрул дискулуй, перпендикуляр пе планул луй, есте егал ку  $J_C$

$$J_z = J_C = \frac{1}{2} MR^2. \quad (11)$$



Фиг. 198.

Моментул де инерции ал дискулуй ын рапорт ку диаметрул (акса  $x$ ), калкулат дупэ формула (6), есте

$$J_x = \frac{1}{4} MR^2. \quad (12)$$

#### Чилиндрул чиркулар дрепт

Куноаштем маса чилиндрлуй  $M$ , раза базей  $R$  ши ынэлцимя  $h$ . Сэ, калкулэм моментул де инерции ал чилиндрлуй ын рапорт ку акса са жеометрике  $z$ .

Дин дефиниция моментулуй де инерции ал системулуй резултэ, кэ моментул де инерции ну вариязэ ла депласаря пунктелор системулуй паралел ку акса. Депласынд маселе волумелор елементаре але чилиндрлуй паралел ку акса луй пе база чилиндрлуй, обцинем ун диск ку маса  $M$  ши раза  $R$ . Прин урмаре,

моментул де инерции ал чилиндролуй ын рапорт ку акса са' жео-  
метрикэ се калкулязэ дупэ формула моментулуй де инерции ал  
дискулууй ын рапорт ку центрул сзу, адикэ

$$J_z = \frac{1}{2} MR^2. \quad (13)$$

### Сфера

Сэ нотэм прин  $M$  маса сферей, прин  $R$  раза ей. Сэ калкулэм  
моментул де инерции ал сферей ын рапорт ку диаметрул (ак-  
са  $x$ ). Калкулэм ын примул рынд моментул де инерции ал сфе-  
рей ын рапорт ку центрул  $C$ . Конформ формулей (3)

$$J_C = \gamma \int_{(v)} r^2 dv.$$

Дрепт волум элементар  $dv$  луэм волумул, мэржинит де доуэ  
супрафеце сфериче концентриче, авынд центрул ын  $C$  ши разе-  
ле егале ку  $\rho$  ши  $\rho + d\rho$ . Волумул элементар  $dv = 4\pi\rho^2 d\rho$ . Дис-  
танца динтре пунктеле волумулуй элементар  $dv$  ши центрул  $C$   
есте песте тот уна ши ачеш ши есте егалэ ку  $\rho$ . Астфел

$$J_C = \gamma \int_0^R 4\pi\rho^4 d\rho = 4\pi\gamma \cdot \frac{R^5}{5}.$$

Ымпэрцинд маса сферей ла волумул ей, обцинем мэрия  $\gamma$

$$\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Обцинем дефинитив пентру моментул де инерции  $J_C$

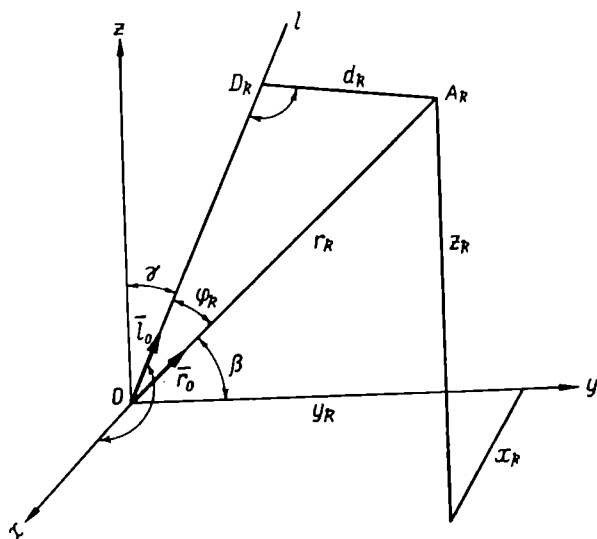
$$J_C = 4\pi \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2.$$

Сэ луэм орижния координателор ын центрул сферей. Есте  
евидент, кэ  $J_x = J_y = J_z$ , деоарече дистрибуция маселор есте  
уна ши ачеш фацэ де орьче аксэ. Апликынд формула  $2J_0 =$   
 $= J_x + J_y + J_z$ , обцинем

$$2J_C = 3J_x, \quad J_x = \frac{2}{3} J_0 \text{ сау } J_x = \frac{2}{5} MR^2. \quad (14)$$

**§ 5. ДЕТЕРМИНАРЯ МОМЕНТУЛУЙ ДЕ ИНЕРЦИИ АЛ КОРПУЛУЙ ЫН  
РАПОРТ КУ АКСА, КАРЕ ТРЕЧЕ ПРИН ПУНКТУЛ ДАТ ЫН ДИРЕКЦИЯ  
КОНСИДЕРАТЭ**

Сэ луэм пунктул дат ал спациулуй дрепт орижиня  $O$  а системулуй де координате картезиене ректангуларе. Дирекция аксей, ын рапорт ку каре требеуе калкулат моментул де инерции, се детерминэ де унгиуриле директоаре  $\alpha$ ,  $\beta$  ши  $\gamma$  (фиг. 199).



Фиг. 199.

Нотэм прин  $r_k$  дистанца динтре пунктул  $A_k(x_k, y_k, z_k)$  де масэ  $m_k$  ши орижиня координателор. Коборым дин пунктул  $A_k$  перпендикулара  $A_kD_k$  пе акса  $l$  ши нотэм унгиул  $A_kOD_k$  прин  $\varphi_k$ . Дин триунгиул  $A_kOD_k$  резултэ  $OD_k = r_k \cos \varphi_k$ . Пентру а детермина  $\cos \varphi_k$  ынтродучем версорий  $\bar{l}_0$  ши  $\bar{r}_0$  ын дирекция аксей  $l$  ши а разей вектоаре  $\bar{r}_k$ . Ын ачест каз

$$\cos \varphi_k = \bar{l}_0 \cdot \bar{r}_0 = \cos \alpha \frac{x_k}{r_k} + \cos \beta \frac{y_k}{r_k} + \cos \gamma \frac{z_k}{r_k},$$

деоарече

$$\bar{l}_0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$$

ши

$$\bar{r}_k = \frac{x_k}{r_k} \bar{i} + \frac{y_k}{r_k} \bar{j} + \frac{z_k}{r_k} \bar{k}.$$

Акум пентру  $OD_k$  авем

$$OD_k = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma.$$

Апликынд теорема луй Питоара дин  $\triangle O A_k D_k$ , обцинем

$$(A_k D_k)^2 = d_k^2 = r_k^2 - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2 = x_k^2 (1 - \cos^2 \alpha) + y_k^2 (1 - \cos^2 \beta) + z_k^2 (1 - \cos^2 \gamma) - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma.$$

Фолосинд егалитатя куноскутэ  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , скрием експресия пентру  $d_k^2$  ын фелул урмэтор

$$d_k^2 = x_k^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y_k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + z_k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \alpha (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta (x_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \gamma (x_k^2 + y_k^2) - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma.$$

Скоцынд факторий комунь ын афара семнелор сумей, моментул де инерции ал корпулуй ын рапорт ку акса  $l$  есте

$$J_l = \sum m_k d_k^2 = \cos^2 \alpha \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \gamma \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_k x_k y_k - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m_k x_k z_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_k y_k z_k.$$

Се штие, кэ

$$\sum m_k (y_k^2 + z_k^2) = J_x, \quad \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) = J_y, \quad \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = J_z.$$

Обсервэм, кэ ын експресия пентру  $J_l$  се концин ши алте суме, ынтылните десеорь ла резолваря проблемелор де динамикэ а корпулуй солид. Сэ нотэм вчесте суме ын фелул урмэтор

$$\sum m_k x_k y_k = J_{xy}, \quad \sum m_k x_k z_k = J_{xz}, \quad \sum m_k y_k z_k = J_{yz}.$$

Мэримиле  $J_{xy}$ ,  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$  сынт нумите моменте де инерции центрифугале але корпулуй ын рапорт ку челе доуэ аксе кореспундэтоаре. Се нумеште момент де инерции центрифугал ал корпулуй (ал системулуй) ын рапорт ку доуэ аксе де координате оарекаре сума продуселор маселор тутурор пунктелор корпулуй прин продусул координателор лор, че кореспунд акселор консидерате.

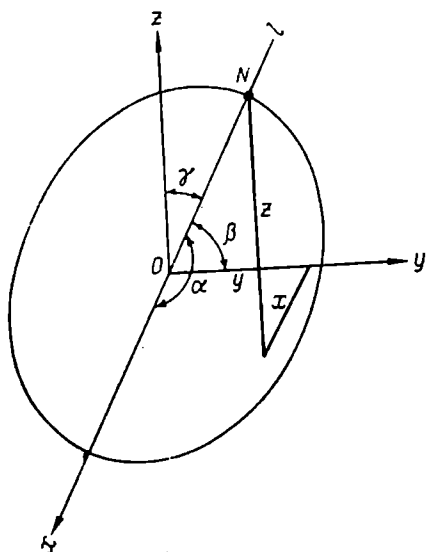
Обцинем дефинитив формула пентру  $J_l$

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \gamma + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (15)$$

Дин ултима формулэ реесе, кэ пентру а калкула моментул де инерции ын рапорт ку о оарекаре аксэ, каре трече прин пунктул дат, требует сэ куноаштем шасе мэрымь — трей моменте де инерции аксиале ши трей моменте де инерции центрифугале.

## § 6. ЕЛИПСОИДУЛ ДЕ ИНЕРЦИИ

Сэ луэм ун пункт оарекаре ал спациулуй дрепт орижине а системулуй де координате картезиене ректангуларе. Дучем прин ачест пункт ун фасцикул де аксе. Куноскынд моментеле де



Фиг. 200.

инерции аксиале ши центрифугале, путем детермина дупэ формула (15) моментеле де инерции ын рапорт ку тоате акселе ачестуй фасцикул. Ын каз женерал еле вор фи диферите. Де-

пунем сегментул  $ON = \frac{1}{\sqrt{J_l}}$  пе акса  $l$  а фасцикулулуй дирекция кэрея се детерминэ прин унгиуриле директоаре  $\alpha$ ,  $\beta$  ши  $\gamma$ . Ефектуынд ачестэ конструкции пентру тоате акселе фасцикулулуй, обцинем о тоталитате де пункте  $N$ , каре формязэ о супрафацэ оарекаре. Сэ дедучем екуация ачестей супрафее.

Сэ нотэм прин  $x$ ,  $y$  ши  $z$  координателе пунктулуй

$N$ ; пентру ачесте координате авем (фиг. 200):

$$x = ON \cos \alpha, \quad y = ON \cos \beta, \quad z = ON \cos \gamma,$$

де унде

$$\cos \alpha = \frac{x}{ON} = x \sqrt{J_l}, \quad \cos \beta = y \sqrt{J_l}, \quad \cos \gamma = z \sqrt{J_l}.$$

Конформ формулей (15)

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma.$$

Ынлокуынд ын ачестэ формулэ косинусуриле унгиурило директоаре ку экспресииле лор, обцинем

$$J_l = J_x \cdot x^2 \cdot J_l + J_y \cdot y^2 \cdot J_l + J_z \cdot z^2 \cdot J_l - 2J_{xy} xy \cdot J_l - 2J_{xz} x \cdot z \cdot J_l - 2J_{yz} y \cdot z \cdot J_l.$$

Дупэ ымпэрциря ла  $J_I$ , ултима екуацие се' скрие астфел .

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1. \quad (16)$$

Ачаста есте екуация супрафецей кэутате. Супрафаца общинутэ есте о супрафацэ де ординул дой.

Дакэ адмитем кэ  $J_I \neq 0$ , чея че ынсямнэ кэ ынтре акселе фасчикулулуй ну екзистэ нич о аксэ, моментул де инерцие ын рапорт ку каре ар фи нул, атунч  $ON = \frac{1}{\sqrt{J_I}}$  есте ынтотдяуна

о мэриме финитэ ши, прин урмаре, супрафаца общинутэ ну аре пункте инфинит ындепэртате. (Де екземплу, моментул де инерцие  $J_I$  ал уней вержеле дестул де субцирь, дименсиуниле трансверсале але кэрея пот фи неглижате, есте нул ын рапорт ку акса ориентатэ ын лунгул вержелей.)

Нумай о супрафацэ де градул дой сатисфаче кондиция формулатэ май сус, ши ануме — елипсоидул. Елипсоидул общинут есте нумит елипсоид де инерцие ал корпулуй дат кореспунзэтор пунктулуй  $O$ . Есте евидент, кэ елипсоидул де инерцие ал корпулуй консидерат поате фи конструит ын орьче пункт ал спациулуй. Дин ачастэ каузэ се нумеште елипсоид де инерцие ал корпулуй консидерат, кореспунзэтор унуй пункт оарекаре ал спациулуй, елипсоидул ку чентрул ын ачест пункт, разеле вектоаре але пунктелор елипсоидулуй фиинд егале ку валориле инверсе але рэдэчинилов патрате дин моментеле де инерцие але корпулуй ын рапорт ку акселе, ориентате дупэ ачесте разе вектоаре.

Моментул де инерцие ал корпулуй ын рапорт ку о аксэ карактеризязэ, дупэ кум се штие, дистрибуция маселор корпулуй фацэ де ачастэ аксэ. Прин урмаре, елипсоидул де инерцие ал корпулуй, кореспунзэтор унуй пункт оарекаре, есте о карактеристикэ жеометрике женералэ а дистрибуцией маселор корпулуй фацэ де акселе фасчикулулуй, че трек прин ачест пункт.

Акселе принципале але елипсоидулуй де инерцие ал корпулуй, кореспунзэтор унуй пункт оарекаре, сынт нумите аксе принципале де инерцие але корпулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй консидерат. Моментеле де инерцие ын рапорт ку ачесте аксе сынт нумите моменте принципале де инерцие, кореспунзэтоаре ачестуй пункт. Пентру корпул дат ын орьче пункт ал спациулуй екзистэ трей аксе принципале де инерцие речипрок перпендикуларе.

Дакэ акселе принципале де инерцие сынт луате дрепт аксе де координате, атунч, дупэ кум се штие дин жеометрия аналитикэ, екуация елипсоидулуй ну концине термений ку продусул координателор.

Резултэ, кэ дакэ дрепт аксе де координате сынт луате акселе принципале де инерцие, кореспунзэтоаре унуй пункт оаре-

каре, а тунч коефициенций продуселор координателор ын екуация елипсоидулуй де инерции (16), кореспунзэтор пунктулуй консидерат, сынт нуль, адикэ

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Моментеле де инерции центрифугале але корпулуй ын рапорт ку акселе принципале де инерции, кореспунзэтоаре пунктулуй дат, сынт нуле.

Ын ачест каз екуация елипсоидулуй де инерции, кореспунзэтор пунктулуй консидерат, есте

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1.$$

Семиакселе ачестуй елипсоид сынт  $\frac{1}{\sqrt{J_x}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{J_y}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{J_z}}$ , чея че реесе дин екуация читатэ ши дин конструкция елипсоидулуй.

Фие уна дин акселе де координате, де екземплу акса  $z$ , есте аксэ принципалэ де инерции а корпулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй  $O$ . Дин дефиниции реесе, кэ ачастэ аксэ есте акса де симетрии а елипсоидулуй де инерции. Дакэ пункт  $N(x, y, z)$  се афлэ пе елипсоидулуй де инерции, а тунч ши пункт  $N'(-x, -y, z)$  де асеменя се афлэ пе ачест елипсоид. Субституинд координателе ачестор пункте ын екуация елипсоидулуй де инерции (16), обцинем

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{xz}xz - 2J_{yz}yz = 1,$$

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy + 2J_{xz}xz + 2J_{yz}yz = 1.$$

Скэзынд прима екуации дин а доуа ши ымпэрцинд резултул ла патру авем:

$$J_{xz}xz + J_{yz}yz = 0.$$

Фие координателе пунктулуй  $N$  сынт:  $x=0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ . А тунч дин екуация де май сус реесе, кэ  $J_{yz}=0$ .

Дакэ ынсэ реферитор ла координателе пунктулуй  $N$  пресупунем, кэ  $x \neq 0$ ,  $y=0$ ,  $z \neq 0$  обцинем  $J_{xz}=0$ . Прин урмаре, дакэ акса  $z$  есте акса принципалэ де инерции а корпулуй, а тунч

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Астфел, дакэ о аксэ оарекаре де координате есте аксэ принципалэ де инерции а корпулуй, а тунч моментеле де инерции центрифугале, каре концин координата кореспунзэтоаре ачестей аксе, сынт нуле.

Евидент, кэ есте жустэ ши афирмация речипрокэ: дакэ доуэ моменте де инерции центрифугале але корпулуй сынт нуле, а тунч уна дин акселе де координате есте аксэ принципалэ де инерции, кореспунзэтоаре пунктулуй консидерат, ши ануме ак-

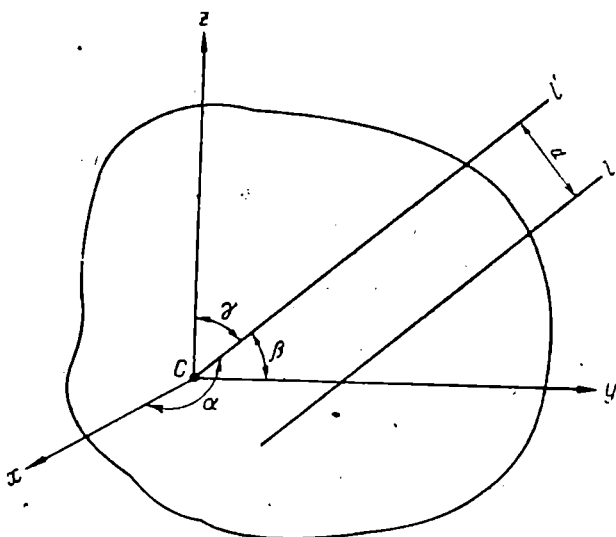


са, координателе кэрея фигурызэ ын экспрессиеле амбелор моменте де инерции центрифугале. Де екземплу, дакэ  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , акса  $z$  есте аксэ принципалэ де инерции, кореспунзэтоаре пунктулуй дат.

Елипсоидул де инерции, кореспунзэтор центрлуй маселор корпулуй, есте нумит елипсоид централ де инерции. Акселе принципале але ачестуй елипсоид сынт нумите аксе принципале централе де инерции але корпулуй. Моментеле де инерции ын рапорт ку ачесте аксе сынт нумите моменте де инерции принципале централе.

Дакэ дрепт аксе де координате луэм акселе принципале де инерции, кореспунзэтоаре пунктулуй консидерат, моментул де инерции ал корпулуй ын рапорт ку акса, каре трече прин ачест пункт ши формязэ ку акселе де координате унгириле  $\alpha$ ,  $\beta$  ши  $\gamma$ , ын конформитате ку формула (15) есте

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (17)$$



Фиг. 201.

Пентру а детермина моментул де инерции ал корпулуй есте нечесар сэ куноаштем нумай моментеле принципале де инерции, кореспунзэтоаре пунктулуй дат. О импортацэ деосебитэ аре куноаштеря акселор принципале централе де инерции але корпулуй. Куноаштеря ачестор аксе ши а моментелор де инерции але корпулуй ын рапорт ку еле пермите калкуларя моментулуй де инерции ал корпулуй ын рапорт ку орьче аксэ пе база теоремей луй Штайнер.

Астфел, пентру о аксэ арбитрарэ  $l$  обцинем (фиг. 201)

$$J_l = J_{l'} + Md^2$$

сау

$$J_l = J_{Cx} \cos^2 \alpha + J_{Cy} \cos^2 \beta + J_{Cz} \cos^2 \gamma + Md^2, \quad (18)$$

унде  $d$  есте дистанца динтре акселе паралеле  $l$  ши  $l'$ ;

$J_{Cx}$ ,  $J_{Cy}$ ,  $J_{Cz}$  — моментеле де инерциие принципале, централе але корпусулуй;

$\alpha$ ,  $\beta$  ши  $\gamma$  — унгюриле динтре акса  $l'$  ши акселе принципале централе де инерциие але корпусулуй.

## § 7. АКСЕЛЕ ПРИНЦИПАЛЕ ДЕ ИНЕРЦИИЕ АЛЕ КОРПУРИЛОР СИМЕТРИЧЕ

Сэ демонстрэм доуэ теореме, каре ынлеснеск гэсиря акселор принципале де инерциие але корпусурилол симетриче.

**Теорем а 1.** *Акса де симетриие материалэ а корпусулуй есте аксэ принципалэ де инерциие а корпусулуй ын тоате пунктеле сале.*

Се нумеште аксэ де симетриие материалэ а корпусулуй о астфел де аксэ, ын рапорт ку каре маселе елементелор корпусулуй сынт ашезате симетрич. Есте евидент, кэ акса де симетриие материалэ а корпусулуй есте ши аксэ де симетриие жеометрике а корпусулуй.

Сэ консидерэм акса  $z$  дрепт аксэ де симетриие материалэ а корпусулуй. Луэм орижиня де координате ынтр'ун пункт оарекаре  $O$  де пе ачастэ аксэ (фиг. 202). Фие  $m$  маса пунктулуй  $N(x, y, z)$  ал корпусулуй. Пунктул  $N'(x', y', z')$  де масэ  $m'$ , ситуат симетрич ку пунктул  $N$  фацэ де акса  $z$  апарцине де асеменя корпусулуй, ши

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \quad m' = m.$$

Пентру ачесте доуэ пункте

$$\sum m_k x_k z_k = m x z + m' x' z' = m x z - m x z = 0.$$

Маса тоталэ а корпусулуй констэ дин маселе перекилол де пункте, прин урмаре, пентру корпусул солид авем

$$\sum m_k x_k z_k = 0.$$

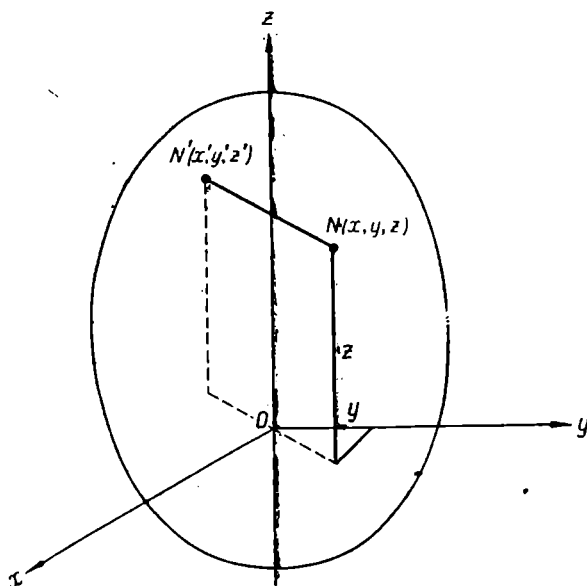
сау

$$J_{xz} = 0.$$

Ын мод аналог се демонстрязэ, кэ  $J_{yz} = 0$ .

Доуэ моменте де инерциие центрифугале але корпусулуй, каре кончин координата  $z$ , сынт нуле. Де аич реесе, кэ акса  $z$  есте аксэ принципалэ де инерциие а корпусулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй  $O$ .

Пунктул  $O$  есте ун пункт арбитрар ал аксёй  $z$  ши, прин ур-маре, теорема есте демонстратэ.



Фиг. 202.

**Теорема 2.** *Дакэ ун корп аре ун план де симетрие материалэ, каре трече прин пунктул дат, атунч уна дин акселе принципале де инерции але корпусулуй, кореспунзэтоаре ачестуй пункт, есте перпендикулярэ пе планул де симетрие.*

Ачастэ теоремэ се демонстразэ ка ши теорема 1.

#### § 8. ПРОПРИЕТАЦИЛЕ АКСЕЙ ПРИНЦИПАЛЕ ЧЕНТРАЛЕ ДЕ ИНЕРЦИИ А КОРПУЛУЙ

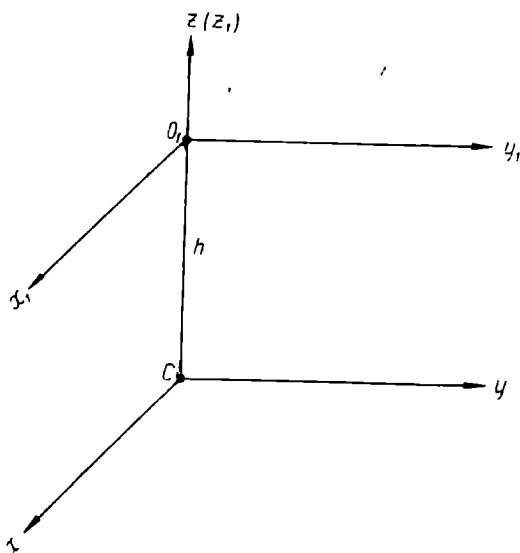
Сэ луэм орижиня координателор ын чентрул маселор  $C$ . Ориентэм акселе де координате дупэ акселе принципале чентрале де инерции але корпусулуй. Тоате челе трей моменте де инерции центрифугале сынт нуле

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Сэ луэм ун пункт оарекаре  $O_1$  пе уна дин аксе, де екзем-плу пе акса  $z$ . Консидерэм ачест пункт дрепт орижине а унуй ноу систем де координате  $O_1x_1y_1z_1$ . Луэм акса  $x_1$  паралелэ ку акса  $x$ , акса  $y_1$  паралелэ ку акса  $y$ , яр акса  $z_1$  коинциде ку акса  $z$  (фиг. 203). Нотэм ку  $h$  дистанца  $CO_1$ .

Ынтре координателе пунктелор ын системул  $x_1 y_1 z_1$  ши системул  $x_1 y_1 z_1$  авем релацииле

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - h.$$



Фиг. 203.

Калкулэм моментеле де инерции центрифугале ын рапорт ку орьче переке дин акселе  $x_1, y_1, z_1$ :

$$J_{x_1 y_1} = \sum m_k x_{1k} y_{1k} = \sum m_k x_k y_k = J_{xy} = 0,$$

$$J_{x_1 z_1} = \sum m_k x_{1k} z_{1k} = \sum m_k x_k (z_k - h) = \sum m_k x_k z_k - h \sum m_k x_k,$$

ынсэ

$$\sum m_k x_k z_k = J_{xz} = 0, \quad \sum m_k x_k = M x_C = 0,$$

деоарече

$$x_C = 0.$$

Ын мод аналог обцинем

$$J_{y_1 z_1} = 0.$$

Тоате челе трей моменте де инерции центрифугале сынт нуле

$$J_{x_1 y_1} = J_{x_1 z_1} = J_{y_1 z_1} = 0.$$

Деч акселе  $x_1, y_1, z_1$  сынт аксе принципале де инерции але корпулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй  $O_1$ .

Проприетэциле аксей принципале централе де инерции але корпулуй сынт экспримате ын теорема урмэтоаре: акселе прин-

чипале де инерције але корпусулуй, кореспунзэтоаре унуй пункт де не орьче аксэ принципалэ чентралэ де инерције, сынт паралеле ку акселе принципале чентрале де инерције.

Пентру пунктул  $O_1$ , луат арбитрар пе акса  $z$ , акса принципалэ чентралэ де инерције  $z$  ши акса принципалэ де инерције  $z_1$ , кореспунзэтоаре пунктулуй  $O_1$ , коинчид. Прин урмаре, акса принципалэ чентралэ де инерције а корпусулуй есте аксэ принципалэ де инерције, кореспунзэтоаре орькэруй пункт ал сэу.

Есте жустэ ши теорема речипрокэ: акса де координате, каре есте аксэ принципалэ де инерције а корпусулуй, кореспунзэтоаре ла доуэ пункте але сале, есте аксэ принципалэ чентралэ де инерције а корпусулуй.

---

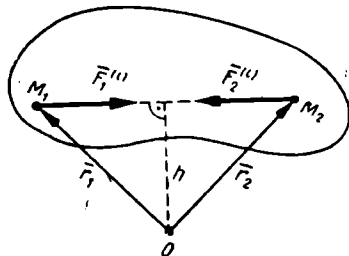
# ТЕОРЕМЕЛЕ ЖЕНЕРАЛЕ АЛЕ ДИНАМИЧИЙ ПУНКТУЛУЙ ШИ СИСТЕМУЛУЙ

## § 1. УНЕЛЕ ПРОПРИЕТАЦЬ СИМПЛЕ АЛЕ ФОРЦЕЛОР ИНТЕРИОАРЕ АЛЕ СИСТЕМУЛУЙ

Се нумеск *форце екстериоаре* але системулуй механик форцеле де интеракциуне але пунктелор ачестуй систем ку пунктеле ши корпуриле, каре ну ынтрэ ын компоненца системулуй механик консидерат.

Се нумеск *форце интериоаре* але системулуй механик форцеле де интеракциуне динтре пунктеле системулуй консидерат.

Нотэм форца екстериоарэ, апликатэ унуй пункт оарекаре ал системулуй прин  $\vec{F}_k^{(e)}$ , яр форца интериоарэ прин  $\vec{F}_k^{(i)}$ . МENTIONЭМ, КЭ ФОРЦЕЛЕ ИНТЕРИОАРЕ ШИ ЕКСТЕРИОАРЕ ПОТ КОНЦИНЕ АТЫТ ФОРЦЕ АКТИВЕ, КЫТ ШИ ФОРЦЕ ДЕ РЕАКЦИУНЕ АЛЕ ЛЕГЭТУРИЛОР.



Фиг. 204.

Сэ консидерэм кытева проприетэць симпле але форцелор интериоаре, че акционязэ асупра системулуй механик ын орьче старе а ачестуй систем. Сэ демонстрэм кэ *векторул принципал ал тутурор форцелор интериоаре але системулуй ши моментул принципал ал ачестор фор-*

*це ын рапорт ку ун пункт арбитрар сынт нуль ын орьче старе а системулуй*, адикэ атыт ын старя де екилибру кыт ши ын старя де мишкаре арбитрарэ а системулуй.

Фие системул констэ дин  $N$  пункте, унде  $N$  есте ун нумэр арбитрар финит. Конвеним сэ ну индикэм лимителе сумей атулч, кынд сумаря есте екстинсэ асупра тутурор челор  $N$  пункте але системулуй. Пентру доуэ пункте оарекаре але системулуй, де екземплу  $M_1$  ши  $M_2$  (фиг. 204), авем

$$\vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_2^{(i)} = 0,$$

деоарече форцеле акциуний ши реакциуний сынт ынтотдяуна егале ка модул, опусе ка сенс ши акционязэ ын лунгул дрептей, каре унеште пунктеле че интеракционязэ. Векторул принципал ал форцелор интериоаре  $\vec{R}^{(i)}$  есте сума векториалэ а форцелор акциуний ши реакциуний, деоарече системул есте алкэтуит ын ынтрежиме дин перекь де пункте че интеракционязэ, прин ур-

$$\vec{R}^{(i)} = \sum \vec{F}_k^{(i)} = 0. \quad (1)$$

Ын проекций пе акселе де координате авем

$$\left. \begin{aligned} R_x^{(i)} &= \sum F_{kx}^{(i)} = 0, \\ R_y^{(i)} &= \sum F_{ky}^{(i)} = 0, \\ R_z^{(i)} &= \sum F_{kz}^{(i)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Форцеле екстериоаре сынт де асемения форце де интеракциуне, ынсэ форцеле де акциуне сынт апликате пунктелор системулуй консиерат, яр форцеле де реакциуне акцияызэ асупра пунктелор ши корпурило, каре ну ынтрэ ын компоненца ачестуй систем.

Сэ консиерэм сума моментелор форцелор  $\bar{F}_1^{(i)}$  ши  $\bar{F}_2^{(i)}$  ын рапорт ку пунктул  $O$ . Есте евидент (фиг. 204), кэ

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1^{(i)}) + \bar{M}_O(\bar{F}_2^{(i)}) = 0,$$

деоарече брацел амбелор форце сынт егале, яр сенсуриле векторилор момент сынт опусе. Моментул принципал ал форцелор интериоаре  $\bar{L}_O^{(i)}$  ын рапорт ку пунктул  $O$  есте сума векториалэ а ачестор экспрессий нуле, прин урмаре

$$\bar{L}_O^{(i)} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = 0 \quad (2)$$

ши респектив ын проекций пе акселе де координате

$$\left. \begin{aligned} L_x^{(i)} &= \sum M_x(\bar{F}_k^{(i)}) = 0, \\ L_y^{(i)} &= \sum M_y(\bar{F}_k^{(i)}) = 0, \\ L_z^{(i)} &= \sum M_z(\bar{F}_k^{(i)}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

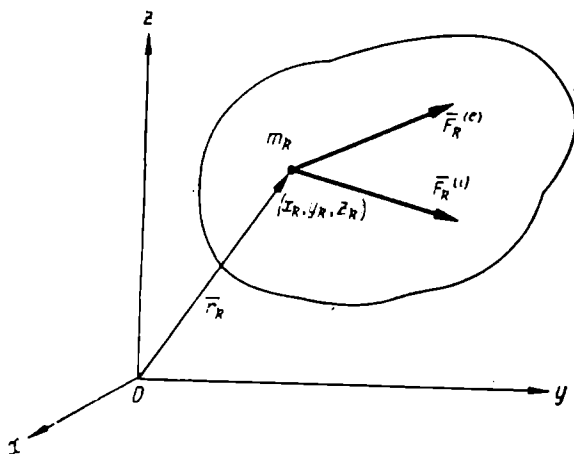
## § 2. ЕКУАЦИИЛЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ СИСТЕМУЛУЙ

Адмitem кэ сынт дате форцеле интериоаре ши екстериоаре, каре акцияызэ асупра унуй систем (фиг. 205), алкэтуит дин  $N$  пункте. Дакэ апликэм, фиекэруй пункт ал системулуй резултанта форцелор екстериоаре  $\bar{F}_k^{(e)}$  ши резултанта форцелор интериоаре  $\bar{F}_k^{(i)}$ , атунч екуация диференциалэ а мишкэрий орькэруй пункт  $k$  ын форма векториалэ есте

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}; \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Системул де  $N$  екуаций диференциале (3) се нумеск екуацииле диференциале але мишкэрий системулуй механик ын форма векториалэ. Проектынд екуацииле диференциале векториале (3) пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе, обцинем ун систем дин  $3N$  екуаций диференциале, каре дескриу мишкарэ пунктелор системулуй механик. Прин урмаре, пентру а стабили мишкарэ системулуй механик дупэ форцеле ши конди-

цииле инициале куноскуте, требуе сз интегрэм пентру фиикаре пункт ал системулуй ун систем де  $3N$  екуаций диференциале. Ачастэ проблемэ ын каз жєнерал ну поате фи резолватэ пречис кяр пентру ун систем механик алкэтуит динтр'ун сингур пункт материал. Еа се резолвэ фоарте греу ын казул а доуэ пункте, каре се мишкэ нумай суб акциуня форцелор де интеракциуне дупэ лежя гравитацией универсале (проблема а доуэ корпурь) ши есте ирезолвабилэ ын казул а трей пункте каре интеракциязэ (проблема а трей корпурь).



Фиг. 205.

Проблема интегрэрий екуациилор диференциале але системулуй механик есте ши май компликатэ атунч, кынд системул механик есте супс ла легэтурь, реакциуниле кэроора ну сынт куноскуте динаинте ши требуе детерминате суплиментар, фиинд дате форцелe ши легэтуриле аналог казулуй мишкэрий пунктуй материал легат пе о супрафацэ ши пе о линие курбэ.

Ын унеле казурь дин екуацииле диференциале пот фи обцинуте примеле интеграле але екуациилор диференциале, адикэ релацииле, каре ну концин деривателе де ординул дой але координателор ын рапорт ку тимпул.

Дакэ примеле интеграле сынт куноскуте, проблема интегрэрий системулуй де екуаций диференциале се резолвэ май ушор. Деши примеле интеграле апарте ну пот дескрие педеплин мишкаря тутурор пунктелор системулуй, еле характеризязэ кыте одатэ унеле латурь але мишкэрий системулуй ын ынтрэжме.

Кынд форцелe каре акциязэ сатисфак унеле кондиций суплиментаре, примеле интеграле але системулуй де екуаций диференциале пот фи обцинуте ушор дин аша нумителе теореме жєнерале але динамичий. Афарэ де ачаста, кяр атунч кынд дупэ теоремеле жєнерале але динамичий ну се пот обцине при-



меле интеграле, еле дау о информаци прециоасэ деспре миш-  
каря пунктулуй сау а системулуй. Ын унеле проблеме, ын каре  
куноаштеря комплектэ а мишкэрий системулуй ну есте нечесарэ,  
информация обцинутэ дин теоремеле женерале есте суфициентэ.

Теоремеле женерале але динамичий сынт ниште консечинце  
але системулуй де екуаций дифференциале але мишкэрий пунк-  
тулуй сау а системулуй де пункте.

### § 3. ТЕОРЕМЕЛЕ ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ КАНТИТЭЦИЙ ДЕ МИШКАРЕ ШИ ДЕСПРЕ МИШКАРЯ ЧЕНТРУЛУЙ МАСЕЛОР

#### Кантитатя де мишкаре а пунктулуй ши а системулуй

Кантитатя де мишкаре есте уна дин карактеристичеле миш-  
кэрий пунктулуй материал сау а системулуй де пункте.

Се нумеште *кантитате де мишкаре  $\bar{q}$  а унуй пункт  
материал* векторул, егал ку продусул масей пунктулуй  $m$   
прин витеза луй  $v$ , адикэ

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (4)$$

Десеорь ын физикэ кантитатя де мишкаре а пунктулуй ма-  
териал есте нумитэ *импулс* ал пунктулуй материал.

Проекцииле кантитэций де мишкаре а пунктулуй пе акселе  
системулуй де координате картезиене ректангуларе сынт

$$\left. \begin{aligned} q_x &= mv_x = m\dot{x}, \\ q_y &= mv_y = m\dot{y}, \\ q_z &= mv_z = m\dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Дименсиуня кантитэций де мишкаре ын системул СИ есте  
 $\text{кг} \cdot \text{м/сек}$  сау  $\text{н} \cdot \text{сек}$ .

Се нумеште *кантитате де мишкаре  $\bar{Q}$  а системулуй де  
пункте* *материале* сума векториалэ а кантитэцилор де миш-  
каре але пунктелор апарте але системулуй, адикэ

$$\bar{Q} = \sum_k m_k \bar{v}_k \quad (5)$$

ши, прин урмаре, проекцииле кантитэций де мишкаре але си-  
стемулуй пе акселе системулуй де координате картезиене рек-  
тангуларе сынт

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum_k m_k v_{kx}, \\ Q_y &= \sum_k m_k v_{ky}, \\ Q_z &= \sum_k m_k v_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Спре деосебире де векторул кантитэций де мишкаре  $\bar{q}$  ал

пунктулуй, векторул кантитэций де мишкаре  $\bar{Q}$  ал системулуй н'аре пункт де апликация. Векторул кантитэций де мишкаре ал пунктулуй се консидерэ апликант ын пунктул материал мобил.

### Калкуларя кантитэций де мишкаре а системулуй

Кантитатя де мишкаре а системулуй поате фи експриматэ прин маса  $M$  а системулуй ши витеза  $\bar{v}_C$  а чентрулуй маселор:

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C, \quad (6)$$

сау ын проекций пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе

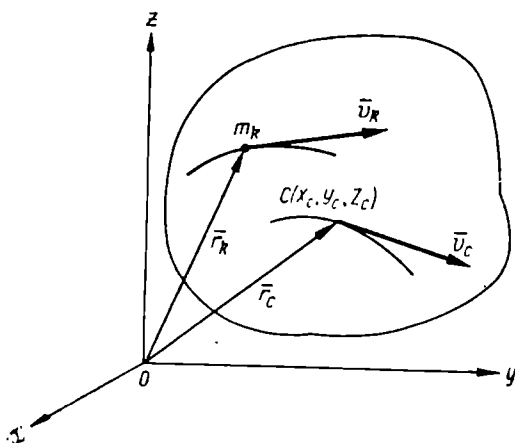
$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Mv_{Cx} = M\dot{x}_C, \\ Q_y &= Mv_{Cy} = M\dot{y}_C, \\ Q_z &= Mv_{Cz} = M\dot{z}_C, \end{aligned} \right\}$$

унде  $x_C$ ,  $y_C$  ши  $z_C$  сынт координателе чентрулуй маселор системулуй.

Сэ дедучем формула (6):

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k, \quad (7)$$

унде  $\bar{r}_k$  есте раза вектоаре а пунктулуй  $k$  дин систем (фиг. 206).



Фиг. 206.

Ын конформитате ку формула пентру раза вектоаре а чентрулуй маселор авем

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C. \quad (8)$$

Субституиуд валоаря моментулуй статик ал масей (8) ын (7), обцинем

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt} (M \bar{r}_C) = M \frac{d\bar{r}_C}{dt} = M \bar{v}_C,$$

деоарече маса  $M$  а системулуй ну вариация ын тимпул мишкэрий луй.

#### Импульс элементар ши тотал ал форцей

Акциуня форцей  $\bar{F}$  асупра унуй пункт материал ын интервалул де тимп  $dt$  се поате caracteriza прин аша нумитул *импульс элементар* ал форцей  $\bar{F} dt$ . Импульс тотал ал форцей  $\bar{F}$  ын тимпул  $t$  сау импульс  $\bar{S}$  ал форцей се детерминэ дупэ формула

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (9)$$

Проекцииле импульсулуй форцей пе акселе де координате ректангуларе сынт

$$S_x = \int_0^t F_x dt; \quad S_y = \int_0^t F_y dt; \quad S_z = \int_0^t F_z dt. \quad (9')$$

Дименсиуня импульсулуй форцей ын системул СИ есте  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}}$  сау *н·сек*.

#### Теорема деспре вариация кантитэций де мишкэре а унуй пункт материал

Сэ репрезентэме екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй материал суб акциуня форцей  $\bar{F}$  ын урмэтоаря формэ векториалэ

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Маса  $m$  а пунктулуй, фиинд консицератэ о мэриме константэ, поате фи инклусэ суб семнул дериватей. Вом авя

$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}) = \bar{F}. \quad (10)$$

Формула (10) експримэ форма диференциалэ а теоремей деспре вариация кантитэций де мишкэре а пунктулуй материал: *прима дериватэ а кантитэций де мишкэре а унуй пункт ын ра-*

экспорт ку тымпул есте егалэ ку форца, каре акцияз асупра ачестуй пункт.

Проектынд экспресия (10) не акселе де координате, обцинем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv_x) &= F_x, \\ \frac{d}{dt}(mv_y) &= F_y, \\ \frac{d}{dt}(mv_z) &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

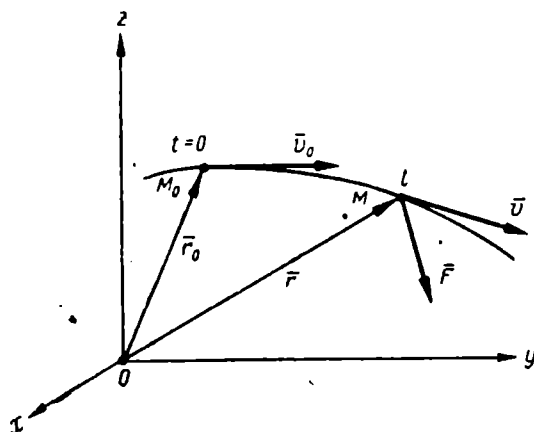
Ынмулцинд амбеле пэрць але екуацией (10) ку  $dt$ , обцинем о алтэ формэ а ачестей теореме — форма диференциалэ а теореме импулсурило

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt, \quad (11)$$

адикэ диференциала кантитэций де мишкаре а унуй пункт есте егалэ ку импулсул елементар ал форцей, каре акциязэ асупра пунктулуй консидерат.

Проектынд амбеле пэрць але егалитэций (11) не акселе де координате, обцинем,

$$d(mv_x) = F_x dt; \quad d(mv_y) = F_y dt; \quad d(mv_z) = F_z dt. \quad (11')$$



Фиг. 207.

Дупэ интеграря амбелор пэрць але егалитэций (11) ын лимите де ла 0 пынэ ла  $t$  (фиг. 207), авем

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (12)$$

унде  $\vec{v}$  — есте витеза пунктулуй ын моментул  $t$ ;

$\vec{v}_0$  — витеза ын моментул  $t=0$ ;

$\vec{S}$  — импулсул форцей ын тимпул  $t$ .

Експресия (12) есте нумитэ десеорь форма финитэ (сау интегралэ) а теоремей импулсурилор: *вариация кантитэций де мишкаре а унуй пункт ынтр'ун оарекаре интервал де тимп есте егалэ ку импулсул форцей ын ачелаш интервал де тимп*. Ачастэ теоремэ поате фи репрезентатэ ын проекций пе акселе де координате асфел:

$$\left. \begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= S_x, \\ mv_y - mv_{0y} &= S_y, \\ mv_z - mv_{0z} &= S_z. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Ын фонд, ын орьче формэ а теоремей деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй материал ну се деосебеште де екуацииле дифференциале але мишкэрий пунктулуй.

### **Теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а унуй систем**

Сэ демонстрэм теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а унуй систем ка ши ын казул унуй сингур пункт материал. Фие пунктелор системулуй сынт аппликате форцеле екстерноарэ ши интерноарэ. Атунч путем апплика теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре пентру фиекаре пункт, де екземплу, ын форма (10) (везь фиг. 205):

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Сумынд пэрциле дин стынга ши дин дряпта але ачестор експресий пентру тоате пунктеле системулуй ши цинынд конт, кэ сума деривателор есте егалэ ку деривата сумей, обцинем

$$\frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{F}_k^{(i)}.$$

Конформ проприетэций форцелор интерноаре ши дефиницией кантитэций де мишкаре авем.

$$\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0, \quad \sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q},$$

чея че не пермите сэ скрием

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}. \quad (13)$$

Експресия (13) есте форма дифференциалэ а теоремей деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй: *деривата кантитэций де мишкаре а унуй систем ын рапорт ку тимпул есте егалэ ку сума векториалэ а тутурор форцелор екстерноаре, че*

акционязэ асупра сис­темулуй. Ын проекций пе акселе сис­тему­луй де координате картезиене ректангуларе авем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \sum F_{kx}^{(e)} \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum F_{ky}^{(e)} \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \sum F_{kz}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

адикэ деривата проекцией кантитэций де мишкаре а унуй систем ын рапорт ку тимпул пе о аксэ де координате оарекаре есте егалэ ку сума проекциилор пе ача­стэ аксэ а тутурор форцелор екстериоаре, че акционязэ асупра сис­темулуй.

Ынмулцинд амбеле пэрць але екуацией (13) ку  $dt$ , обцинем форма диференциалэ а теоремей импулсурилор пентру ун си­стем

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^{(e)} dt, \quad (14)$$

адикэ диференциала кантитэций де мишкаре а унуй систем есте егалэ ку сума векториалэ а импулсурилор елементаре але ту­турор форцелор екстериоаре, каре акционязэ асупра сис­тему­луй. Ын проекций пе акселе де координате ача­стэ теоремэ капэтэ форма

$$\left. \begin{aligned} dQ_x &= \sum F_{kx}^{(e)} dt, \\ dQ_y &= \sum F_{ky}^{(e)} dt, \\ dQ_z &= \sum F_{kz}^{(e)} dt. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Интегрынд амбеле пэрць але екуацией (14) ын рапорт ку тимпул де ла зоро пынэ ла  $t$ , обцинем форма финитэ сау инте­гралэ а теоремей импулсурилор пентру систем

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)}, \quad (15)$$

унде  $\bar{Q}_0$  есте кантитатя де мишкаре а сис­темулуй ын момен тул  $t=0$ ;

$\bar{Q}$ —кантитатя де мишкаре а сис­темулуй ын моментул  $t$ ;

$\bar{S}_k^{(e)}$ —импулсул форцей екстериоаре, че акционязэ асупра-пунктулуй  $k$  ын тимпул  $t$ ;

$$\bar{S}_k^{(e)} = \int_0^t \bar{F}_k^{(e)} dt.$$

Теорема импулсурилор пентру ун систем ын форма финитэ се формулязэ астфел: *вариация кантитэций де мишкаре а унуй систем ынтр'ун оарекаре интервал есте егалэ ку сума векто-*

риалэ а тутурор импулсурилор форцелор екстериоаре, че акционязэ асупра системулуй ын ачест интервал де тимп.

Проектынд (15) пе акселе де координате, авем

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^{(e)}, \\ Q_y - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^{(e)}, \\ Q_z - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

Форцеле интериоаре але системулуй ну фигурызэ ын теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре ын орьче формэ а системулуй ши, прин урмаре, ну инфлуенцязэ асупра вариацией кантитэций де мишкаре а системулуй.

Дакэ форцеле екстериоаре сатисфак аномите кондиций, дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй ши а системулуй се пот обцине аша нумителе примеле интеграле але системулуй де екуаций дифференциале але пунктулуй ши але системулуй. Ачесте интеграле сынт нумите лежи́ле консервэрий кантитэций де мишкаре сау проекции́ле кантитэций де мишкаре пе о аксэ. Сэ студием ачесте лежы́ але консервэрий пентру ун пункт ши ун систем симулта́н, консидеры́нд пункту́л матери́ал дре́пт ун систем механи́к конституи́т динтр'ун сингу́р пункт.

#### Лежи́ле консервэрий кантитэций де мишкаре

Лежи́ле консервэрий кантитэций де мишкаре але уну́й систем се обци́н ка ни́ште казу́рь партику́ларе але теореме́й деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй ын фу́нкцие де партику́ларитэ́циле системулуй де форце екстериоаре, апликате системулуй механи́к конси́дерат, яр але уну́й сингу́р пункт — ын фу́нкцие де партику́ларитэ́циле форцелор, каре акционязэ асупра ачесту́й пункт. Форцеле интериоаре пот фи арбитра́ре, деоарече еле ну инфлуенцязэ асупра вариацией кантитэций де мишкаре а системулуй.

Сы́нт поси́биле доуэ казу́рь партику́ларе:

1. Дакэ сума векториалэ а тутурор форцелор екстериоаре апликате системулуй есте нулэ, адикэ  $\sum \vec{F}_k^{(e)} = 0$ , атунч дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй, де екземплу суб форма (13), резулте́, кэ

$$\vec{Q} = \text{const.} \quad (16)$$

Ачастэ ле́же (ма́й пречис казу́л партику́лар ал теореме́й) поате фи формула́тэ ын фе́лул урмэ́тор: *дакэ вектору́л принчи́пал ал форцелор екстериоаре але системулуй есте нул, кантита́тя де мишкаре а системулуй есте константа́ ка мэ́риме, дирек-*

цие ши сенс. Дупэ ачаствэ лежэ ын проекций пе акселе де координате авем

$$Q_x = C_1; Q_y = C_2; Q_z = C_3, \quad (16')$$

унде  $C_1, C_2, C_3$  сынт мэримь константе.

Ын релацииле (16) ши (16') фигурязэ деривателе координателор пунктелор ын рапорт ку тимпул де ун ордин ну май маре декыт ординул ынтый, яр деривателе де ординул дой але координателор ну фигурязэ. Прин урмаре, ачесте релаций сынт интегралеле де ординул ынтый але екуациилор дифференциале (3).

2. Дакэ проекция векторулуй принципал ал форцелор екстериоаре пе о аксэ оарекаре де координате есте нулэ, де екземплу  $Ox$ , адикэ  $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$ , атунч дин (13') реесе

$$Q_x = \text{const.} \quad (17)$$

Ачаствэ формулэ експримэ лежя консервэрий проекцией кантитэций де мишкаре а системулуй: *дакэ проекция векторулуй принципал ал тутурор форцелор екстериоаре але системулуй пе о аксэ оарекаре есте нулэ, атунч проекция кантитэций де мишкаре пе ачаствэ аксэ есте о мэриме константэ.*

Сэ апликэм лежя консервэрий кантитэций де мишкаре а системулуй пентру а експлика принципул мишкэрий реактиве. Фие, де екземплу, системул есте алкэтуит дин доуэ корпурь солиде артикулате, че се афлэ ын репаус ши ну сынт супесе акциуний форцелор екстериоаре. Ын ачест каз кантитатя де мишкаре а системулуй консидерат есте константэ тот тимпул ши нулэ. Адмитем, кэ ын урма уней експлозий (адикэ а акциуний форцелор интериоаре) примулуй корп ку маса  $M_1$  и се импримэ витеза  $\bar{v}_1$ . Атунч витеза корпулуй ал дойля ку маса  $M_2$  се ва детермина дин лежя консервэрий кантитэций де мишкаре:

$$\bar{Q} = M_1 \bar{v}_1 + M_2 \bar{v}_2 = \text{const} = 0,$$

прин урмаре,

$$\bar{v}_2 = - \frac{M_1}{M_2} \bar{v}_1,$$

адикэ корпул ал дойля се мишкэ ын сенсул опус мишкэрий примулуй корп. Дакэ о легэтурэ оарекаре ымледикэ мишкаря луй, корпул консидерат апасэ асупра ачестей легэтурь ку о форцэ оарекаре ын сенсул витезей  $\bar{v}_2$ . Ачаствэ форцэ есте нумитэ форцэ реактивэ. Ын мотоареле реактиве ачаствэ форцэ се креазэ ын урма еширий газелор дин ефузорул моторулуй ку о витезэ де-стул де маре (апроксиматив 2—2,5 км/сек).

О формэ сау алта а теоремея деспре вариация кантитэций де мишкаре ынлеснеште резолваря проблемелор ануме ын казуриле партикуларе, студияте май сус. Унеорь се апликэ ши казул



женерал ал теоремей. Сэ менционэм, кэ форцелле интериоаре ну инфлуенцияэ асупра вариаций кантитэций де мишкаре, ын партикулар, а системелор изолате, адикэ а системелор, каре ну интеракцияэ ку алте корпус дин афара системулуй консидерат сау ку медиул материал ынконжурэтор.

Форцелле интериоаре ын системеле механиче неизолате, провокынд мишкаря пэрицлор сепарате але системулуй ын урма интеракциуний лор ку корпусиле ынконжурэтоаре сау ку медиул материал ынконжурэтор, пот да наштере форцелор екстериоаре суб формэ де форце але реакциуний легэтурилор, каре пот скимба кантитатя де мишкаре а системулуй.

### Теорема деспре мишкаря чентрулуй маселор системулуй

Уна дин консечинцеле теоремей деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй есте теорема деспре мишкаря чентрулуй маселор системулуй.

Конформ теоремей деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй (13) авем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}.$$

Кантитатя де мишкаре а системулуй поате фи калкулатэ дупэ формула (6)

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C,$$

унде  $\bar{v}_C$  есте витеза чентрулуй маселор;  $M$  — маса системулуй.

Субституинд (6) ын (13) ши консидерынд, кэ маса системулуй есте константэ, обцинем форма векториалэ а теоремей деспре мишкаря чентрулуй маселор

$$M \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

сау

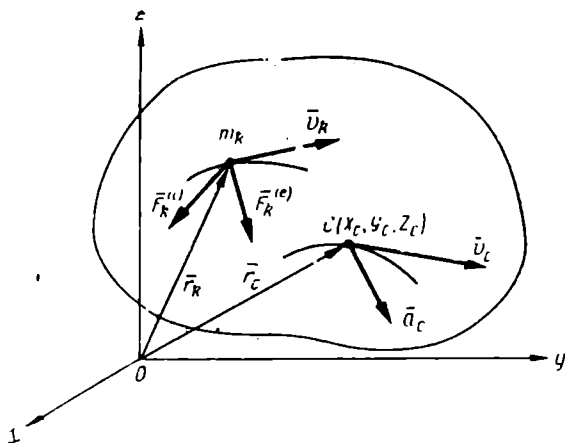
$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \quad (18)$$

унде  $\bar{a}_C$  есте акчелерация чентрулуй маселор. Теорема деспре мишкаря чентрулуй маселор поате фи формулатэ ын фелул урмэтор: *чентрул маселор системулуй се мишкэ ка ун пункт материал, маса кэруя есте егалэ ку маса ынтрегулуй систем, дакэ асупра корпуслуй акцияэ тоате форцелле екстериоаре, апликате системулуй механик консидерат.*

Проектынд (18) пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе (фиг. 208), обцинем екуацииле дифференциале але мишкэрий чентрулуй маселор:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^{(e)} \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^{(e)} \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

унде  $x_C$ ,  $y_C$  ши  $z_C$  сынт координателе чентрулуй маселор.



Фиг. 208.

Дин теорема деспре мишкарэ чентрулуй маселор пот фи обцинуте консечинце, аналожиче ку лежэ консервэрий кантитэций де мишкарэ ши ку проекция кантитэций де мишкарэ пе о аксэ оарекаре:

1. Дакэ векторул принципал ал форцелор екстериоаре, каре акционязэ асупра системулуй, есте нул, адикэ

$$\sum \bar{F}_k^{(e)} = 0,$$

дин (18) резултэ, кэ акчелерация чентрулуй маселор  $\bar{a}_C$  есте нулэ, ши прин урмаре, витеза чентрулуй маселор  $\bar{v}_C$  есте константэ дупэ мэриме ши дирекциие, адикэ чентрул маселор се мишкэ ректилиниу ши униформ ын виртута инерций. Ын партикулар, дакэ ын моментул инициал чентрул маселор се афлэ ын репаус, ел континуэ сэ рэмынэ ын репаус атыт тимп, кыт векторул принципал ал форцелор екстериоаре есте нул. Форце-

ле интериоре ну инфлуенциязэ асупра мишкэрий чентрулуй маселор. Прин урмаре, форцеле интериоре ну пот сэ скоатэ дин репаус сау сэ скимбе мишкаря чентрулуй маселор системулуй. Ынсэ форцеле интериоре але системулуй механик неизолат пот наште мишкаря пэрцилор сепарате але системулуй ши, прин урмаре, пот наште интеракциуня ку корпусиле екстериоре, провокынд апариция форцелор екстериоре але реакциунилор легэтурилор. Ачесте форце де реакциуне пот сэ модифиче мишкаря чентрулуй маселор сау сэ-л скоатэ дин екилибру.

Адмitem кэ ун ом стэ пе ун план оризонтал абсолут нетед ын апропиеря унуй корп (обстакол), ынтэрит пе ачест план. Омул ну поате сэ-шь скоатэ ку форцеле сале интериоре чентрул маселор дин екилибру ын дирекция оризонталэ, деоарече асупра луй ну акционязэ форце екстериоре ын ачестэ дирекция. Дакэ омул се респинже ку мыниле де ла обстакол, адикэ провакэ реакциуня обстаколулуй ку ажуторул форцелор интериоре, ел провакэ мишкаря чентрулуй маселор ын дирекция оризонталэ.

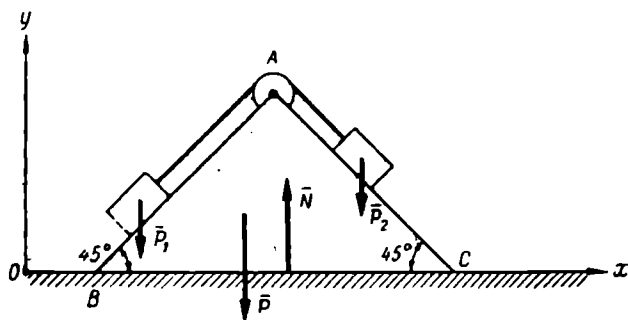
2. Дакэ проекция векторулуй принчипал ал форцелор екстериоре, каре акционязэ асупра системулуй пе о аксэ оарекаре, де екземплу  $Ox$ , есте нулэ, адикэ

$$\sum F_{ix}^{(e)} = 0,$$

дин (18') резултэ, кэ проекция  $\bar{x}_C$  а акцелерацией чентрулуй маселор пе ачестэ аксэ есте нулэ, прин урмаре, проекция витезей чентрулуй маселор есте о мэриме константэ, адикэ,

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const.}$$

Дакэ, ынсэ, ын моментул инициал  $v_{Cx} = 0$ , атунч  $\dot{x}_C = \text{const.}$ , адикэ ла мишкаря системулуй координата  $x_C$  а чентрулуй маселор ну вариязэ.



Фиг. 209.

Екземплул 1. Греутэциле  $P_1$  ши  $P_2$ , каре сынт уните ку ун фир инекстенсibil, трекут песте ун скрипете, лункэ пе фецеле латерале але уней пене дрептунгиче исосчеле (фиг. 209). Пана:



де унде

$$l = \frac{(P_1 + P_2) h}{P_1 + P_2 + P} = \frac{(2P_2 + P_2) h}{2P_2 + P_2 + 4P_2} = \frac{3}{7} h.$$

Мэримя  $l$  есте позитивэ, чей че конфирмэ, кэ пана ынтр'адевэр с'а депласат ын сенсул аксей  $Ox$ .

**Екземплул 2.** Роторул ку греутатя  $P_2 = 300$  н ал унуй електромотор де греутате  $P_1 = 700$  н фаче  $n = 980$  рот/мин, ротинду-се ын сенсул мишкэрий ачелор часорникулуй (фиг. 210). Даторитэ асиметрией центрул де греутате ал роторулуй се гэсеште ла дистанца  $l = 5$  см де ла акса де ротацие. Сэ се детермине форца оризонталэ, ку каре моторул акциянезэ асупра шурубурилор де фиксаре, ши пресиуня вертикалэ асупра поделей.

**Резолваре.** Адмитем кэ ын моментул  $t = 0$  центрул маселор роторулуй  $C_p$  се афла пе акса  $Oy$ . Координателе центрулуй маселор роторулуй  $x_2$  ши  $y_2$  ын моментул  $t$  сынт

$$x_2 = l \sin \varphi = l \sin \omega t; \quad y_2 = l \cos \varphi = l \cos \omega t,$$

унде

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 980}{40} = \frac{98}{3} \pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

Пентру а детермина пресиуня моторулуй асупра шурубурилор ши поделей вом консидера дрепт систем механик моторул ын ынтрэжиме, асупра кэруя акциянезэ урмэтоареле форце екстериоре: ын дирекция оризонталэ—форца де акциуне а шурубурилор  $\bar{F}$ , яр ын дирекция вертикалэ—форцеле де греутате ши реакциуня нормалэ а поделей  $\bar{N}$ . Луынд орижина координателор ын центрул маселор корпулуй моторулуй, пентру координателе центрулуй маселор  $x_C$  ши  $y_C$  але моторулуй ын ынтрэжиме авем

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$

унде  $m_1$  ши  $m_2$  сынт респектив маселе корпулуй моторулуй ши а роторулуй, яр  $x_1$ ,  $y_1$  ши  $x_2$ ,  $y_2$ —координателе центрелор маселор.

Ын казул де фацэ центрул маселор корпулуй моторулуй есте ун пункт фикс ши се афлэ ын орижина координателор, прин урмаре,  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$  ши деч

$$x_C = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_2 x_2}{P_1 + P_2},$$
$$y_C = \frac{m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_2 y_2}{P_1 + P_2}.$$

Апликынд екуацииле дифференциале але мишкэрий центрулуй  
масселор моторулуй ын ынтрэжме авем

$$\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}_C=F; \quad \frac{P_1+P_2}{g}\ddot{y}_C=N-P_1-P_2, \quad (a)$$

унде  $\bar{F}$  есте форца, ку каре шурубуриле акционязэ асупра кор-  
пулуй моторулуй ын дирекции оризонталэ ориентатэ дупэ акса  $Ox$ ;  
 $\bar{N}'$ —реакциуня нормалэ а поделей.

Деоарече

$$\ddot{x}_C=-\frac{P_2}{P_1+P_2}l\omega^2\sin\omega t; \quad \ddot{y}_C=-\frac{P_2}{P_1+P_2}l\omega^2\cos\omega t,$$

дин (a)

$$F=-\frac{P_2}{g}l\omega^2\sin\omega t; \quad N=-\frac{P_2}{g}l\omega^2\cos\omega t+(P_1+P_2).$$

Форца  $\bar{F}'$  де акциуне а моторулуй асупра шурубурилор ши  
спресиуня  $\bar{N}'$  асупра поделей сынт

$$\bar{F}'=-\bar{F}; \quad \bar{N}'=-\bar{N}.$$

Валориле максиме але форцелор  $\bar{F}'_2$  ши  $\bar{N}'$

$$F'_{\max}=\frac{P_2}{g}l\omega^2\approx\frac{300\cdot5\cdot98^2\pi^2}{980\cdot9}=16200\text{ н}=16,2\text{ кн},$$

$$N'_{\max}=P_1+P_2+\frac{P_2}{g}l\omega^2\approx1000+16200\approx17200\text{ н}=17,2\text{ кн}.$$

#### **§ 4. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ МОМЕНТУЛУЙ ЧИНЕТИК** **МОМЕНТУЛ ЧИНЕТИК АЛ УНУЙ ПУНКТ ШИ АЛ УНУЙ СИСТЕМ**

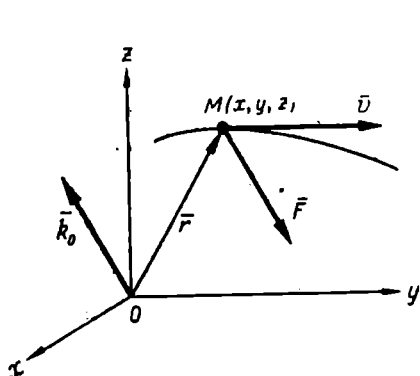
О карактеристикэ векториалэ а мишкэрий, паралел ку кан-  
титатя де мишкаре, есте моментул чинетик сау моментул кан-  
титэций де мишкаре. Пентру ун пункт материал ку маса  $m$ ,  
каре се мишкэ ку витеза  $\bar{v}$ , моментул чинетик  $\bar{k}_O$  ын рапорт  
ку ун центру оарекаре  $O$  се нумеште моментул кантитэций де  
мишкаре а пунктулуй ын рапорт ку ачест центру  $O$  (фиг. 211),  
адикэ

$$\bar{k}_O=\bar{M}_O(m\bar{v})=\bar{r}\times m\bar{v}. \quad (19)$$

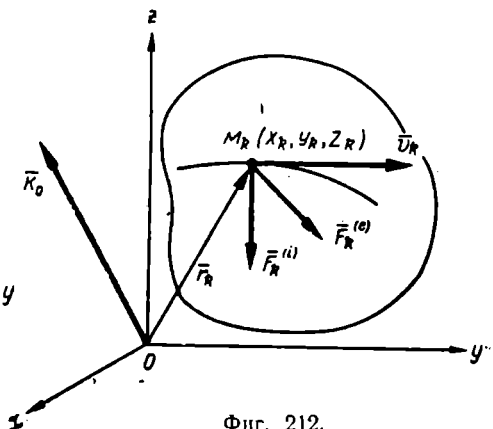
Моментул чинетик  $\bar{k}_O$  есте апликат ын пунктул  $O$ , ын рапорт  
ку каре ел се калкулязэ.

Дакэ пунктул  $O$  есте орижиня системулуй де координате картезиене ректангуларе, проектын дэ амбеле лэриць але експресией (19) пе ачесте аксе, обцинем моментеле чинетиче але пунктулуй ын рапорт ку акселе де координате:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x(\bar{m}\bar{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(\dot{y}z - z\dot{y}), \\ k_y &= M_y(\bar{m}\bar{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(\dot{z}x - x\dot{z}), \\ k_z &= M_z(\bar{m}\bar{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(\dot{x}y - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (19')$$



Фиг. 211.



Фиг. 212.

Моментул чинетик ал пунктулуй ын физикэ есте нумит десерь момент ал импульсулуй пунктулуй.

Дименсиуня моментулуй чинетик ын системул СИ есте  $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}$  сау  $\text{н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}$ .

Се нумеште момент чинетик  $\bar{K}_O$  ал системулуй, сау момент принципал ал кантитэций де мишкаре а системулуй ын рапорт ку ун пункт оарекаре  $O$ , сума векториалэ а моментелор чинетиче але пунктелор ачестуй систем ын рапорт ку пунктул консидерат  $O$  (фиг. 212), адикэ:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (20)$$

Моментул чинетик ал системулуй  $\bar{K}_O$  есте апликат ын пунктул  $O$ , ын рапорт ку каре ел се калкулязэ.

Проектын дэ формула (20) пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе, обцинем проекцииле моментулуй чинетик пе ачесте аксе сау моментеле чинетиче ын рапорт ку акселе де координате:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \\ K_y &= \sum M_y(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \\ K_z &= \sum M_z(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

**Моментул чинетик ал унуй рижид ын мишкарэ де ротацие ын рапорт ку акса де ротацие**

Сэ калкулэм моментул чинетик ал унуй рижид ын рапорт ку о аксэ де ротацие, дакэ рижидул се ротеште ку витеза ун-гюларэ  $\omega$  ын журул ачестей аксе фиксе (фиг. 213). Дин дефиниция моментулуй чинетик ын рапорт ку о аксэ [формулеле (20')] авем

$$K_z = \sum M_z (m_k \bar{v}_k).$$

Ла ротация рижидулуй ын журул аксей

$$v_k = r_k \omega,$$

яр кантитатэ де мишкарэ а пунктулуй  $m_k \bar{v}_k$  есте перпендикулярэ пе сегментул  $r_k$  ши се афлэ ын планул, перпендикуляр пе акса де ротацие  $Oz$ . Прин урмаре, моментул кантитэций де мишкарэ а унуй сингур пункт ын рапорт ку акса  $Oz$  есте

$$M_z (m_k \bar{v}_k) = r_k m_k v_k = m_k r_k^2 \omega.$$

Пентру корпул ынтрэг авем

$$K_z = \sum m_k r_k^2 \omega = \omega \sum m_k r_k^2 = \omega J_z,$$

адикэ

$$K_z = J_z \omega. \quad (21)$$

Прин урмаре, моментул чинетик ын рапорт ку о аксэ де ротацие ал рижидулуй, каре се ротеште ын журул ачестей аксе, есте егал ку продукул витезей унгюларе а рижидулуй прин моментул де инерцие ал луй ын рапорт ку акса де ротацие. Семнул моментулуй чинетик ын рапорт ку о аксэ коинчиде ку семнул витезей унгюларе а мишкэрий де ротацие ын журул ачестей аксе: моментул чинетик есте позитив, кынд ротирия аре лок ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник ши есте негатив ла ротирия ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник.

**Теорема деспре варнация моментулуй чинетик ал пунктулуй**

Лежя фундаменталэ а динамичий пентру ун пункт материал поате фи скрисэ ын фелул urmator:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Ынмулцинд векториал дин стынга амбеле пэрць але ачестей релаций ку раза вектоаре  $\bar{r}$  (везь фиг. 211), обцинем

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (22)$$



Ын партия дряптэ а ачестей формуле авем моментул форцей ын рапорт ку лунктул фикс  $O$ . Трансформэм партия стынгэ, апликынд формула дериватей продусулуй векториал

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v},$$

ынсэ

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$$

ка продусул векториал ал векторилор паралель.

Дупэ ачаста дин (22) авем

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F}$$

сау

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}), \quad (23)$$

адикэ прима дериватэ ын рапорт ку тимпул а моментулуй чинетик ал унуй пункт материал ын рапорт ку ун чентру оарекаре есте егалэ ку моментул форцей ын рапорт ку ачелаш чентру. Ачаста ши есте теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй пункт материал.

Проектынд формула (23) пе акселе системулуй де координате ректангуларе обцинем теоремеле деспре вариация моментулуй чинетик ал пунктулуй ын рапорт ку ачесте аксе де координате:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\bar{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\bar{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (23')$$

### Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем

Сэ апликэм пунктелор системулуй тоате форцеле интериоаре ши екстериоаре (фиг. 212), апой сэ скрием теорема деспре вариация моментулуй чинетик (23) пентру фиекаре пункт ын парте, адикэ

$$\frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}, \quad k=1, 2, \dots, N.$$

Сумынд пэрциле дин стынга ши дин дряпта але ачестор релаций пентру тоате  $N$  пункте але системулуй ши ынлокуинд суа деривателор прин деривата сумей, обцинем

$$\frac{d}{dt} \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)}.$$

Ын конформитате ку пропрнетэциле форцелор интерноаре (2)

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = 0,$$

ши ку дефиниция моментулуй чинетик ал системулуй (20)

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{K}_0,$$

прин урмаре

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Дакэ нотэм прин  $\bar{L}_O^{(e)}$  моментул принципал ал тутурор форцелор екстериоаре, адикэ

$$\bar{L}_O^{(e)} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)},$$

атунч теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй поате фи репрезентатэ ын фелул урмэтор

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{L}_O^{(e)}, \quad (24)$$

адикэ *прима дериватэ ын рапорт ку тимпул а моментулуй чинетик ал системулуй фацэ де ун пункт оарекаре есте егалэ ку сума векториалэ а моментелор тутурор форцелор екстериоаре, че акциязэ асуфра системулуй, ын рапорт ку пунктул консидерат.*

Проектынд (24) пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе обцинем теоремеле деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ын рапорт ку ачесте аксе де координате, адикэ

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^{(e)}; \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^{(e)}; \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^{(e)}. \quad (24')$$

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик пермите студиеря мишкэрий де ротацие а рижидулуй ын журул унуй пункт ши а уней аксе сау а мишкэрий де ротацие а рижидулуй ын казул женерал ал мишкэрий рижидулуй либер.

#### Лежиле консервэрий моментелор чинетиче

Сэ дедучем лежиле консервэрий моментелор чинетиче але унуй систем, консидерынд пунктул материал дрепт ун систем механик конституит динтр'ун сингур пункт. Е фиреск, кэ тоате форцеле, че акциязэ асуфра унуй сингур пункт материал, сынт форце екстериоаре. Аvem урмэтоареле казурь партикуларе але теоремей деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй:

I. Дакэ моментул принципал ын рапорт ку пунктул О ал

форцелор екстериоаре, есте нул, адикэ  $L_0^{(e)} = 0$ , дин (24) резултэ, кэ моментул чинетик ал системулуй  $\bar{K}_0$ , фацэ де ачелаш пункт, есте констант дупэ мэриме, дирекции ши сенс, адикэ

$$\bar{K}_0 = \text{const.} \quad (25)$$

Ачест каз партикулар ал теоремей деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй поартэ нумиря де *лежя консервэрий моментулуй чинетик*. Ын проекций пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе авем конформ ачестей лежы:

$$K_x = C_1; K_y = C_2; K_z = C_3, \quad (25')$$

унде  $C_1, C_2$  ши  $C_3$  сынт мэрымь константе.

Релацииле (25') сынт интеграле приме але екуациилор диференциале (3) але мишкэрий системулуй. Лежя консервэрий моментулуй чинетик ал системулуй аратэ, кэ нумай форцеле интериоаре ну пот скимба моментул чинетик ал системулуй, тот аша дупэ кум еле ну пот модифика кантитатя де мишкаре а луй.

2. Дакэ сума моментелор тутурор форцелор екстериоаре ын рапорт ку акса  $Ox$  есте нулэ, адикэ

$$L_x^{(e)} = \sum M_x(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

дин (24) реесе, кэ

$$K_x = \text{const}, \quad (26)$$

адикэ *ментул чинетик ал системулуй фацэ де о аксэ оарекаре де координате есте констант, дакэ сума моментелор форцелор екстериоаре ын рапорт ку ачастэ аксэ есте нулэ*. Ын партикулар ачаста обсервэм ын *казуриле*, кынд форцеле екстериоаре сынт паралеле ку акса сау о интерсектызэ. Дакэ ын казул унуй корп сау ал унуй систем де корпурь, каре пот сэ се ротяскэ ымпреунэ ын журул аксей фиксе  $Oz$ ,

$$L_z^{(e)} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

атунч

$$K_z = J_z \omega = \text{const}$$

сау

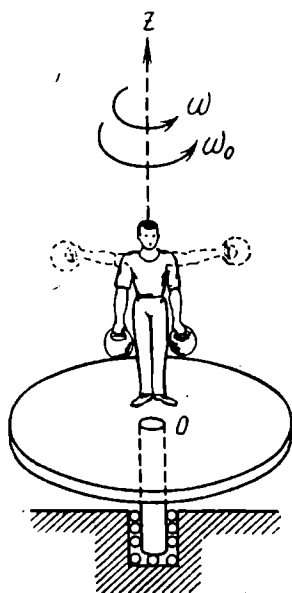
$$J_z \omega = J_{z0} \omega_0, \quad (27)$$

унде  $J_z$  ши  $\omega$  сынт моментул де инерции ал системулуй де корпурь ши витеза лор унгюларэ ын журул аксей де ротации ынтр'ун момент арбитрар  $t$ ;  $J_{z0}$  ши  $\omega_0$  — моментул де инерции ал корпурилор ши витеза лор унгюларэ ын моментул инициал, де екземплу пентру  $t=0$ .

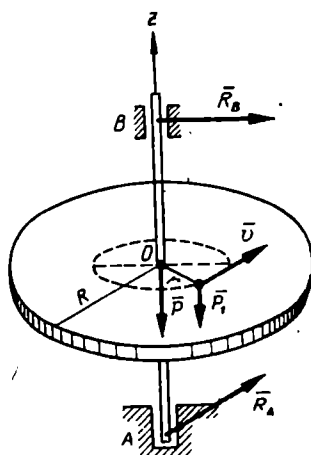
Форма (27) а лежий консервэрий моментулуй чинетик есте фолоситэ де акробаць, сэриторь, дансаторь ши алций. Импортанца ачестей лежь поате фи възутэ дин експериенца ку скаунулуй Жуковский (фиг. 214). Дакэ ун ом ку ниште греутэць ын мынь се ашазэ пе платформа оризонталэ а скаунулуй луй Жуковский, каре поате сэ се ротяскэ ын журул аксей вертикале фэрэ фрекаре, ши-й комуникэм о витезэ де ротацие ын журул ачестей аксе, атунч

$$J_z \omega_0 = J_z \omega,$$

деоарече форцеле екстериоаре сау сынт паралеле ку акса де ротацие (форцеле де греутате але омулуй, платформей ши греутэцилор) сау интерсектязэ ачастэ акса (реакциуня рулментулуй, дакэ нэглижэм форцеле де фрекаре).



Фиг. 214.



Фиг. 215.

Прин урмаре, дакэ омул ышь мэреште моментул сэу де инерциие, де екземплу, десфаче мыниле ын лэтурь, витеза де ротацие се микшорязэ ши инверс. Ын реалитате витеза унгюларэ, даторитэ екзистенцей фрекэрий ын рулментул скаунулуй ши а резистенцей аерулуй, се микшорязэ трептат.

*Екземплу.* Ун диск оможен оризонтал де разэ  $R$  ши греутате  $P$  поате сэ се ротяскэ фэрэ фрекаре ын журул уней аксе вертикале. Кум се ва скимба витеза унгюларэ а дискулуй, дакэ ун ом ку греутата  $P_1$ , каре ла ынчепут ста пе платформэ ын репаус ла дистанца  $r$  де ла акса, ва ынчепе сэ се миште пе еа ку витеза релативэ  $\vec{v}$  пе о чиркумферинцэ де разэ  $r$  (фиг. 215).

Резолваре, Фие витеза унгуларэ а дискулуй ын моментул инициал ера  $\omega_0$ , апой а девенит егалэ ку  $\omega$ . Форцеле екстерноаре, каре акциязэ асупра системулуй ом—диск, сынт паралеле ку акса  $Oz$  (греутэциле  $\bar{P}$  ши  $\bar{P}_1$ ) сау о интерсектязэ (реакциуниле  $\bar{R}_A$  ши  $\bar{R}_B$ ) ши деачея

$$\sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) = 0,$$

прин урмаре

$$K_z = \text{const}.$$

Сэ калкулэм моментул чинетик ал системулуй  $K_z$  ын доуэ моменте де тимп ши сэ егалэм експресииле обцинуте.

Қынд омул стэ ын репаус, моментул чинетик ал системулуй есте

$$K_z = J_z \omega_0 + \frac{P_1}{g} r^2 \omega_0.$$

Дупэ че омул ынчепе сэ се миште, моментул луй чинетик есте егал ку моментул чинетик даторитэ ротацией ымпреунэ ку дискул плус моментул чинетик даторитэ мишкэрий луй пе диск ын сенсул контрар мишкэрий ачелор де часорник, адикэ

$$K_z = J_z \omega + \frac{P_1}{g} r^2 \omega + \frac{P_1}{g} r v.$$

Егалынд амбеле експресиий але моментулуй чинетик, обцинем

$$J_z \omega + \frac{P_1}{g} r^2 \omega + \frac{P_1}{g} r v = J_z \omega_0 + \frac{P_1}{g} r^2 \omega_0,$$

де унде

$$\omega = \frac{(J_z g + P_1 r^2) \omega_0 - P_1 r v}{J_z g + P_1 r^2}.$$

Пентру дискул оможен

$$J_z = \frac{P}{g} \frac{R^2}{2},$$

ши деачея авем дефинитив

$$\omega = \frac{(P R^2 + 2 P_1 r^2) \omega_0 - 2 P_1 r v}{P R^2 + 2 P_1 r^2}.$$

Мишкаря унуй пункт суб акциуна форцей централе.

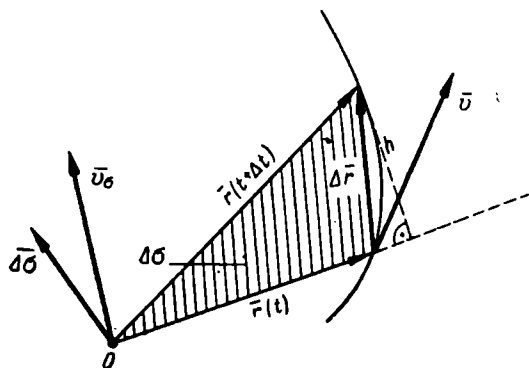
Теорема ариилор

Витеза ареоларэ. Теорема ариилор

Одатэ ку витеза  $\bar{v}$  ши акчелерация  $\bar{a}$ , ынтродусе ын чинематика пунктулуй материал, пот фи ынтродусе ши алте карактеристичь але мишкэрий пунктулуй, де екземплу, витеза ареоларэ ши акчелерация ареоларэ се нумеште витезэ ареоларэ  $\bar{v}_a$  сау  $\frac{d\bar{v}}{dt}$  а унуй пункт ын рапорт ку пунктул  $O$  мэрия векториалэ, детерминатэ де формула (фиг. 216)

$$\bar{v}_a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}, \quad (28)$$

унде векторул  $\Delta \bar{v}$  есте егал нумерик ку ария хашуратэ пе фигурэ, мэтуратэ де раза вектоаре  $\bar{r}$  а пунктулуй мобил ын интервалул де тимп  $\Delta t$ ; дирекция векторулуй  $\Delta \bar{v}$  се я пе перпендикулара дусэ пе супрафаца хашуратэ астфел, ынкыт дин вырфулуй ротация разей вектоаре  $\bar{r}$  се веде ын сенсул контрар мишкэрий ачелор де часорник.



Фиг. 216.

Дакэ пунктул материал се мишкэ пе ун план ши пунктул  $O$  есте луат ын ачелаш план, витеза ареоларэ есте перпендикулярэ пе ачест план. Витеза ареоларэ есте ынтодьяуна апликате ын пунктул, ын рапорт ку каре еа се калкулязэ.

Акчелерация ареоларэ  $\bar{a}_a$  поате фи дефинитэ ка деривата векторулуй витезей ареоларе ын рапорт ку тимпул, адикэ

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d^2\bar{v}}{dt^2}.$$

Витеза ареоларэ поате фи експриматэ прин моментулул витезей линиаре  $\bar{v}$  ын рапорт ку пунктул  $O$ , адикэ

$$\bar{v}_s = \frac{1}{2} (\bar{r} \times \bar{v}). \quad (29)$$

Конформ дефиницией продусул векториал  $(\bar{r} \times \bar{v})$  аре ачелаш сенс-ка ши  $\bar{v}_s$ . Прин урмаре, пентру а демонстра формула (29) есте де ажунс сэ демонстрэм, кэ валориле пэрцилор дин дряпта ши дин стынга сынт егале. Сэ калкулэм партя стынгэ а формулей (29):

$$|\bar{v}_s| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\sigma}|}{\Delta t},$$

ынсэ

$$|\Delta \bar{\sigma}| = \frac{1}{2} r h = \frac{1}{2} r |\Delta \bar{r}| \sin \widehat{(\bar{r}, \Delta \bar{r})}.$$

Прин урмаре,

$$|\bar{v}_s| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\sigma}|}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t} \sin \widehat{(\bar{r}, \Delta \bar{r})} \right] = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot \sin \widehat{(\bar{r}, \bar{v})},$$

чея че коинчиде ку модулул продусулуй векториал дин партя дряптэ а формулей (29).

Формула (29) пермите експримаря моментулуй чинетик прин витеза ареоларэ ын фелул урмэтор

$$\bar{k}_o = \bar{r} \times m \ddot{\bar{v}} = 2m \bar{v}_s. \quad (30)$$

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал пунктулуй (23) поате фи експриматэ респектив прин витеза ареоларэ

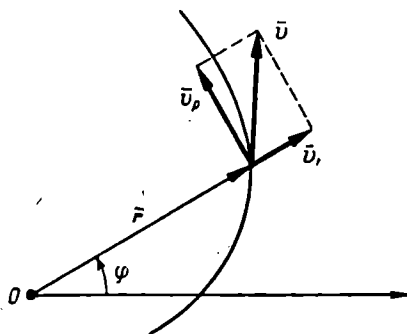
$$2m \frac{d\bar{v}_s}{dt} = \bar{M}_o(\bar{F}). \quad (31)$$

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал пунктулуй суб форма (31) есте нумитэ *теорема ариилор*.

Дакэ пунктул се мишкэ ынтр'ун план оарекаре, витеза ареоларэ а луй поате фи консидератэ о мэриме алжебрикэ. Ын ачест каз витеза ареоларэ а пунктулуй поате фи експриматэ прин координате поларе. Дин формула (29) авем пентру модулул витезей ареоларе

$$v_s = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin \widehat{(\bar{r}, \bar{v})}.$$

Дин чинематика пунктулуй ын системул де координате поларе (фиг. 217) се штие, кэ



Фиг. 217.

$$v \sin(\widehat{r, v}) = v_p = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Прин урмаре,

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (32)$$

Формула (32) експримэ витеза ареоларэ прин координате поларе ын казул мишкэрий плане а пунктулуй.

#### Мишкарэ унуй пункт суб акциуня уней форце централе

Се нумеште *форцэ централэ*  $\vec{F}$  о астфел де форцэ, линия де акциуне а кэрея трече ын орьче момент прин унул ши ачелаш пункт  $O$ , нумит центру ал ачестей форце.

Форца централэ поате фи де атракцие (ындрепатэ спре центру) ши де респинжере (ындрепатэ де ла центру). Моментул форцей централе ын рапорт ку центрул сэу есте нул

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = 0,$$

прин урмаре, ын конформитате ку теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй пункт (23) авем

$$\vec{k}_O = \vec{\text{const.}} \quad (33)$$

Бн проекций пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе ку центрул ын пунктул  $O$  дин формула (33) авем

$$\left. \begin{aligned} k_x &= m(\dot{y}z - z\dot{y}) = C_1, \\ k_y &= m(\dot{z}x - x\dot{z}) = C_2, \\ k_z &= m(\dot{x}y - y\dot{x}) = C_3, \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

унде  $C_1$ ,  $C_2$  ши  $C_3$  сынт ниште константе.

Ынмулцинд прима екуацие (33') ку  $x$ , а доуа ку  $y$ , а трея ку  $z$ , апой адунынд експресииле обцинуте, авем

$$O = C_1x + C_2y + C_3z,$$

адикэ координателе  $x$ ,  $y$ ,  $z$  але пунктулуй мобил сатисфак екуация планулуй, каре трече прин орижиня координателор.

Прин урмаре, траектория пунктулуй, каре се мишкэ суб ак-



циуня уней форце централе, есте о курбэ планэ, ситуатэ ын планул, че трече прин центрул форцей.

Ла мишкаря пунктулуй суб акциуня форцей централе

$$\vec{k}_0 = \text{const},$$

деачея пе база формулей (30) авем

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\text{const}},$$

ши, прин урмаре

$$v_a = \frac{d\sigma}{dt} = \text{const} \quad (34)$$

сау

$$\sigma = \sigma_0 + Ct.$$

Формула (34), експримэ аша нумита *интеграла ариилор*, адикэ ла мишкаря унуй пункт материал суб акциуня уней форце централе витеза ареоларэ есте о мэриме константэ ши, прин урмаре, ария мэтуратэ де раза вектоаре есте пропорционалэ ку тимул.

Цинынд конт де формула (32), путем репрезента интеграла ариилор (34) ын координате поларе ын фелул урмэтор

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \quad (35)$$

Ачэстэ формэ а интегралей ариилор се фолосеште пе ларг ла черчетаря мишкэрий планетелор ын журул Соарелуй ши ын женерал а диферитор сателиць, ын партикулар ши а сателицилор артифициаль ай Пэмынтулуй.

**Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем ын мишкаря релативэ фацэ де центрул маселор**

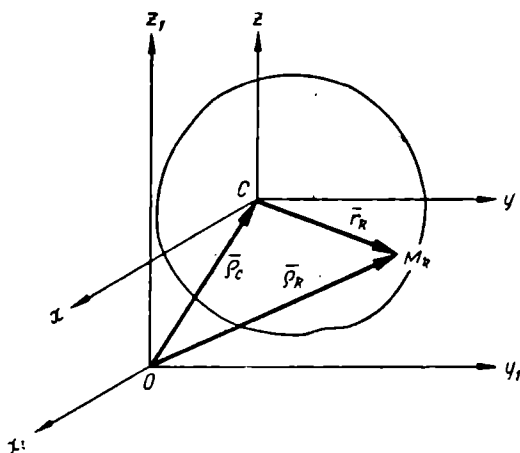
Сэ черчетэм мишкаря релативэ а унуй систем механик нумай фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляcie ымпреунэ ку центрул маселор системулуй.

Ынанте де а формула теорема респективэ сэ дедучем формула, дупэ каре се калкулязэ моментул чинетик ал системулуй ла дескомпунеря мишкэрий системулуй ын мишкаре релативэ ши ын мишкаре де транспорт.

**Формула моментулуй чинетик ал системулуй ын казул  
мишкэрий луй компусе**

Адмitem кэ ун систем механик се мишкэ ын рапорт ку системул де базэ де координате  $Ox_1y_1z_1$ . Луэм системул де координате мобил  $Cxyz$  ку орижина ын центрул маселор  $C$ , каре ефектуязэ о мишкаре де трансляции фацэ де системул де базэ де координате. Дин фигура 218 реесе, кэ ын орьче момент

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_C + \bar{r}_k.$$



Фиг. 218.

Луынд деривата де ла ачастэ идентитате ын рапорт ку тимпул, авем

$$\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_C}{dt} + \frac{d\bar{r}_k}{dt}$$

сау .

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_{kr},$$

унде  $\bar{v}_k$  есте витеза абсолутэ а пунктулуй  $M_k$ ;

$\bar{v}_C$  — витеза абсолутэ а чентрулуй маселор;

$\bar{v}_{kr} = \frac{d\bar{r}_k}{dt}$  — витеза релативэ а пунктулуй  $M_k$  ын рапорт ку системул де координате мобил  $Cxyz$ .

Дупэ формула (20), ын конформитате ку дефиниция моментулуй чинетик  $\bar{K}_O$  ын рапорт ку пунктул фикс  $O$ , авем урмэтоаря експресиe пентру моментул чинетик ын мишкаря абсолутэ а системулуй фацэ де системул де координате  $Ox_1y_1z_1$

$$\bar{K}_O = \sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_k.$$

Субституиунд валориле мэримилор  $\bar{p}_k$  ши  $\bar{v}_k$  ын ачаствэ формулэ ши ефектуынд ниште трансформэрь симпле, обцинем:

$$\bar{K}_0 = \bar{p}_C \times \bar{v}_C \sum m_k + \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_{kr} + \bar{p}_C \times \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} + (\sum m_k \bar{r}_k) \times \bar{v}_C. \quad (36)$$

Ын ачаствэ формулэ  $\sum m_k = M$  есте маса системулуй. Афарэ де ачаства се поате демонстра, кэ ултимий дой термень ай экспрессней (36) сынт егаль ку zero. Ынтр'адевр, ын конформитате ку дефиниция разей вектоаре а центрулуй маселор ын рапорт ку ачест центру ал маселор, авем

$$0 = \bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}.$$

Прин урмаре,  $\sum m_k \bar{r}_k = 0$  ши деч ултимул термен дин (36) есте де асемения егал ку zero. Трансформэм челэалат термен

$$\bar{p}_C \times \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{p}_C \times \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k).$$

Ачест термен де асемения есте егал ку zero, деоарече  $\sum m_k \bar{r}_k = 0$  ын орьче момент. Аспектул финал ал формулей (36) есте

$$\bar{K}_0 = \bar{p}_C \times M \bar{v}_C + \bar{K}_C^{(r)}, \quad (37)$$

унде

$$\bar{K}_C^{(r)} = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_{kr}$$

есте моментул чинетик ал системулуй ын рапорт ку центрул маселор ын мишкаря релативэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция ымпреунэ ку центрул маселор, адикэ фацэ де системул де координате *Схуз*.

Формула (37) аратэ, кэ моментул чинетик ал системулуй ын рапорт ку пунктул фикс *O* ла мишкаря абсолутэ а са есте егал ку сума векториалэ а моментулуй чинетик ал центрулуй маселор ын рапорт ку ачелаш пункт, дакэ консидерэм, кэ ын центрул маселор есте концентратэ ынтряга масэ а системулуй, плус моментул чинетик ал системулуй ын рапорт ку центрул маселор ла мишкаря релативэ а системулуй механик фацэ де системул де координате мобил, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция ымпреунэ ку центрул маселор.

**Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем ын мишкаря релативэ фацэ де чентрул маселор**

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем фацэ де пунктул фикс  $O$  ын мишкаря абсолютэ се експримэ асфел

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Субституинд валориле  $\bar{\rho}_k$  ши  $\bar{K}_O$  ын формула (37), деривынд ши групынд термений, авем:

$$\frac{d\bar{\rho}_C}{dt} \times M\bar{v}_C + \bar{\rho}_C \times M \frac{d\bar{v}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{\rho}_C \times \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Трекынд примул термен дин партя дряптэ ын партя стынгэ ши цинынд конт, кэ

$$\frac{d\bar{\rho}_C}{dt} \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0$$

ка продусул векториал ал векторилор паралелъ, дупэ униря терменилор обцинем

$$\bar{\rho}_C \times \left[ M \frac{d\bar{v}_C}{dt} - \sum \bar{F}_k^{(e)} \right] + \frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}.$$

Експресия дин парантезеле патрате ын ачастэ формулэ есте нулэ пе база теоремей деспре мишкаря чентрулуй маселор сислуй (18). Деачея формула я аспектуй

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

сау

$$\frac{d\bar{K}_C^{(r)}}{dt} = \bar{L}_C^{(e)}, \quad (38)$$

унде

$$\bar{L}_C^{(e)} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}$$

есте моментул принципал ал тутурор форцелор екстериоаре ын рапорт ку чентрул маселор.

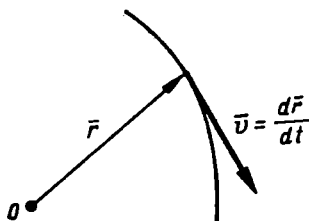
Формула (38) експримэ токмай теорема каре не интересязэ. Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем ын рапорт ку чентрул маселор ла мишкаря релативэ а системулуй фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляце ымпреунэ ку чентрул маселор, се формулязэ тот аша ка ши кум чентрул маселор ар фи фикс.

Ачастэ теоремэ се апликэ ла студиул пэрций де ротацие а мишкэрий плане ши а мишкэрий рижидулуй либер фацэ де чентрул маселор.

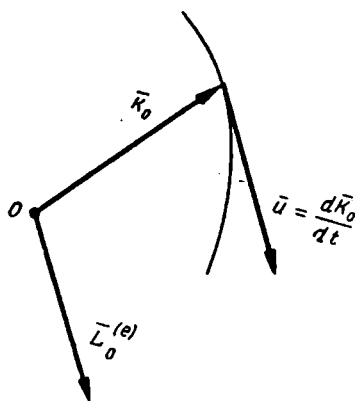
### Теорема луй Резал

Теоремей деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй механик и се поате да урмэтоаря интерпретаре чинематикэ. Дин чинематика пунктулуй се штие, кэ витеза пунктулуй поате фи консидератэ дрепт витеза екстремитэций разей вектоаре а пунктулуй мобил сау ка витеза вариацией разей вектоаре, дусэ ын пунктул мобил динтр'ун пункт оарекаре фикс (фиг. 219).

Траектория пунктулуй мобил есте ын ачест каз ходографул разей вектоаре  $\vec{r}$ , яр витеза пунктулуй, ориентатэ дупэ танжента дусэ ла ачест ходограф, есте егалэ ку прима дериватэ а разей вектоаре ын рапорт ку тимпул. Ын мод аналог, деривата моментулуй чинетик ын рапорт ку тимпул



Фиг. 219.



Фиг. 220.

поате фи консидератэ дрепт витеза екстремитэций ачестуй вектор ла мишкаря пе ходографул моментулуй чинетик (фиг. 220). Ачастэ витезэ ну есте витеза обышнуитэ а пунктулуй, деоарече дименсиуниле моментулуй чинетик ши а разей вектоаре сынт диферите. Ачаста есте витеза вариацией векторулуй моментулуй чинетик. Прин урмаре, дакэ нотэм прин  $\vec{u}$  витеза екстремитэций моментулуй чинетик, адикэ

$$\vec{u} = \frac{d\vec{K}_0}{dt},$$

атунч теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй (24) поате фи репрезентатэ суб о формэ ноуэ — суб форма аша нумитей теореме а луй Резал:

$$\vec{u} = \vec{L}_0^e.$$

Астфел, теорема луй Резал поате фи формулатэ ын фелул ур-мэтор: *ла мишкаря системулуй механик витеза пунктулуй, каре коинчиде ку экстремитатя векторулуй моментулуй чинетик, ын мишкаря са пе ходографул ачестуй вектор есте егэлэ дупэ мэри-ме ши паралелэ дупэ дирекция ку моментул принципал ал туту-рор форцелор екстериоаре, каре акциянэзэ асупра системулуй. Моментул чинетик ал системулуй ши моментул принципал ал ту-турор форцелор екстериоаре се калкулязэ фацэ де унул ши аче-лаш пункт.*

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ын рапорт ку центрул маселор ла мишкаря релативэ а системулуй механик поате фи формулатэ де асемени суб форма теоремей луй Резал.

Есте комод сэ апликэм теорема луй Резал май ку самэ ла студиул апроксиматив ал мишкэрий жироскоапелор ку витезе унгуларе марь.

Ын мод анолог поате фи формулатэ суб форма теоремей луй Резал ши теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а си-стемулуй: *ла мишкаря системулуй механик витеза пунктулуй, каре коинчиде ку экстремитатя векторулуй кантитэций де мишка-ре, есте егэлэ дупэ мэриме ши паралелэ дупэ дирекция ку век-торул принципал ал тутурор форцелор екстериоаре, че акциянэзэ асупра системулуй.*

## § 5. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ ЕНЕРЖИЕЙ ЧИНЕТИЧЕ

Пентру а формула теорема деспре вариация енержией чине-тиче есте нечесар сэ ынтродучем о ноциуне ноуэ — лукрул меха-ник ал уней форце ши сэ черчетэм челе май симпле методе де калкул але луй.

### Лукрул механик ал уней форце

Лукрул механик ал уней форце пе о депласаре оарекаре есте уна дин карактеристичиле фундаментале але акциуний форцей пе ачастэ депласаре. Сэ черчетэм лукрул механик элементар, лукрул механик тотал ши путеря.

### Лукрул механик элементар ал уней форце

Лукрул механик элементар  $dA$  ал форцей  $\vec{F}$  пе о депласаре элементарэ (инфинит де микэ)  $ds$  се детерминэ ын фелул урмэ-тор (фиг. 221):

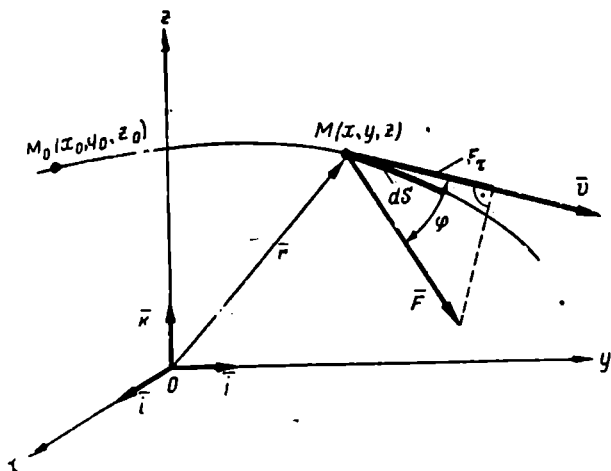
$$dA = F_{\parallel} ds, \quad (40)$$

унде  $F_{\parallel}$  есте проекция форцей  $\vec{F}$  пе дирекция витезей пункту-

луй сау пе дирекция депласэрий елементар, каре коинчиде ла лимитэ ку дирекция витезей пунктулуй.

Лукрул механик елементар есте о мэриме скаларэ. Семнул луй се детерминэ комплект прин семнул проекцией  $F_x$  а форцей, деоарече депласаря  $ds$  есте консидератэ позитивэ. Дакэ  $F_x > 0$ , атунч  $dA > 0$ , яр пенстру  $F_x < 0$   $dA < 0$ . Циньнд конт', кэ  $F_x = F \cos \varphi$ , унде  $\varphi$  есте унгул динтре форца  $\vec{F}$  ши дирекция витезей пунктулуй  $\vec{v}$ , путем пуне експресия (40) суб форма

$$dA = F \cos \varphi ds. \quad (41)$$



Фиг. 221.

Ын ачастэ формулэ  $F$  ши  $ds$  сынт мэримь позитиве, аша кэ семнул лукрулуй механик елементар  $dA$  се детерминэ прин семнул  $\cos \varphi$ . Дакэ  $\varphi$  есте ун унгь аскуцит, лукрул механик  $dA$  есте позитив; дакэ  $\varphi$  есте ун унгь обтуз, лукрул механик  $dA$  есте негатив. Аша дар, *лукрул механик елементар ал уней форце есте егал ку продусул динтре депласаря елементарэ ши проекция форцей пе ачастэ депласаре.*

Сэ менционэм унеле казурь партикуларе але формулей (41):

$$\varphi = 0^\circ, \quad dA = Fds;$$

$$\varphi = 90^\circ, \quad dA = 0;$$

$$\varphi = 180^\circ, \quad dA = -Fds.$$

Астфел лукрул механик елементар ал форцей, перпендикуларе пе депласаря елементарэ, есте нул. Ын партикулар, лукрул механик ал компонентей  $\vec{F}_n$  а форцей, нормале ла витезэ, есте нул.

Сэ индикэм ши алте формуле, каре се фолосеск пентру калкуларя лукрулуй механик елементар ал форцей. Дин чинематика пунктулуй материал куноаштем, кэ

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}; \quad v = |\bar{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

Прин урмаре

$$ds = |d\bar{r}| = v dt.$$

Ачаста не пермите а скрие ын конформитате, ку (41) урмэ-тоаря формулэ пентру лукрул механик елементар:

$$dA = F |d\bar{r}| \cos \varphi = \bar{F} d\bar{r}, \quad (42)$$

адикэ *лукрул механик елементар ал форцей есте егал ку продусул скалар ал форцей прин дифференциала разей вектора а пунктулуй де апликаре ал форцей.*

Деоарече  $d\bar{r} = \bar{v} dt$ , дин (42) авем

$$dA = \bar{F} d\bar{r} = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} dt \bar{v}, \quad (43)$$

адикэ *лукрул механик елементар ал форцей есте егал ку продусул скалар динтре импулсул елементар ал форцей ши витеза пунктулуй.*

Сэ дескомпунем форца  $\bar{F}$  ши раза векторе  $\bar{r}$  ын компонен-те пе акселе де координате

$$\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k},$$

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k},$$

прин урмаре, пентру  $d\bar{r}$  дин ултима формулэ авем

$$d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}.$$

Субституинд валориле мэримилор  $\bar{F}$  ши  $d\bar{r}$  ын (42), обцинем

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (44)$$

Формула (44) есте нумитэ де обичей експресие аналитикэ а лукрулуй механик елементар. Експресия (44) а лукрулуй механик елементар се асямэнэ дупэ формэ ку дифференциала тоталэ а уней функций де координателе пунктулуй, ынсэ ын жёнерал лукрул механик елементар ну есте о дифференциалэ тоталэ. Нумай ын казул уней класе спечияле де форце — а аша нумитор *форце потенциале*, каре вор фи студияте май тырзиу, лукрул механик елементар есте дифференциала тоталэ а уней функций де координателе пунктулуй.



### Лукрул механик тотал ал уней форце

Пентру а калкула лукрул механик тотал ал форцей  $\bar{F}$  пе о депласаре де ла пунктул  $M_0$  пынэ ла пунктул  $M$  ымпэрцим ачаствэ депласаре ын  $n$  депласэрь астфел, ынкыт фиекаре депласаре ла лимитэ сэ фие о депласаре елементарэ. Атунч лукрул механик тотал  $A$  есте

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n dA_k,$$

унде  $dA_k$  есте лукрул механик ефектуат пе депласаря елементарэ  $k$ , ын каре есте ымпэрцитэ депласаря тоталэ.

Сума дин дефиниция лукрулуй механик тотал есте сума интегралэ дин дефиниция интегралей курбилиний пе порциуня  $M_0M$  а курбей. Ачаста не пермите ка, фолосинд формула (40) а лукрулуй механик елементар, сэ скрием пентру лукрул механик тотал

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F}_i ds. \quad (45)$$

Фолосинд алте експресий але лукрулуй механик елементар, путем репрезента лукрул механик тотал ал форцей ын фелул урмэтор:

$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} d\bar{r} = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \quad (46)$$

сау

$$A = \int_0^t \bar{F} v dt, \quad (47)$$

унде моментул  $t=0$  кореспунде пунктулуй  $M_0$ , яр моментул  $t$  — пунктулуй  $M$ .

Формула (47) есте комодэ ла калкуларя лукрулуй механик ал форцей ын казул кынд куноаштем форца ка функции де тимп. Сэ менционэм, кэ дин дефиницииле лукрулуй механик елементар ши але лукрулуй механик тотал резултэ урмэтоареле проприетэць:

1) лукрул механик ал форцей резултанте пе о депласаре оарекаре есте егал ку сума алгебрикэ а лукрурилулор механиче але форцелор компоненте пе ачеш депласаре;

2) лукрул механик ал форцей пе о депласаре компусэ есте егал ку сума лукрурилулор механиче але ачестей форце пе депласэриле компоненте, ын каре есте ымпэрцитэ ын мод арбитрар депласаря компусэ.

Есте евидент, кэ-й суфичиент сэ демонстрэм прима проприетате нумай пентру лукрул механик елементар ал форцей резултанте.

Дакэ форца  $\bar{R}$  есте форца резултантэ а системулуй де форце  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k)$ , аликате пунктулуй консидерат, еа есте егалэ ку сума жеометрике а ачестор форце. Атунч дин дефиниция лукрулуй механик елементар ал форцей реесе, кэ

$$\bar{R}d\bar{r}=(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\dots+\bar{F}_k)d\bar{r}=\bar{F}_1d\bar{r}+\bar{F}_2d\bar{r}+\dots+\bar{F}_kd\bar{r}.$$

Проприетатя а доуа, индикатэ май сус, резултэ немижлочит дин посибилитатя ымпэрширий арбитраре а унуй интервал компус де интеграре ын интервале компоненте, интеграла дефинитэ пе интервалул компус фиинд егалэ ку сума интегралелор пе интервалеле компоненте.

Дименсиуня лукрулуй механик тотал ши а лукрулуй механик елементар есте уна ши ачеш. Ын системул СИ еа есте  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{сек}^2}$  сау *нм*. Лукрул механик ын ачест систем се мэсоарэ ын джоуль:  $1 \text{ дж} = 1 \text{ нм}$ .

Дакэ проекция форцей пе дирекция витезей  $F_x$  есте о мэриме константэ, дин (45) авем

$$A = F_x s,$$

унде  $s$  есте друмул паркурс де пункт.

Фолосинд  $F_x = F \cos \varphi$ , путем презента ултима формулэ ын фелул урмэтор

$$A = F s \cos \varphi.$$

Менционэм, кэ ын ачестэ формулэ атыт  $F$  кыт ши  $\varphi$  пот фи вариабиле, ынсэ  $F \cos \varphi$  есте о мэриме константэ. Ачаста аре лок ын казул, кынд  $F$  ши  $\varphi$  сынт константе. Дакэ суплиментар унгул  $\varphi = 0^\circ$  сау  $180^\circ$ , атунч

$$A = \pm F s,$$

ачастэ формулэ фиинд апликабилэ атыт ын казул мишкэрий ректилиний кыт ши ын казул мишкэрий курбилиний. Пентру ачаста есте нечесар ка форца  $\bar{F}$  сэ фие константэ дупэ мэриме ши мереу ындрептатэ дупэ танжента дусэ ла траектория пунктулуй. Прин урмаре, ын казул уней траекторий ректилиний форца  $\bar{F}$  требуе сэ фие ындрептатэ дупэ траекторие ын ачелаш сенс.

## Путеря

Путеря сау капачитатя де лукру а уней сурсе де форцэ се мэсоарэ ку лукрул механик, ефектуат ынтр'о унитате де тимп. Астфел, дупэ дефиницие, путеря  $W$  есте

$$W = \frac{dA}{dt}.$$

Циньнд конт де формула (43) пентру лукрул механик елементар, путем репрезента путеря  $W$  ын фелул урмэтор

$$W = \bar{F}\bar{v} = Fv \cos \varphi. \quad (48)$$

Прин урмаре, *путеря есте егалэ ку продусл скалар ал форцей прин витеза пунктулуй*. Дин формула (48) реесе, кэ де кыте орь есте май маре витеза, де атытя орь есте май микэ форца, путеря фиинд ачеш. Деч, пентру а обцине о форцэ май маре де ла о сурсэ де форцэ де путере константэ есте нечесар сэ микшорэм витеза. Аша, де екземплу, пентру а мэри путеря де тракциуне а локомотивей есте нечесар сэ микшорэм витеза тренулуй.

Дименсиуня путерий ын системул СИ есте  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{сек}^3}$  сау  $\frac{\text{нм}}{\text{сек}}$ .

Путеря се мэсоарэ ын ваць:  $1 \text{ в} = 1 \frac{\text{дж}}{\text{сек}}$ .

### Екземпле де калкул але лукрулуй механик ал форцей

Ын казул женерал лукрул механик ал форцей депинде де характерул мишкэрий пунктулуй суб акциуня форцей консидерате. Прин урмаре, пентру а калкула лукрул механик требие сэ куноаштем мишкаря пунктулуй. Дар ын натурэ екзистэ форце ши екземпле але мишкэрий, кынд лукрул механик поате фи калкулат дестул де симплу, куноскынд позиция инициалэ ши финалэ а пунктулуй.

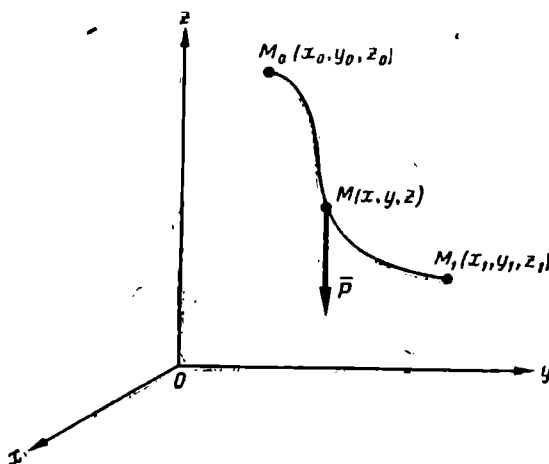
Сэ калкулэм лукрул механик ал форцей де греутате, лукрул механик ал форцей еластиче линиаре, каре вариязэ дупэ лежя луй Хук, ши лукрул механик ал форцей, апликате ынтр'ун пункт оарекаре ал рижидулуй ын диферите казурь але мишкэрий луй. Вом индика челе май симпле казурь але мишкэрий, кынд лукрул механик есте нул. Астфел, лукрул механик ал форцей есте нул, дакэ пунктул де апликацие ал ей рэмыне тот тимпул ын репаус сау дакэ витеза пунктулуй де апликацие ал форцей есте нулэ, де екземплу, ын казул форцей апликате ын чентрул инстантанеу де ротацие ла мишкаря план-паралелэ а рижидулуй, сау ын казул, кынд пунктул де апликацие се афлэ ле акса инстантанеу де ротацие ла мишкаря рижидулуй ку ун пункт фикс. Ачесте казурь се ынтылнеск ла калкуляря лукрулуй механик ал

форцей де фрекаре, апликате ын пунктул де контакт а доуэ корпусь, кынд ачестя се ростоголеск унул не алтул. Ын ачест каз лукрул механик ал форцей де фрекаре есте нул.

### Лукрул механик ал форцей де греутате

Форца де греутате  $\bar{P}$  а унул пункт материал ку маса  $m$  ын апропиеря пэмынтулуй поате фи консидератэ константэ, егалэ дупэ мэриме ку  $mg$  ши ындрептатэ вертикал ын жос. Дакэ луэм системул де координате  $Oxyz$  ку акса  $Oz$  ындрептатэ вертикал ын сус (фиг. 222), атунч

$$P_x = 0; P_y = 0; P_z = -mg.$$



Фиг. 222.

Калкулынд дупэ формула (46) лукрул механик  $A$  ал форцей  $\bar{P}$  пентру депласаря дин пунктул  $M_0$  ын пунктул  $M$  авем

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_0}^M (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = \\ &= mg(z_0 - z_1), \end{aligned}$$

сау

$$A = mgh, \quad (49)$$

унде  $h = z_0 - z_1$  есте ынэлцимя, ку каре кобоарэ пунктул.

Ла ридикаря пунктлул ынэлцимя  $h$  есте негативэ. Прин ур-маре, лукрул механик ал форцей де греутате  $P = mg$  ын казул женерал есте

$$A = \pm Ph, \quad (50)$$

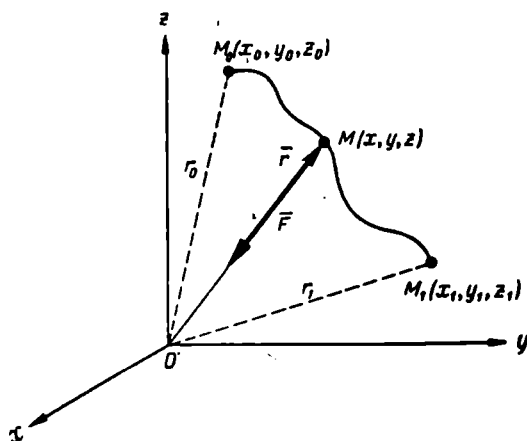
адикэ лукрул меканик ал форцей де греутате есте егал ку проду-  
сул ачестей форце прин ынэлцимья де коборыре (лукрул меканик  
есте позитив) сау прин ынэлцимья де ридикаре (лукрул меканик  
есте негатив). Дин формула (50) реесе, кэ лукрул меканик ал  
форцей де греутате ну депинде де форма траекторией динтре  
пунктеле  $M_0$  ши  $M$ . Дакэ ачесте пункте коинчид (де екземплу, ын  
казул унуй друм ынкис), лукрул меканик ал форцей де греутате  
есте нул.

### Лукрул меканик ал форцей еластиче линиаре

Се нумеште форцэ еластикэ линиарэ форца, каре акцияязэ  
дупэ лежя луй Хук (фиг. 223).

$$\vec{F} = -c\vec{r},$$

унде  $\vec{r}$  есте дистанца динтре пунктул консидерат  $M$  ши пунктул  
екилибрулуй статик, адикэ пунктул, ын каре ачестэ форцэ есте  
нулэ;  $c$  — ун коефициент констант — коефициентул де еластичи-  
тате.



Фиг. 223.

Дакэ луэм орижия координателор ын пунктул екилибрулуй  
статик, атунч

$$F_x = -cx; F_y = -cy; F_z = -cz.$$

Сэ калкулэм лукрул меканик пентру депласаря дин пунктул  
 $M_0$  ын пунктул  $M_1$

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c \int_{M_0}^{M_1} (x dx + y dy + z dz) = -c \int_{r_0}^{r_1} r dr,$$

деоарече

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$

унде

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Дупэ интеграре авем

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2). \quad (51)$$

Ачаства есте формула пентру калкуларя лукрулуй механик ал форцей еластиче линиаре. Дакэ пунктул  $M_0$  коинчиде ку пунктул екилибрулуй статик  $O$ , атунч  $r_0 = 0$ , яр пентру лукрул механик ал форцей ефектуат ла депласаря дин пунктул  $O$  ын пунктул  $M$  авем

$$A = -\frac{c}{2}r^2.$$

Аич  $r$  есте дистанца чя май микэ динтре пунктул консидерат ши пунктул екилибрулуй статик. Ачастэ дистанца се нотязэ ку  $\lambda$  ши се нумеште деформация. Астфел

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2, \quad (52)$$

адикэ лукрул механик ал форцей еластиче линиаре ла депласаря дин позиция екилибрулуй статик есте ынтотдяуна негатив ши егал ку жумэтатая продусулуй коэфичиентулуй де рижидитате прин патратул деформацией. Дин формулеле (51) сау (52) рее се кэ лукрул механик ал форцей еластиче линиаре ну депинде де форма депласэрий, яр лукрул механик пе о депласаре оарекаре ынкисэ есте нул.

**Лукрул механик ал уней форце, апликате ынтр'ун пункт оарекаре ал рижидулуй**

Сэ дедучем формулеле пентру калкуларя лукрулуй механик элементар ши тотал ал форцей, апликате ынтр'ун пункт оарекаре ал рижидулуй, каре ефектуязэ о оарекаре мишкаре. Сэ черчетэм май ынтый мишкаря де трансляция ши мишкаря де ротация а рижидулуй, апой казул жёнерал ал мишкэрий луй.

Ла мишкаря де трансляция а рижидулуй витезеле тутурор пунктелор луй сынт егале дупэ мэриме ши ау ачеяш дирекция ши сенс (фиг. 224). Прин урмаре, дакэ форца  $\vec{F}$  есте апликатэ ын пунктул  $M_k$ , апой деоарече  $\vec{v}_k = \vec{v}$ , авем

$$dA = \vec{F} \vec{v}_k dt = \vec{F} \vec{v} dt = F d\bar{r}, \quad (53)$$

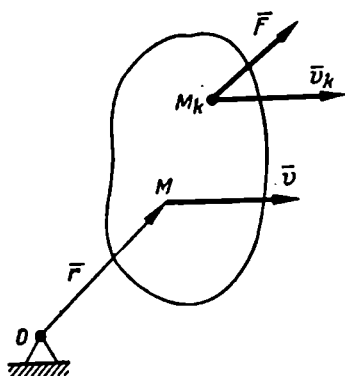
унде  $\bar{r}$  есте раза вектоаре а унуй пункт арбитрар ал рижидулуй.

Лукрул механик тотал  $A$  пе о депласаре оарекаре есте

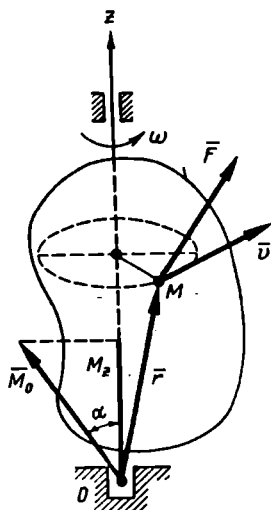
$$A = \int_{M_0}^M \bar{F} d\bar{r}. \quad (54)$$

Ла мишкаря де ротацие а рижидулуй ын журул аксей фиксе витеза пунктулуй  $M$  поате фи калкулатэ дупэ формула векторналә а луй Ейлер (фиг. 225)

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$



Фиг. 224.



Фиг. 225.

Лукрул механик елементар ал форцей  $\bar{F}$  се детерминэ дупэ формула

$$dA = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$

Ын продусул векториал микст, каре поате фи експримат суб формэ де детерминант, поате фи ефектуатэ пермутаря чикликэ а факторилор

$$\bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} (\bar{r} \times \bar{F})$$

ши

$$dA = \bar{\omega} (\bar{r} \times \bar{F}) dt = \bar{\omega} \bar{M}_O dt = \omega dt M_O \cos \alpha,$$

деоарече

$$\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O (\bar{F}) = \bar{M}_O$$

есте моментул форцей ын рапорт ку пунктул  $O$ .

Цинынд конт, кэ  $M_0 \cos \alpha = M_z$  есте моментул форцей ын рапорт ку акса де ротацие  $Oz$  ши  $\omega dt = d\varphi$ , обцинем дефинитив

$$dA = M_z d\varphi. \quad (55)$$

Прин урмаре, лукрул механик элементар ал форцей, аплика-те ынтр'ун пункт оарекаре ал корпулуй, каре се ротеште ын жу-рул уней аксе фиксе, есте егал ку продукул моментулуй форцей ын рапорт ку акса де ротацие прин дифференциала унгулуй де ро-тацие ал корпулуй.

Лукрул механик тотал  $A$  есте

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi. \quad (56)$$

Ын казул партикулар, кынд моментул форцей ын рапорт ку акса де ротацие есте о мэриме константэ, адикэ  $M_z(\bar{F}) = \text{const}$ , лукрул механик се детерминэ дупэ формула

$$A = M_z \varphi, \quad (57)$$

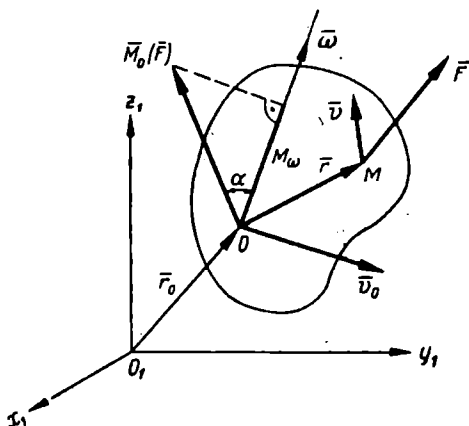
унде  $\varphi$  есте унгул де ротацие ал корпулуй.

Деоарече

$$dA = \bar{\omega} \bar{M}_0(\bar{F}) dt,$$

результэ, кэ путеря  $W$  ла ротация рижидулуй ын журул уней аксе фиксе есте

$$W = \frac{dA}{dt} = \bar{\omega} \bar{M}_0(\bar{F}) = \omega M_z(\bar{F}), \quad (58)$$



Фиг. 226.

адикэ путеря форцей аплика-те унуй рижид, каре се ротеште ын журул уней аксе фиксе, есте егалэ ку продукул витезей унгула-ре а рижидулуй прин мо-ментул форцей ын рапорт ку акса де ротацие а ачестуй рижид.

Ын казул жене-рал ал мишкэрий рижидулуй либерви-теза пунктулуй  $M$ , ын каре есте аплика-тэ форца  $F$  (фиг. 226), есте

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

прин урмаре

$$dA = \bar{F} \bar{v} dt = \bar{F} \bar{v}_0 dt + \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt.$$



Цинынд конт, кэ

$$\vec{v}_0 dt = d\vec{r} \text{ ши } \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\omega} \vec{M}_0,$$

авем

$$dA = \vec{F} d\vec{r}_0 + \vec{\omega} \vec{M}_0 (\vec{F}) dt = \vec{F} d\vec{r}_0 + \omega dt M_0 \cos \alpha.$$

Дар  $M_0 \cos \alpha = M_\omega$  есте моментул форцей ын рапорт ку акса инстантанеа а ротацией релативе ын журул пунктулуй  $O$  ши  $\omega dt = d\varphi$  — унгюл элементар ал ротацией ын журул ачестей аксе, аша кэ avem дефинитив

$$dA = \vec{F} d\vec{r}_0 + M_\omega (\vec{F}) d\varphi. \quad (59)$$

Прин урмаре, ын казул жёнерал ал мишкэрий рижидулуй лукрул механик элементар ал форцей, апликате ынтр'ун пункт оарекаре ал луй, се компуне дин лукрул механик элементар пе депласаря элементарэ де трансляции ымпреунэ ку ун пункт оарекаре ал корпусулуй ши лукрул механик элементар пе депласаря ла мишкаря де ротации ын журул ачестуй пункт.

Дакэ рижидул се ротеште ын журул унуй пункт фикс, атулч, луынд ачест пункт дрепт полул  $O$ , дин формула (59) avem

$$dA = M_\omega (\vec{F}) d\varphi. \quad (60)$$

Ротация ку унгюл  $d\varphi$  ын орьче момент требуе консидератэ ын журул аксей инстантанеа де ротации.

Формула (59) се апликэ ши ла мишкаря план-паралелэ а рижидулуй, нумай кэ ын ачест каз акса инстантанеа а ротацией релативе есте перпендикуларэ пе планул мишкэрий ши трече принтр'ун пункт арбитрар ал корпусулуй. Дакэ ын калитате де ачест пункт луэм центрул инстантанеу ал витезелор, лукрул механик элементар пентру депласаря де трансляции есте нул, аша кэ лукрул механик элементар поате фи калкулат дупэ формула (60), адикэ тот аша, ка ши ла ротация рижидулуй ын журул пунктулуй фикс.

#### Лукрул механик ал форцелор интериоре але рижидулуй

Сэ демонстрэм, кэ сума лукрурилор механиче але форцелор интериоре але рижидулуй есте нулэ пентру орьче депласаре а луй. Евидент, кэ есте суфициент сэ демонстрэм ачестэ афирмации нумай пентру лукруриле механиче елементаре. Сэ консидерэм доуэ пункте арбитраре  $M_1$  ши  $M_2$  але рижидулуй (фиг. 227). Форцеле интериоре сынт форце де интеракциуне але пунктелор корпусулуй, прин урмаре, пентру ачесте доуэ пункте avem

$$\vec{F}_1^{(i)} = -\vec{F}_2^{(i)}; \quad \vec{F}_1^{(e)} = \vec{F}_2^{(e)}.$$

Сэ нотэм ку  $\bar{l}^0$  версорул ориентат дупэ форца  $\bar{F}_1^{(i)}$ . Ын ачест каз

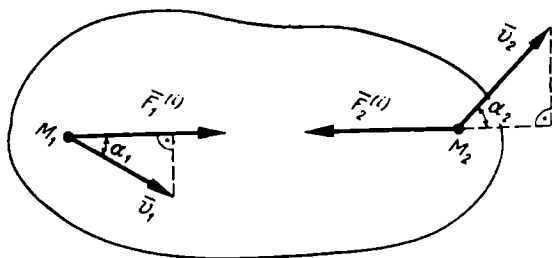
$$\bar{F}_1^{(i)} = \bar{l}^0 F_1^{(i)}; \quad \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_2^{(i)} = -\bar{l}^0 F_1^{(i)}.$$

Сума лукрурилол механиче елементаре але форцелор  $\bar{F}_1^{(i)}$  ши  $\bar{F}_2^{(i)}$  есте

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \bar{v}_1 dt + \bar{F}_2^{(i)} \bar{v}_2 dt = F_1^{(i)} dt (\bar{v}_1 \bar{l}^0 - \bar{v}_2 \bar{l}^0).$$

Скриинд ку че сынт егале продуселе скаларе але векторилор дин парантезе, авем

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = F_1^{(i)} dt (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) = 0.$$



Фиг. 227.

деоарече ын чинематика рижидулуй с'а демонстрат, жэ проекции-ле витезелор а доуэ пункте оарекаре але рижидулуй пе дряпта, каре трече прин ачесте доуэ пункте, сынт егале ынтре еле пентру орьче мишкаре а рижидулуй. Експресия дин парантезе есте диференца проекцилол витезелор ачестор доуэ пункте, адикэ есте о мэриме егалэ ку zero.

Рижидул поате фи консидерат ка фиинд алкэтуит дин перекь де пункте че интеракционязэ, сума лукрурилол механиче елементаре але форцелор интериоаре фиинд нуле пентру фиекаре переке де пункте. Сумынд лукруриле механиче елементаре пентру тоате перекиле де пункте, обцинем

$$\sum dA_k^{(i)} = 0.$$

Дупэ кум се штие, векторул принципал ши моментул принципал ал тутурор форцелор интериоаре есте нул пентру орьче систем механик. Ынсэ сума лукрурилол механиче але форцелор интериоаре есте нулэ нумай ын казул рижидулуй, яр ын казул

Женерал ал унуй систем механик ачаствэ сумэ есте диферитэ де зеро.

Десеорь се ынтылнеспк системе механиче, конституите дин рижиде артикулате. Ла калкуларя лукрулуй механик ал тутурор форцелор интериоаре, апликате унуй систем де корпусь, есте сучфициент сэ калкулэм лукрул механик ал форцелор интериоаре, апликате ын пунктеле де артикулацие але рижиделор. Дакэ рижиделе сынт уните ку артикулаций фэрэ фрекаре, сума лукрурилор механиче елементаре але ачестор доуз форце интериоаре есте нулэ, деоарече форцеле интериоаре ын локул артикулациеи сынт егале дупэ мэриме, де сенсуре опусе, яр депласэриле пунктелор де апликацие але форцелор сынт егале. Прин урмаре, уноря корпусилор рижиде прин артикулаций фэрэ фрекаре пэстрязэ рижидитатя системулуй де корпусь, деоарече сума лукрурилор механиче але форцелор интериоаре дин ачесте артикулаций есте нулэ ла орьче депласаре а системулуй механик консидерат. Ла калкуларя лукрулуй механик ал тутурор форцелор интериоаре ун аша систем де рижиде артикулате поате фи консидерат дрепт ун сингур рижид. Ачаствэ есте карактеристик ши пентру артикулация рижиделор ку фире инекстенсибиле, фрынгий инекстенсибиле ш. а. Ын ачест каз лукрул механик ал тенсиунилор интериоаре де асеменя есте нул.

### Енергия чинетикэ

#### Енергия чинетикэ а унуй пункт ши а унуй систем

Се нумеште енержие чинетикэ а унуй пункт материал жумэзатя продусулуй масей puntuлуй прин патратул витезей луй, адикэ  $\frac{mv^2}{2}$  сау  $\frac{mv^2}{2}$ , деоарече патратул скалар ал орькеруй вектор есте егал ку патратул модулулуй ачестуй вектор. Енергия чинетикэ есте о мэриме скаларэ ши позитивэ. Дименсиуния ей ын системул СИ есте  $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{сек}^2}$ .

Се нумеште енержие чинетикэ а системулуй Т сума енержиилор чинетиче але тутурор пунктелор системулуй механик, адикэ,

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2}. \quad (61)$$

Енергия чинетикэ атыт а puntuлуй, кыт ши а системулуй, ну депинде де дирекцииле витезелор пунктелор. Енергия чинетикэ а системулуй поате фи нулэ нумай ын казул, кынд тоате пунктеле луй се афлэ ын репавс.

Сэ дескомпунем мишкаря системулуй механик ын мишкаря де транспорт каре есте о трансляция ымпреунэ ку чентрул маселор системулуй ши ын мишкаря релативэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция ымпреунэ ку чентрул маселор. Ын мод аналог ку ачея, кум ам фэжут ла дедучеря формулей моментулуй чинетик ла о астафел де дескомпунере а мишкэрий абсолуте, лентру фиекаре пункт  $M_k$  ал системулуй (везь фиг. 218) авем

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_C + \bar{r}_k$$

ши, респектив,

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_{kr},$$

унде

$$\bar{v}_{kr} = \frac{d\bar{r}_k}{dt}$$

есте витеза релативэ а пунктулуй.

Субституиунд валоаря витезей  $\bar{v}_k$  ын экспресия енержіей чинетиче а системулуй ын мишкаря са абсолутэ, адикэ ын мишкаря са фацэ де системул де координате  $Ox_1y_1z_1$ , дупэ о серије де трансформэрь евиденте обцинем

$$T = \sum \frac{m_k \bar{v}_k^2}{2} = \frac{\bar{v}_C^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \bar{v}_{kr}^2}{2} + \bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr}. \quad (62)$$

Дар

$$\bar{v}_C \sum m_k \bar{v}_{kr} = \bar{v}_C \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_C \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{r}_k) = 0,$$

деоарече

$$\sum m_k \bar{r}_k = \text{const} = 0.$$

Авынд ын ведере, кэ  $\sum m_k = M$  есте маса системулуй, ши нотынд терменул ал дойля дин (62) прин  $T_C^{(r)}$ , авем

$$T = \frac{M \bar{v}_C^2}{2} + T_C^{(r)}, \quad (63)$$

унде

$$T_C^{(r)} = \sum \frac{m_k \bar{v}_{kr}^2}{2}$$

есте енержія чинетикэ а системулуй ын мишкаря са релативэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де

транслацие ымпреунэ ку центрул маселор, сау енерџия чинетикэ а системулуй фацэ де центрул маселор.

Формула (63) експримэ аша нумита теоремэ а луй Кьониг: *енерџия чинетикэ а системулуй ын мишкаря абсолутэ се компунэ дин енерџия чинетикэ а центрулуй маселор, дакэ ын ел есте концентратэ тоатэ маса системулуй, ши енерџия чинетикэ а системулуй фацэ де центрул маселор.*

#### Енерџия чинетикэ а унуй рижид

Енерџия чинетикэ а унуй рижид ын мишкаря са де транслацие есте

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = M \frac{v^2}{2}, \quad (64)$$

дебарече витезеле тутурор пунктелор рижидулуй сынт егале, адикэ  $v_k = v$ , унде  $v$  есте витеза женералэ а тутурор пунктелор рижидулуй.

Прин урмаре, енерџия чинетикэ а рижидулуй ын мишкаря де транслацие се калкулязэ ка ши ын казул унуй сингур пункт, маса кэруя есте егалэ ку маса рижидулуй ын ынтрежиме.

Енерџия чинетикэ а рижидулуй ын мишкаря де ротацие ын журул уней аксе фиксе поате фи калкулатэ ушор, дакэ цинем конт, кэ витеза унуй пункт оарекаре  $M_k$  ал корпулуй поате фи експриматэ (фиг. 225) астфел

$$v_k = \omega r_k,$$

унде  $r_k$  есте чя май микэ дистанцэ динтре пунктул  $M_k$  ши акса де ротацие,  $\omega$  — витеза унгуларэ а рижидулуй.

Ын ачест каз

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z$$

сау

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}, \quad (65)$$

унде  $J_z$  есте моментул де инерции ал рижидулуй ын рапорт ку акса де ротацие  $Oz$ .

Прин урмаре, енерџия чинетикэ а рижидулуй ла ротация луй ын журул уней аксе фиксе есте егалэ ку жумэтата продусулуй моментулуй де инерции ал рижидулуй ын рапорт ку акса де ротацие прин патратул витезей унгуларе а ачестуй рижид.

Компарынд (64) ку (65), обсервэм, кэ ачесте формуле сынт асемэнэтоаре дупэ формэ, ынсэ ла мишкаря де ротацие аналогул масей есте моментул де инерции ын рапорт ку акса де ротацие,

яр аналогул витезей — витеза унгуларэ а корпулуй. О астфел де аналожие ынтре мишкарэ де трансляции ши чя де ротации а рижидулуй поате фи обсерватэ ын май мулте формуле, каре се реферэ ла ачесте мишкэрь.

Енержія чинетикэ а рижидулуй ын мишкарэ план-паралелэ поате фи калкулатэ дупэ теорема луй Кьонит. Деоареche ын казул де фацэ мишкарэ релативэ фацэ де центрул маселор (май екзакт — фацэ де системул де координате, каре ефектуэзэ о мишкарэ де трансляции ымпреунэ ку центрул маселор) есте о ротации ын журул центрулуй маселор ку витеза унгуларэ  $\omega$ , урмэзэ кэ

$$T_C^{(r)} = J_{Cz} \frac{\omega^2}{2},$$

унде  $J_{Cz}$  есте моментул де инерции ал корпулуй ын рапорт ку акса  $Cz$ , каре трече прин центрул маселор рижидулуй перпендикулар пе планул мишкэрий. Прин урмаре, пентру казул мишкэрий план-паралеле а рижидулуй дин формула (63) авем

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + J_{Cz} \frac{\omega^2}{2}. \quad (66)$$

Прин урмаре, енержія чинетикэ а рижидулуй ын мишкарэ план-паралелэ се компуне дин енержія чинетикэ ын мишкарэ де трансляции а корпулуй ымпреунэ ку центрул маселор ши енержія чинетикэ ын мишкарэ де ротации ын журул аксей, каре трече прин центрул маселор перпендикулар пе планул мишкэрий.

Дакэ системул механик есте алжэтуит дин май мулте корпурь рижиде, требе сэ калкулэм май ынтый енержія чинетикэ а фиекэруй корп, апой сэ адунэм енержіише чинетиче обцинуге. Ын аша фел се детерминэ енержія чинетикэ а системулуй де корпурь.

#### Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй пункт

Сэ скрием лежя де базэ а динамиций унуй пункт материал ку маса  $m$ , каре се мишкэ суб акциуня форцей  $\bar{F}$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Ынмулцинд скалар амбеле пэрць але ачестей релаций ку диференциала разей вектоаре  $d\bar{r}$ , авем

$$m d\bar{v} \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} d\bar{r}$$

сау

$$m\bar{v}d\bar{v} = \bar{F}d\bar{r},$$

унде  $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$  есте витеза пунктулуй.

Авынд ын ведере, кэ  $dA = \bar{F}d\bar{r}$  есте лукрул механик элементар, обцинем

$$m\bar{v}d\bar{v} = dA.$$

Деоарече

$$m\bar{v}d\bar{v} = d\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

авем дефинитив

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \quad (67')$$

Формула (67') експримэ форма диференциалэ а теоремей деспре вариация енержіей чинетиче а пунктулуй: *диференциала енержіей чинетиче а пунктулуй есте егалэ ку лукрул механик элементар ал форцей, каре акционязэ асупра ачестуй пункт.*

Ымпэрцинд амбеле пэрць але екуацией (67') ла  $dt$  ши циньнд конт, кэ  $\frac{dA}{dt} = W$  есте путеря, путем експрима теорема ын фелул урмэтор

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = W, \quad (67)$$

адикэ *деривата енержіей чинетиче а пунктулуй ын рапорт ку тимпул есте егалэ ку путеря форцей, каре акционязэ асупра ачестуй пункт.*

Интегрынд амбеле нэрць але формулей (67) де ла пунктул  $M_0$  пынэ ла пунктул  $M$ , обцинем форма финалэ а теоремей деспре вариация енержіей чинетиче а пунктулуй

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (68)$$

адикэ *вариация енержіей чинетиче а пунктулуй пентру о депласаре оарекаре есте егалэ ку лукрул механик пентру ачестэ депласаре а форцей, каре акционязэ асупра пунктулуй.*

**Екземплул 1.** Ун корп де греутате  $P$  каде ку витеза инициалэ нулэ де ла ынэлцимья  $h$  пе о спиралэ. Сэ се детермине компримаря максимэ  $\lambda$  а спиралей, дакэ компримаря статикэ а ей суб акциуна греутэций  $P$  есте  $\lambda_{ст}$ . Маса спиралей се неглижазэ (фиг. 228).

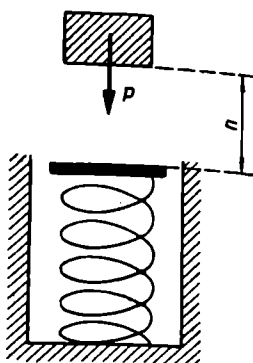
Резолваре. Апликэм теорема деспре вариация енержіей чинетиче а пунктулуй ла мишкаря греутэций

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

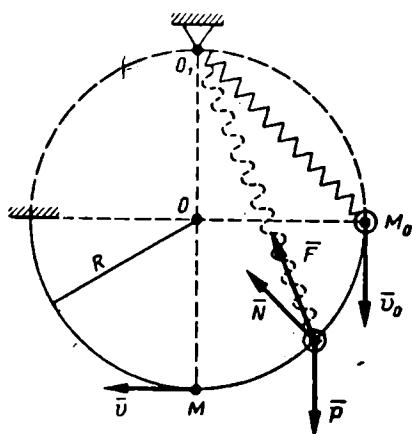
Деоарече  $v_0 = 0$  ши ла компримаря максимэ  $v = 0$ , резултэ кэ  $A = 0$ . Дупэ че греутатя вине ын контакт ку спирала, асупра греутэций акцияэ доуэ форце: форца де греутате  $\bar{P}$  ши форца де еластичитате а спиралей. Форца  $\bar{P}$  ефектуяэ ун лукру меканик пе депласаря  $(h + \lambda)$ , яр форца де еластичитате — пе депласаря  $\lambda$ . Прин урмаре,

$$A = P(h + \lambda) - \frac{c}{2} \lambda^2 = 0,$$

деоарече  $P = c\lambda_{\text{ст}}$ , авем  $c = \frac{P}{\lambda_{\text{ст}}}$ .



Фиг. 228.



Фиг. 229.

Прин урмаре,

$$h + \lambda - \frac{1}{2\lambda_{\text{ст}}} \lambda^2 = 0$$

сау

$$\lambda^2 - 2\lambda_{\text{ст}}\lambda - 2\lambda_{\text{ст}}h = 0$$

ши

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} + \sqrt{\lambda_{\text{ст}}^2 + 2\lambda_{\text{ст}}h}.$$

Ной ам луат семнул плус ын фаца рэдэчиний дин кауза, кэ  $\lambda > \lambda_{\text{ст}}$ . Дакэ  $h = 0$ , атунч  $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$ , адикэ ла акциуня динамикэ а греутэций асупра спиралей, компримаря максимэ а спиралей есте де доуэ орь май маре декыт компримаря статикэ а ей.



**Екземплул 2.** Унуй корп ку греутатя  $P$ , суспендат ын пункт  $O_1$  де о спиралэ, алуиҗиря статикэ а кэрея суб акциуня форцей  $P$  есте  $\lambda_{ст}$ , и се комуникэ ын позиция  $M_0$  витеза  $v_0$  ындрептатэ вертикал ын жос. Сэ се детермине витеза корпулуй ын позиция  $M$  (фиг. 229), дакэ греутатя лункэ фэрэ фрекаре пе инелул ку раза  $R$  ши  $OO_1 = R$ , яр лунҗимя нормалэ а спиралей есте  $R$ .

**Резолваре.** Сэ апликэм теорема деспре вариация енерҗией чинетиче ла мишкаря корпулуй, консидерынд  $M_0$  дрепт позиции инициалэ а корпулуй, яр  $M$  дрепт позиции финалэ:

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2} = A.$$

Лукрул механик есте ефектуат де форца де греутате ши де форца де еластичитате а спиралей. Реакциуня нормалэ а инелулуй  $\bar{N}$  есте перпендикулярэ мереу пе депласаре

$$A = Ph - \frac{c}{2} (r_1^2 - r_0^2) = Ph - \frac{P}{2\lambda_{ст}} (r_1^2 - r_0^2).$$

Ын казул де фацэ

$$h = R; r_0 = R\sqrt{2} - R; r_1 = 2R - R = R.$$

Деачея

$$A = PR - \frac{P}{2\lambda_{ст}} [R^2 - R^2 (\sqrt{2} - 1)^2] = PR \left[ 1 - \frac{R}{\lambda_{ст}} (\sqrt{2} - 1) \right].$$

Де унде

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{2} - \frac{P}{g} \frac{v_0^2}{2} = PR \left[ 1 - \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot R}{\lambda_{ст}} \right]$$

ши

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR \left( 1 - \frac{(\sqrt{2} - 1)R}{\lambda_{ст}} \right)}.$$

#### Теорема деспре вариация енерҗией чинетиче а унуй систем

Апликынд ын пунктеле системулуй тоате форцеле екстериоаре ши интериоаре, путем скрие теорема деспре вариация енерҗией чинетиче а фикэруй пункт (67) суб форма

$$d \left( \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Ынсумынд амбеле пэрць але ачестор екуаций пентру тоате

пунктеле системулуй ши скоцънд семнул дифференциалей ын фа-  
ца семнулуй сумей, обцинем

$$d \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k,$$

сау

$$d\bar{T} = \sum dA_k^{(e)} + \sum dA_k^{(i)}, \quad (69)$$

унде  $T$  есте енержія чинетикэ а системулуй

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2},$$

яр  $dA_k^{(e)}$  ши  $dA_k^{(i)}$  сынт респектив лукруриле механиче елемен-  
таре але форцелор екстериоаре ши интериоаре

$$dA_k^{(e)} = \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k, \quad dA_k^{(i)} = \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k.$$

Формула (69) експримэ форма дифференциалэ а теоремей дес-  
пре вариация енержіей чинетиче а системулуй: *дифференциала  
енержіей чинетиче а системулуй есте егалэ ку сума лукрурилор  
механиче елементаре але тутурор форцелор екстериоаре ши ин-  
териоаре, че акциянэзэ асупра системулуй.*

Интегрынд амбеле пэрць але екуацией (69) ынтре доуэ пози-  
ций але системулуй — инициалэ ши финалэ, ын каре енержіиле  
чинетиче сынт респектив  $T_0$  ши  $T$ , ши скимбынд ординя ынсумэ-  
рий ши интегрэрий, авем

$$T - T_0 = \sum_{M_{k0}}^{M_k} \int dA_k^{(e)} + \sum_{M_{k0}}^{M_k} \int dA_k^{(i)}$$

сау

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}, \quad (70)$$

унде  $A_k^{(e)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(e)}$  есте лукрул механик ал форцей ексте-  
риоаре, каре акциянэзэ асупра пунктулуй  $M_k$  ла депласаря  
ачестуй пункт дин позиция инициалэ  $M_{k0}$  ын позиция финалэ  $M_k$ ;  
 $A_k^{(i)} = \int_{M_{k0}}^{M_k} dA_k^{(i)}$  — лукрул механик ал форцей интериоаре, каре  
акциянэзэ асупра пунктулуй  $M_k$ .

Формула (70) експримэ форма финитэ сау интегралэ а теоре-  
мей деспре вариация енержіей чинетиче а системулуй: *вариация  
енержіей чинетиче а системулуй ла депласаря луй динтр'о по-  
зиция ын алта есте егалэ ку сума лукрурилор механиче але ту-  
турор форцелор екстериоаре ши интериоаре, каре акциянэзэ*

асупра системулуй, пентру депласэриле кореспунзэтоаре але пунктелор ын ачастэ депласаре а системулуй.

Каз партикулар. Лукрул механик ал тутурор форцелор интериоаре але системулуй ын казул рижидулуй есте нул:

$$\sum A_k^{(i)} = 0,$$

прин урмаре, форма фините а теоремей деспре вариация енержий чинетиче а рижидулуй есте

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)}, \quad (71)$$

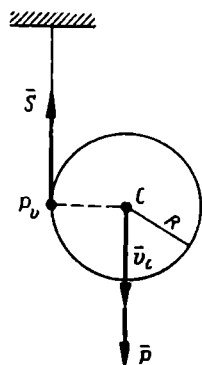
адикэ вариация енержий чинетиче а рижидулуй пентру о депласаре оарекаре а луй есте егалэ ку сума лукрурилор механиче але тутурор форцелор екстериоаре, каре акциязэ асупра корпулуй, пе депласэриле кореспунзэтоаре але пунктелор луй ын ачастэ мишкаре а рижидулуй.

Прин урмаре, спре деосебире де теоремеле женерале але динамичий, студияте май сус, ын теорема деспре вариация енержий чинетиче а системулуй фигурызэ форцеле интериоаре. Еле ну фигурызэ ын ачастэ теоремэ нумай ын казул рижидулуй.

Екземплул 1. Пендулуй луй Максвел констэ динтр'ун чилиндру оможен де греутате  $P$  ши разэ  $R$ , каре каде ын жос ку витеза инициалэ нулэ, десфэшурынд фирул (фиг. 230). Сэ се детермине витеза аксей чилиндрулуй ын функции де ынэлцимя ла каре се кобоарэ ел.

Резолваре. Ын виртутя теоремей деспре вариация енержий чинетиче а чилиндрулуй, консидерат ка ун рижид, авем

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)}.$$



Фиг. 230.

Аич  $T_0 = 0$ , деоарече ын моментул инициал чилиндрул се афла ын репаус. Форцеле екстериоаре сынт  $\bar{P}$  ши  $\bar{S}$ .

Форца  $\bar{S}$  есте апликатэ ын чентрул инстантанеу ал витезелор ши деч, лукрул механик ал ей есте нул. Прин урмаре,

$$\sum A_k^{(e)} = Ph.$$

Мишкаря чилиндрулуй есте о мишкаре план-паралелэ. Энергия чинетикэ а луй есте

$$T = \frac{P}{g} \cdot \frac{v_C^2}{2} + J_{Cz} \frac{\omega^2}{2}; \quad J_{Cz} = \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{2}; \quad v_C = R\omega.$$

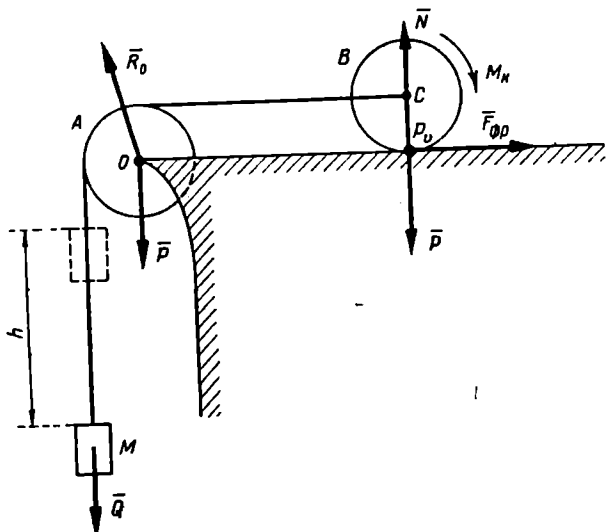
Ын ачест каз

$$T = \frac{P}{g} \cdot \frac{v_C^2}{2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{v_C^2}{2R^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{R}{g} v_C^2.$$

Обцинем дефинитив

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{R}{g} v_C^2 = Ph; \quad v_C = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}.$$

*Екземплул 2.* Корпул  $M$  ку преутатя  $Q$ , каре есте суспендат де ун фир трекут песте скрипетеле  $A$ , пуне ын мишкаре рулоул  $B$ , че се ростоголеште фэрэ алунекаре пе ун план оризонтал. Скрипетеле  $A$  ши рулоул  $B$  сынт дискуръ оможене ку разеле  $R$  ши преутэциле  $P$  фикаре. Коэффициентул фрекэрий де ростоголире а рулоулуй есте  $k$ . Фрекаря ын акселе рулоулуй ши а скрипетелуй ши маса фирулуй се negliжазэ. Сэ се детермине витеза корпулуй ын функции де ынэлцимя ла каре с'а кобырт ел. Ын моментул инициал системул се афла ын репаус (фиг. 231).



Фиг. 231.

*Резолваре.* Ын виртутя теоремей деспре вариация енержией чинетиче а корпулуй, фирулуй, скрипетелуй ши рулоулуй авем

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(l)}.$$

Аич  $T_0 = 0$ , деоарече ын моментул инициал системул се афла ын репаус.

Нотынд прин  $T_1$ ,  $T_2$  ши  $T_3$  енержиале чинетиче але корпулуй, скрипетелуй ши рулоулуй, скрием

$$T_1 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2}; \quad T_2 = J_{Oz} \frac{\omega_A^2}{2}; \quad T_3 = \frac{P}{g} \cdot \frac{v_C^2}{2} + J_{Cz} \frac{\omega_B^2}{2},$$

ынсэ

$$J_{Oz} = J_{Cz} = \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{2}; \quad \omega_A = \frac{v}{R}; \quad v_C = v; \quad \omega_B = \frac{v_C}{R} = \frac{v}{R}.$$

Прин урмаре

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{v^2}{4g} (2Q + 3P + P) = \frac{v^2}{2g} (Q + 2P).$$

Лукрул механик ал форцей де тенсиуне а фирулуй есте нул, адикэ  $\sum A_k^{(i)} = 0$  пентру системул де корпусь, легате ку фире.

Лукруриле механиче але форцей де греутате  $\bar{P}$  а скрипетелуй ши а реакциуний  $\bar{R}_O$  а аксей луй сынт нуле, деоарече ачесте форце сынт апликате ынтр'ун пункт фикс.

Форца де греутате  $\bar{P}$  а рулоулуй есте перпендикулярэ пе депласаре, яр форцеле  $\bar{N}$  ши  $\bar{F}_{\text{фр}}$  сынт апликате ын центрул инстантанеу ал витезелор, прин урмаре, ну ефектуязэ нич ун лукру механик. Лукрул механик есте ефектуат де форца  $\bar{Q}$  ши куплул де форце ку моментул  $M_k$ , куплу, каре ымпедикэ алу-некаря рулоулуй пе план. Прин урмаре,

$$\sum A_k^{(e)} = Qh - M_k \varphi,$$

унде  $\varphi$  есте унгул де ротацие ал рулоулуй, кынд корпусь се кобоарэ де ла о ынэлциме егалэ ку  $h$ .

Деоарече

$$M_k = kN = kP = \text{const}, \quad \varphi = \frac{h}{R},$$

обцинем

$$\sum A_k^{(e)} = Qh - kP \frac{h}{R}.$$

Субституинд валориле мэримилор  $T$  ши  $\sum A_k^{(e)}$  ын експресия теоремей деспре вариация енержией чинетиче, авем

$$\frac{v^2}{2g} (Q + 2P) = h \left( Q - \frac{k}{R} P \right); \quad v = \sqrt{\frac{2gh \left( Q - \frac{k}{R} P \right)}{Q + 2P}}.$$

Менд онэм, кэ корпул  $Q$  ну нумай кэ ефектуязэ лукру механик даторитэ греутэций сале  $\bar{Q}$ , чи ши поседэ маса  $\frac{Q}{g}$ , прин урмаре, ел аре енержие чинетикэ.

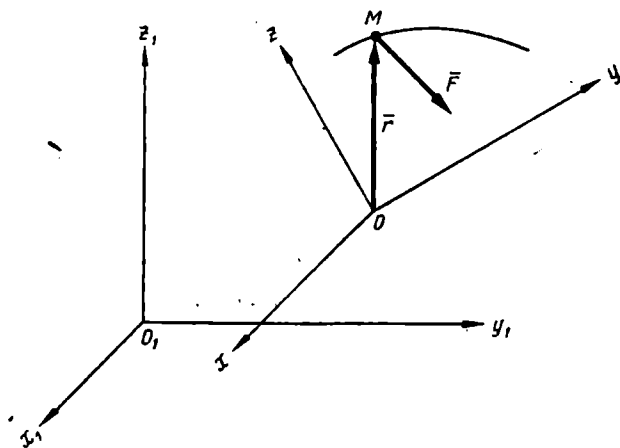
### Теорема деспре вариация енержией чинетиче ын мишкаря релативэ

Теорема деспре вариация енержией чинетиче а унуй пункт материал

Адмitem кэ пунктул  $M$ , ефектуязэ о мишкаре де транспорт ымпруенэ ку системул де координате мобил  $Oxyz$  фацэ де системул де базэ де координате  $O_1x_1y_1z_1$  ши о мишкаре релативэ ын рапорт ку системул де координате  $Oxyz$  (фиг. 232). Се нумеште мишкаре абсолутэ а пунктулуй  $M$  мишкаря компусэ а са фацэ де системул де координате  $O_1x_1y_1z_1$ . Екуация дифференциалэ а мишкэрий релативе а пунктулуй  $M$  поате фи презентатэ суб формэ векториалэ ын фелул урмэтор

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (72)$$

унде  $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$  есте форца де инерции ын мишкаря де транспорт а пунктулуй,  $\bar{\Phi}_k = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$  — форца де инерции а луй Кориолис.



Фиг. 232.

Пентру а дедуче теорема деспре вариация енержией чинетиче а пунктулуй ын мишкаря релативэ вом прочеда тот аша ка ши ла дедучеря теоремей аналожиче ын мишкаря абсолутэ,

ынмулцинд скалар амбеле пэрць але екуацией (72) ку векторул депласэрий релативе елементарэ  $\tilde{d}\vec{r}$  ши трансформынд партя стынгэ а экспресией обцинуте. Семнул пус де асупра диференциалей разей вектоаре  $\vec{r}$  ши а алтор векторь индикэ, кэ ла дериواره требуе сэ луэм вариацииле векторулуй респектив фацэ де системул де координате мобил  $Oxuz$ . Прин урмаре

$$m\vec{a}, \tilde{d}\vec{r} = m \frac{\tilde{d}\vec{v}}{dt} \tilde{d}\vec{r} = m \tilde{d}\vec{v}, \frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = m \tilde{d}\vec{v}, \vec{v}, = \tilde{d} \left( \frac{m\vec{v}_r^2}{2} \right) = d \left( \frac{mv_r^2}{2} \right).$$

Ын партя дряптэ фигурызэ лукруриле механиче елементарэ але форцелор  $\vec{F}$ ,  $\vec{\Phi}_e$  ши  $\vec{\Phi}_k$  пентру депласаря релативэ  $\tilde{d}\vec{r}$ . Менционэм, кэ лукрул механик элементар ал форцей де инерции а луй Кориолис пентру депласаря релативэ элементарэ есте ынтотдяуна нул, деоарече форца де инерции а луй Кориолис есте перпендикулярэ пе витеза релативэ  $\vec{v}$ , ши, прин урмаре, есте перпендикулярэ пе депласаря релативэ  $\tilde{d}\vec{r} = \vec{v}, dt$ . Ын експресия форцей де инерции а луй Кориолис фигурызэ продусул векториал  $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ , продус, каре ынтотдяуна есте перпендикуляр пе амбий векторь че се ынмулцеск, ын партикулар, ши пе  $\vec{v}_r$ .

Астфел, форма диференциалэ а теоремей деопре вариация енержіей чинетиче а пунктулуй есте

$$d \left( \frac{mv_r^2}{2} \right) = \vec{F} \tilde{d}\vec{r} + \vec{\Phi}_e \tilde{d}\vec{r}, \quad (73)$$

адикэ теорема деспре вариация енержіей чинетиче ын мишкаря релативэ а пунктулуй рэмыне ачеш ка ши ын мишкаря абсолютэ, дакэ ла лукрул механик элементар ал форцей апликате адзугэм лукрул механик элементар ал форцей де инерции ын мишкаря де транспорт, пентру депласаря релативэ.

#### Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй систем

Сэ консидерэм казул чел май принчипал ал унуй систем, кынд мишкаря де трансляция а системулуй де координате ымпреунэ ку центрул маселор се я ын калитате де мишкаре де транспорт ши, прин урмаре, енержія чинетикэ а системулуй ын мишкаря абсолютэ поате фи калкулатэ дупэ теорема луй Кьониг (63):

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_C^{(r)}.$$

Сэ презентэм теорема деспре вариация енержіей чинетиче а

системулуй ын мишкаря абсолутэ а са (фиг. 218) ын фелул ур-мэтор

$$dT = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{\rho}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{\rho}_k. \quad (74)$$

Деоарече

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_C + \bar{r}_k,$$

ши, прин урмаре

$$d\bar{\rho}_k = d\bar{\rho}_C + d\bar{r}_k,$$

субституинд  $d\bar{\rho}_k$  ши  $T$  прин валориле лор ын (74), обцинем

$$d\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right) + dT_C^{(e)} = \left(\sum \bar{F}_k^{(e)}\right) d\bar{\rho}_C + \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k + \\ + \left(\sum \bar{F}_k^{(i)}\right) d\bar{\rho}_C. \quad (75)$$

Пентру форцеле интериоре  $\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$ .

Дакэ формулэм теорема деспре вариация енержіей чинетиче а центрулуй маселор ка ши пентру пунктул, маса кэруя есте егалэ ку маса ынтрегулуй систем, асупра кэруя акциязэ тоате форцеле екстериоре, атунч

$$d\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right) = \left(\sum \bar{F}_k^{(e)}\right) d\bar{\rho}_C.$$

Дупэ омитеря ачестор термень дин (75), обцинем урмэтоаря теоремэ деспре вариация енержіей чинетиче а системулуй ын мишкаря релативэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляции ымпреунэ ку центрул маселор,

$$dT_C^{(e)} = \sum \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^{(i)} d\bar{r}_k. \quad (76)$$

Компарынд (76) ку (74), обсервэм, кэ теорема деспре вариация енержіей чинетиче а системулуй ын мишкаря са релативэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляции ымпреунэ ку центрул маселор, се формулязэ тот аша, ка ши пентру мишкаря абсолутэ а системулуй.

## § 6. КЫМПУЛ ПОТЕНЦИАЛ ДЕ ФОРЦЕ

Пентру а калкула ын казул жёнерал лукрул механик ал уней форце пе о депласаре оарекаре есте нечесар сэ куноаштем лежя мишкэрий пунктулуй пе ачастэ депласаре. Вом студия о класэ де форце, лукрул механик ал кэрора пе депласаря консидератэ ну депинде де карактерул мишкэрий. Ачесте форце сынт нумите форце *потенциале* ши жоакэ ун рол импортант ын диферите рамурь але механичий ши физичий.

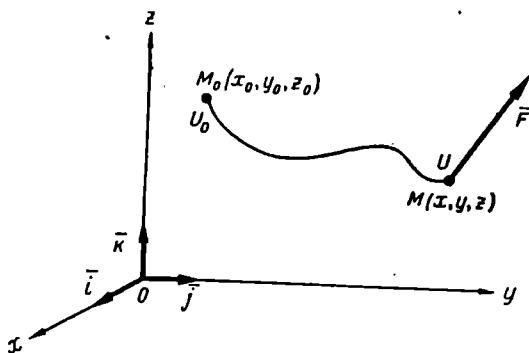


## Кымпул потенциал де форце ши функция де форцэ

Се нумеште кымп де форце партя де спашиу, ын фиекаре пункт ал кэрея асупра пунктулуй консидерат акционязэ о форцэ детерминатэ, каре депинде де координателе пунктулуй. Кымпул де форце се консидерэ стационар, дакэ форцеле че акционязэ ну вариязэ ку тимпул. Дакэ ынсэ форцеле депинд де тимп, кымпул де форце есте нестационар.

Кымпул де форце есте нумит кымп *потенциал*, дакэ екзистэ о аша функция  $U$  де координателе пунктулуй, каре есте легатэ ку проекцииле форцей пе акселе де координате ын орьче пункт ал кымпулуй (фиг. 233), ын фелулул urmэтор:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (77)$$



Фиг. 233.

Функция  $U(x, y, z)$  есте нумитэ *функцие де форцэ*.

Дин формула (77) реесе, кэ функция де форцэ есте детерминатэ абстракцие фэжынд де о мэриме константэ, деоарече проекцииле форцей пе акселе де координате сынт детерминате де деривателе парциале але функцией де форцэ ын ратпорт ку координателе, прин urmаре, адэугаря уней мэримэ константе ла функция  $U$  ну инфлуенцязэ асупра проекциилор  $F_x, F_y, F_z$ . Сэ студием проприетэциле де базэ але функцией де форцэ.

Лукрул механик елементар есте

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU,$$

адикэ

$$dA = dU. \quad (78)$$

Прин urmаре, *лукрул механик елементар ал уней форце ын кымпул потенциал де форце есте егал ку диференциала тоталэ а функцией де форцэ*. Десеорь ачастэ проприетате а функцией де

форцэ се консидерэ дрепт дефиницие а ачестей функций. Атунч (77) реесе дин (78).

Лукрул механик тотал ал форцей  $\bar{F}$  пе порциуня де друм купринсэ ынтре пунктул  $M_0$  ши пунктул  $M$  есте

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = U - U_0,$$

адикэ

$$A = U - U_0, \quad (79)$$

унде

$$U_0 = U(x_0, y_0, z_0), \quad U = U(x, y, z).$$

Прин-урмаре, лукрул механик тотал ал уней форце пе о депласаре оарекаре а пунктулуй есте егал ку дифференца валорилор функцией де форцэ ын позицииле финалэ ши инициалэ але мишкэрий ши ну депинде де форма траекторией мишкэрий пунктулуй, дакэ функция де форцэ есте унивоке.

Дин (79) реесе, кэ лукрул механик ал форцей пе ун друм оарекаре ынкис ын кымпул потенциал де форце есте нул. деоарече валориле функцией де форцэ ын позицииле инициалэ ши финалэ але мишкэрий сынт егале ынтре еле.

Дакэ апликэм ноциуня де градиент ал функцией скаларе  $U$ :

$$\text{grad } U = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$

унде  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  сынт версорий акселор де координате, атунч форца  $\bar{F}$  поате фи експриматэ прин градиентул функцией де форцэ  $U$ :

$$\bar{F} = \text{grad } U.$$

Сэ детерминэм кондицииле, каре не пермит сэ стабилим, дакэ кымпул де форце есте потенциал.

Дакэ функция де форцэ  $U$  екзистэ, атунч

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Деоарече

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \text{авем} \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{сау} \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0.$$

Ын мод аналог обцинем

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0.$$

Прин урмаре, кондицииле нечесаре сынт

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (80)$$

Ын калкулул векториал се демонстразэ, кэ кондицииле (80) сынт кондиций нечесаре ши суфициенте але екзистенцей функцией де форцэ. Дакэ фолосим роторул форцей  $\bar{F}$   $\text{rot } \bar{F}$

$$\text{rot } \bar{F} = \bar{i} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right),$$

атунч кондицииле (80) пот фи експримате ын фелул урмэтор:

$$\text{rot } \bar{F} = 0. \quad (80')$$

Прин урмаре, кондиция нечесарэ ши суфициентэ ка кымпул де форце сэ фие кымп потенциал, констэ ын ачея, ка роторул форцей сэ фие нул.

Екземпле де форце непотенциале сынт: форцеле де резистенцэ, каре депинд де витезэ, ши форцеле де фрекаре. Форца де фрекаре ускатэ, мэримя кэрея есте константэ ши ну депинде де витезэ, ну есте о форцэ потенциалэ, деоарече сенсул ей депинде де витезэ.

### Супрафэце екипотенциале. Линия де форцэ

Тоате пунктеле кымпулуй потенциал де форце, ын каре функция де форцэ аре уна ши ачеяш валoare, де екземплу  $U=C$ , сынт ситуате пе о супрафэцэ, нумитэ *супрафэцэ екипотенциалэ сау супрафэцэ де нивел*.

Екуация супрафэцей екипотенциале есте

$$U(x, y, z) = C.$$

Сэ индикэм кытева проприетэць але супрафэцелор екипотенциале.

1. Дакэ пунктеле инициал ши финал але депласэрий се гэсеск пе уна ши ачеяш супрафэцэ екипотенциалэ, атунч лукрул механик ал форцей есте нул. Ынтр'адевэр,

$$A = U - U_0.$$

Дакэ пунктеле инициал ши финал сынт ситуате пе уна ши ачеяш супрафэцэ екипотенциалэ, атунч  $U=U_0$  ши, прин урмаре,  $A=0$ . Лукрул механик ал форцей пе депласаря динтре пунктеле  $M_0$  ши  $M$  ну депинде де позиция ачестор пункте пе супрафэцеле екипотенциале. Ел аре ачеяш валoare пе орьче депласаре динтре доуэ пункте але супрафэцелор екипотенциале консидерате (фиг. 234).

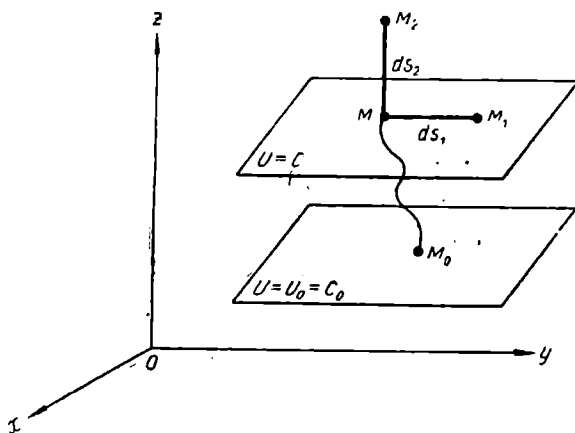
2. Форца ын кымпул потенциал де форце есте ынтотдяуна перпендикулярэ пе супрафэца екипотенциалэ сау, май екзакт, перпендикулярэ пе планул танжент ла супрафэца екипотенциалэ. Ынтр'адевэр, сэ консидерэм супрафэца екипотенциалэ  $U=C$ .

Луэм пе ачастэ супрафацэ доуэ пункте инфинит вечине  $M$  ши  $M_1$  ши калкулэм лужрул меканик елементар пентру депласаря  $ds_1$  динтре ачесте пункте

$$dA = F ds_1 \cos(\vec{F}, \hat{\overline{MM}_1}).$$

Пе де алтэ парте

$$dA = U(M_1) - U(M) = C - C = 0.$$



Фиг. 234.

Деоарече мэримиле  $F$  ши  $ds_1$  ну сынт нуле, резултэ кэ  $\cos(\vec{F}, \hat{\overline{MM}_1}) = 0$  ши, прин урмаре, унгул динтре форца  $\vec{F}$  ши депласаря  $\overline{MM}_1$ , ситуатэ ын планул тангент ла супрафаца екипотенциалэ, есте ун унгь дрепт.

3. Форца ын кымпул потенциал де форце есте ындрептатэ ынтотдяуна ын сенсул крештерий валорилор функцией де форцэ. Пентру демонстраря ачестей проприетэць луэм пунктул  $M_2$  пе перпендикулара ридикатэ дин пунктул  $M$  пе супрафаца екипотенциалэ, ын дирекция крештерий валорилор функцией де форцэ. Лужрул меканик елементар пентру депласаря елементарэ  $\overline{MM}_2$ , егалэ ку  $ds_2$ , есте

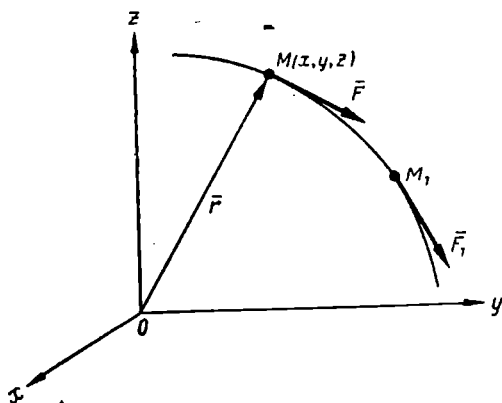
$$F ds_2 \cos(\vec{F}, \hat{\overline{MM}_2}) = C_2 - C > 0.$$

деоарече  $C_2 > C$ .

Прин урмаре,  $\cos(\vec{F}, \hat{\overline{MM}_2}) > 0$  деч, унгул де  $180^\circ$  се экс-

клубе ши рэмыне нумай унгул де  $0^\circ$ , адикэ форца  $\vec{F}$  есте ориентатэ дупэ  $\overline{MM_2}$  ын дирекция крештерий валорилор функцией де форцэ.

4. Дакэ ымпэрцим ын режіуны кымпул де форце прин супрафеце екипотенциале, дифференца де потенциал динтре доуэ супрафеце вечине фиинд уна ши ачеш  $C$ , унде  $U=C$ , атунч модулул форцей  $F$  есте май маре аколо, унде супрафецеле екипотенциале вечине сынт май апроапе уна де алта, яр ын локуриле унде супрафецеле екипотенциале сынт ситуате май департе уна де алта модулул форцей есте май мик. Ачаштэ проприетате поате фи верификатэ, дакэ обсервэм, кэ лукрул механик пентру депласаря динтре доуэ пункте але супрафецелор вечине оарекаре есте унул ши ачеш, прин урмаре, модулул форцей есте май маре аколо, унде дистанца динтре супрафеце есте май микэ, ши инверс.



Фиг. 235.

Паралел ку ноциуны де супрафеце екипотенциале ын кымпул де форце се ынтродуче ноциуны де *линии де форцэ*, адикэ аша о линии, ын фиекаре пункт ал кэрея форца есте танжентэ ла ачаштэ линии (фиг. 235). Векторул  $\vec{dr}$ , проекцииле кэруя сынт  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , есте ындрептат ынтоддяуна дупэ танжента ла курбэ. Дин кондиция паралелизмулуй  $\vec{dr}$  ши  $\vec{F}$  резултэ, кэ

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (81)$$

Ачеште екуаций деференциале фацэ де координателе  $x$ ,  $y$ ,  $z$  сынт екуацииле дифференциале але линей де форцэ.

## Енержія потенциалэ

Паралел ку функция де форце а кымпулуй потенциал де форце поате фи ынтродусэ о алтэ функце, каре карактеризязэ резерва енержіей ын пунктул дат ал кымпулуй, — енержія потенциалэ ын ачест пункт (фиг. 236).

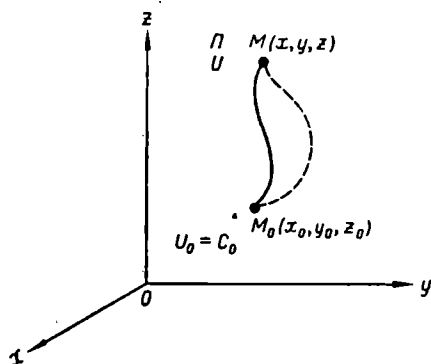
Се нумеште енержіе потенциалэ  $\Pi$  ын пунктул  $M$  ал кымпулуй де форце лукрул механик, ефектуат де форцеле кымпулуй ла депласаря пунктулуй материал дин пунктул  $M$  ын пунктул инициал  $M_0$ , адикэ

$$\Pi = A_{MM_0}$$

сау

$$\Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = C_0 - U. \quad (82)$$

Константа  $C_0$  есте уна ши ачеяш пентру тоате пунктеле кымпулуй ши депинде де пунктул алес дрепт позиции инициалэ. Есте евидент, кэ енержія потенциалэ поате фи ынтродусэ нумай пентру кымпул потенциал де форце, кынд лукрул механик ну депинде де форма депласэрий динтре пунктеле  $M$  ши  $M_0$ .



Фиг. 236.

Кымпул непотенциал де форце ну аре енержіе потенциалэ, деч пентру ел ну екзистэ нич функце де форце.

Ын виртутя релацилор (77) ши (82) авем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Дин (78), (79) ши (82) обцинем респектив

$$dA = dU = -d\Pi; \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Дин ачесте формуле резултэ, кэ енержія потенциалэ  $\Pi$  се детерминэ абстракције фэкынд де о константэ арбитрарэ неесенциалэ, каре депинде де алежеря пунктулуй инициал, ынсэ каре ну инфлуенцязэ асупра калкулулуй форцей ши а лукрулуй механик а ей прин енержія потенциалэ. Цинынд конт де ачаста, путем скрие формула (82) ын фелул урмэтор:

$$\Pi = -U + \text{const}, \quad (82)$$

сау

$$\Pi = -U,$$

адикэ енержія потенциалэ ынтр'ун пункт оарекаре ал кымпулуй поате фи експриматэ абстракцие фэзынд де о константэ неесенциалэ ка валоаря функцией де форцэ ын ачест пункт, луатэ ку семнул минус. Ын фонд есте суфициентэ уна дин функцииле  $\Pi$  сау  $U$ .

Ноциуна де енержіе потенциалэ а фост ынтродусэ май ынаинте декыт функция де форцэ. Ынсэ функция де форцэ есте май комодэ, деоарече унеле формуле, каре концин ачестэ функцие, н'ау семнул минус.

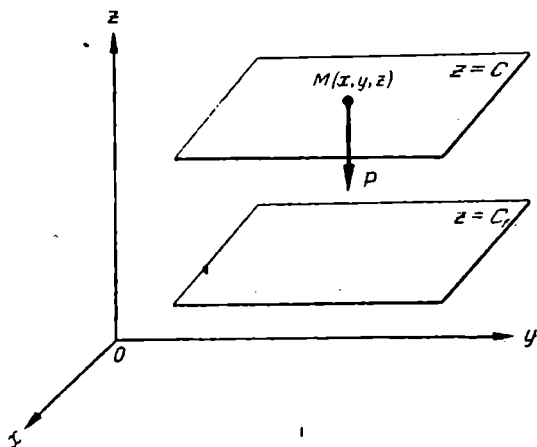
### Екземпле де калкул ал функциилор де форцэ

Дакэ калкулэм функция де форцэ, пе база формулей (82) куноаштем ши енержія потенциалэ. Сэ калкулэм функцииле де форцэ але кымпулуй оможен ал форцей де греутате, але кымпулуй форцей еластиче линиаре ши але кымпулуй форцей де атракцие универсалэ, каре акционязэ дупэ лежя луй Ньютон.

#### **Функция де форцэ а кымпулуй оможен ал форцей де греутате**

Дакэ ориентэм акса  $Oz$  вертикал ын сус (фиг. 237), проекцииле форцей де греутате пе акселе де координате вор фи

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$



Фиг. 237.

Калкулынд лукрул механик элементар ал форцей  $\vec{P}$ , обцинем

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mg dz = d(-mgz).$$

Лукрул механик елементар есте диференциала тоталэ а уней функций, прин урмаре, кымпул форцей де греутате есте ун кымп потенциал, яр функция де форцэ а ачестуй кымп се детерминэ дупэ формула

$$U = -mgz + \text{const.} \quad (83)$$

Формула (83) детерминэ функция де форцэ а кымпулуй оможен ал форцей де греутате, адикэ а кымпулуй, ын каре форца де греутате есте константэ дупэ модул, дирекции ши сенс. Екуацияле супрафещелор екипотенциале сынт  $U = C$  сау  $z = \text{const}$ , адикэ супрафещеле екипотенциале сынт ниште плане оризонтале.

#### Функция де форцэ а форцей еластиче линиаре

Ын казул форцей еластиче линиаре (фиг. 223) авем

$$\bar{F} = -c\bar{r}; \quad F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

Прин урмаре,

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c(xdx + ydy + zdz) = -crdr = \\ = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right),$$

деоарече

$$xdx + ydy + zdz = rdr; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Прин урмаре, функция де форцэ а форцей еластиче линиаре се детерминэ дупэ формула

$$U = -\frac{cr^2}{2} + \text{const} = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const.} \quad (84)$$

Супрафещеле екипотенциале  $U = C$  сынт сфере ку  $r = \text{const}$ .

#### Функция де форцэ а форцей атракцией универсале

Сэ калкулэм функция де форцэ а кымпулуй де атракције а Пэмынтулуй. Дакэ луэм орижния координателор ын центрул Пэмынтулуй (фиг. 238), форца де атракције а пунктулуй материал спре Пэмынт есте

$$F = \frac{k}{r^2}.$$

Форца  $\bar{F}$  есте ындрептатэ спре центрул Пэмынтулуй, прин урмаре, ынтродукынд версорул  $\bar{r}^0$  ал разей вектоаре а пунктулуй консидерат  $M$ , дусэ дин центрул Пэмынтулуй, авем

$$\bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}; \quad \bar{F} = -\frac{k}{r^2}\bar{r}^0 = -\frac{k}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = -\frac{k}{r^3}\bar{r}.$$



Проектынд форца  $\vec{F}$  не акселе де координате, обцинем

$$F_x = -\frac{k}{r^3} x; F_y = -\frac{k}{r^3} y; F_z = -\frac{k}{r^3} z.$$

Ын ачест каз

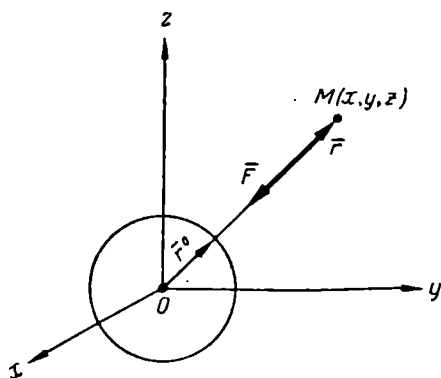
$$\begin{aligned} dA &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{k}{r^3} (x dx + y dy + z dz) = \\ &= -\frac{k}{r^3} r dr = d\left(\frac{k}{r}\right), \end{aligned}$$

деоарече

$$x dx + y dy + z dz = r dr; r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Прин урмаре, функция де форце а форцей де атракције универсалэ есте

$$U = \frac{k}{r} + \text{const} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \text{const}. \quad (85)$$



Фиг. 238.

Ын казул Пэмынтулуй пентру константа  $k$  авем

$$k = \mu M m = m g R^2,$$

унде  $M$  есте маса Пэмынтулуй,  $R$  — раза Пэмынтулуй,  $g$  — акчелерация кэдерий либере ла супрафаца Пэмынтулуй,  $m$  — маса пунктулуй,  $\mu$  — константа гравитационалэ.

Дакэ луэм ын локул Пэмынтулуй ун алт корп череск, атунч се скимбэ нумай константа  $k$ .

Дакэ системул механик се афлэ ынтр'ун кымп потенциал де форце, атунч путем ынтродуче функция де форцэ ка о функции, каре депинде де координателе тутурор пунктелор системулуй, адикэ де позиция системулуй ын кымпул де форце. Дакэ системул констэ дин  $N$  пункте materiale, функция де форцэ  $U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N)$  депинде ын жeneral де координателе тутурор пунктелор, яр проекциле форцей, каре акциязэ асупра фиекэруй пункт ал системулуй, сынт

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}, k = 1, 2, \dots, N. \quad (86)$$

Сума лукрурилор механиче елементаре але тутурор форцелор, каре акциязэ асупра пунктелор системулуй, се детерминэ дупэ формула

$$\begin{aligned} \sum dA_k &= \sum (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \\ &= \sum \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k \right) = dU, \end{aligned}$$

адикэ

$$\sum' dA_k = dU. \quad (87)$$

Прин урмаре, сума лукрурилор механиче елементаре але форцелор кымпулуй, каре акциязэ асупра системулуй механик, есте егалэ ку дифференциала тоталэ а функцией де форцэ. Дакэ калкулэм сума лукрурилор механиче, ефектуате де форцеле кымпулуй, че акциязэ асупра системулуй механик ла депласаря системулуй дин позиция  $(M_0)$ , ын каре функция де форцэ есте  $U_0$ , ын позиция  $(M)$ , ын каре функция де форцэ есте  $U$ , атунч

$$\sum A_k = \sum \int_{(M_0)}^{(M)} dA_k = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0,$$

адикэ

$$\sum A_k = U - U_0. \quad (88)$$

Прин урмаре, сума лукрурилор механиче але форцелор кымпулуй, каре акциязэ асупра системулуй ла депласаря ачестуй систем дин позиция инициалэ ынтр'о алтэ позиции оарекаре есте егалэ ку диференца динтре валориле функцией де форцэ ын позиция финалэ ши чя инициалэ а системулуй.

Енергия потенциалэ  $\Pi$  а системулуй ын кымпул потенциал де форце, че кореспунде позицией сале  $(M)$ , есте егалэ ку сума лукрурилор механиче але форцелор ачестуй кымп пе каре ле

ефектуязэ форцелэ дате ла депласаря системулуй дин позиция консицератэ ын позиция инициалэ ( $M_1$ ), адикэ

$$\Pi = \sum A_k = U_1 - U = -[U + \text{const}, \quad (89)$$

унде  $U$  есте валоаря функцией де форцэ а системулуй де форце ын позиция ( $M$ ),  $U_1$  — валоаря функцией де форцэ ын позиция инициалэ.

Дин (89) ши (86), (87) ши (88) авем

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_k},$$

$$F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_k},$$

$$F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_k},$$

$$\sum dA_k = dU = - d\Pi,$$

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

## § 7. ЛЕЖА КОНСЕРВЭРИЙ ЕНЕРЖИЕЙ МЕКАНИЧЕ

### Лежа консервэрий енержіей механиче а унуй пункт материал

Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй пункт материал поате фи презентатэ ын фелул урмэтор:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Дакэ пунктул материал се мишкэ ын кымпул потенциал де форце, атунч

$$A = \Pi_0 - \Pi.$$

Прин урмаре,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi,$$

сау

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

унде  $h$  есте о мэриме константэ.

Нотынд прин  $E$  енержія механикэ тоталэ а пунктулуй мате-

риал, адикэ сума енержіей чинетиче ши потенциале а ачестуй пункт, авем

$$E = \frac{mv^2}{2} + P = h.$$

Прин урмаре, енержія механикэ тоталэ а пунктулуй материал, каре се мишкэ ынтр'ун кымп потенциал де форце, есте о мэриме константэ. Ачаства есте лежя консервэрий енержіей механике а пунктулуй материал, лежэ, каре пе де алтэ парте есте о интегралэ примэ а екуациилор дифференциалэ але пунктулуй материал.

#### Лежя консервэрий енержіей механике а унуй систем

Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй систем поате фи презентатэ суб форма

$$T - T_0 = \sum (A_k^{(e)} + A_k^{(i)}) = \sum A_k. \quad (90)$$

Дакэ системул се мишкэ ын кымпул потенциал де форце, атунч

$$\sum A_k = P_0 - P,$$

унде  $P$  есте енержія потенциалэ а форцелор екстериоаре ши интериоаре, каре акциязэ асупра системулуй механик. Прин урмаре

$$T - T_0 = P_0 - P$$

сау

$$T + P = T_0 + P_0 = h,$$

унде  $h$  есте о мэриме константэ.

Нотынд енержія механикэ тоталэ прин  $E$ , авем

$$E = T + P = h. \quad (91)$$

Формула (91) експримэ лежя консервэрий енержіей механике а системулуй: *енержія механикэ тоталэ а системулуй, каре се мишкэ ын кымпул потенциал ал форцелор екстериоаре ши интериоаре, есте о мэриме константэ*. Дакэ форцеле интериоаре депинд нумай де дистанцеле динтре пунктеле системулуй, еле сынт форце-потенциале. Деч, пентру ка лежя консервэрий енержіей механике сэ айбэ лок, есте нечесар ка форцеле екстериоаре, каре акциязэ асупра системулуй, сэ фие форце потенциалэ.

Лукрул механик ал тутурор форцелор интериоаре ын казул режидулуй есте нул ши, прин урмаре, енержія потенциалэ а форцелор интериоаре есте о мэриме константэ, каре поате фи консидаватэ егалэ ку zero. Ын ачест каз енержія потенциалэ

дин (91) поате фи ынлокуитэ нумай прин енерҗия потенциалэ а форцелор екстериоаре, каре ымпреунэ ку енерҗия чинетикэ есте о мэриме константэ. Ла мишкаря системулуй механик вариабил енерҗия чинетикэ а луй плус енерҗия потенциалэ а форцелор екстериоаре ну есте о мэриме константэ. Ачесте енерҗий вор да о мэриме константэ, дакэ ла еле адэугэм енерҗия потенциалэ а форцелор интериоаре. Системеле механиче, енерҗия механикэ а кэроа есте о мэриме константэ, сынт нумите *системе консервативе*.

Дакэ пунктул сау системул се мишкэ ын кымпул непотенциал де форце, енерҗия механикэ вариязэ, микшорынду-се ку мэримя лукрулуй механик ал форцелор де резистенцэ. О парте дин енерҗия механикэ, пердута де систем, се трансформэ де обичей ын енерҗие термикэ. Енерҗия тоталэ де тоате формеле (механикэ, термикэ, химикэ ш. а.) ну вариязэ ла мишкаря пунктулуй сау а системулуй ын орьче кымп де форце.

---

**ДИНАМИКА МИШКЭРИЛОР ДЕ БАЗЭ АЛЕ РИЖИДУЛУЙ****§ 1. ЕКУАЦИИЛЕ ДИНАМИЧЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ ДЕ ТРАНСЛАЦИИ А РИЖИДУЛУЙ**

Сэ студием проблема динамикэ деспре мишкаря де трансляции а рижидулуй. Се штие, кэ мишкаря корпулуй фацэ де ун систем оарекаре фикс де координате  $Oxyz$  есте о мишкаре де трансляции. Се куноск форцеле, каре акционязэ асупра корпулуй. Сэ се детермине мишкаря корпулуй, адикэ екуацииле чинематиче але мишкэрий.

Ын конформитате ку теорема деспре мишкаря чентрулуй маселор авем

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^{(e)}$$

сау ын проекций пе акселе де координате

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}; \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}; \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{(e)}.$$

Ачесте екуаций диференциале детерминэ мишкаря чентрулуй маселор рижидулуй, прин урмаре, ши а ынтрегулуй корп. Деа-чея ачесте екуаций диференциале пот фи консицерате дрепт екуаций динамиче диференциале але мишкэрий де трансляции а рижидулуй.

**§ 2. ЕКУАЦИЯ ДИНАМИКЭ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ А МИШКЭРИЙ ДЕ РОТАЦИИ А РИЖИДУЛУЙ ЫН ЖУРУЛ УНЕЙ АКСЕ ФИКСЕ**

Сэ луэм дрепт аксэ де ротации акса  $Oz$ . Пунктеле фиксе де пе ачастэ аксэ ле нотэм прин  $O$  ши  $O_1$ . Асупра рижидулуй акционязэ форцеле  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ . Реакцииле, каре се наск ын пунктеле  $O$  ши  $O_1$ , ле нотэм прин  $\bar{R}$  ши  $\bar{R}_1$  (фиг. 239). Ын конформитате ку теорема деспре вариация моментулуй чинетик ын проекций пе акса  $z$ , авем

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}). \quad (1)$$

Менционэм, кэ реакциуниле  $\bar{R}$  ши  $\bar{R}_1$  ну фигурязэ ын партя дряптэ а екуацией (1), деоарече моментеле ачестор реакциунь ын рапорт ку акса  $z$  сынт нуле.

Субституинд ын екуация (1) валоаря  $K_z = J_z \omega$ , обцинем

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Моментул де инерции  $J_z$  ну вариязэ ла ротация рижидулуй, прин урмаре ел поате фи скос ын фаца семнулуй дериватей. Ын ачест каз

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}) \quad (2)$$

сау

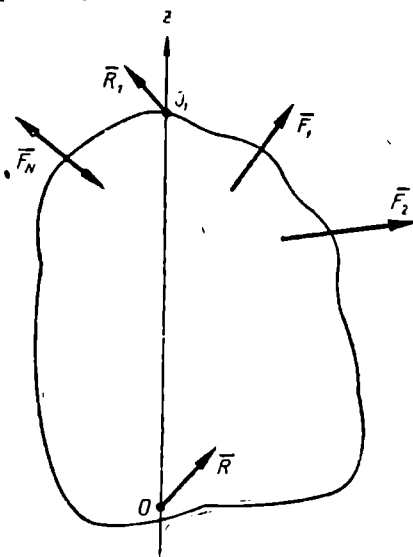
$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^{(e)}), \quad (2')$$

деоарече  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \ddot{\varphi}$  есте акчелерация унгуларэ а рижидулуй.

Прин урмаре, продусул динтре моментул де инерции ал рижидулуй ын рапорт ку акса де ротации ши акчелерация унгуларэ а луй есте егал ку моментул принципал ал форцелор екстериоаре, каре акционязэ асупра рижидулуй, ын рапорт ку ачаств аксэ де ротации. Моментул принципал ал форцелор активе есте нумит момент де ротации, яр моментул принципал ал форцелор де резистенцэ — момент де резистенцэ.

Екуация обцинутэ суб форма (2) сау (2') есте нумитэ екуацие динамикэ диференциалэ а ротацией рижидулуй ын журул уней аксе фиксе.

Компарынд ачаств екуацие ку екуация динамикэ а миш-



Фиг. 239.

кэрий детранслацие а рижидулуй  $M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^{(e)}$  ведем, кэ моментул де инерции ал рижидулуй есте мэсура инерцией корпулуй ын мишкаря де ротации.

Екуация (2') дэ посибилитатя де а детермина екуация чинематикэ а ротацией рижидулуй, дакэ сынт куноскуте форцеле, каре акционязэ асупра корпулуй. Интегрынд екуация (2'), обцинем

$$\varphi = f(t, C_1, C_2).$$

Детерминэм константеле арбитраре де интеграре дин кондицииле инициале. Ын калитате де кондиций инициале индикэм унгул де ротации инициал ши витеза унгуларэ инициалэ.

Ла компунеря екуацией диференциалэ а ротацией требуе сэ цинем конт кэ сенсул позитив требуе сэ фие унул ши ачелаш пентру моментеле форцелор, унгул де ротации, витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ.

Дакэ куноаштем екуация чинематикэ а ротацией рижидулуй ын журул аксей фиксе, атунч дин екуация (2') путем детермина моментул принципал ал форселор екстериоре, каре акциязэ асупра корпулуй. Сэ менционэм казуриле партикуларе.

Дакэ

$$\sum M_z (\bar{F}_k^{(e)}) = L_z = \text{const},$$

атунч

$$\ddot{\varphi} = \frac{L_z}{J_z} = \text{const},$$

адикэ ротация рижидулуй есте униформ вариатэ.

Пентру

$$\sum M_z (\bar{F}_k^{(e)}) = 0$$

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \text{ши} \quad \omega = \text{const},$$

адикэ рижидул се ротеште униформ.

*Екземплу.* Ун рижид се ротеште ын журул уней аксе вертикале фиксе. Витеза унгюларэ инициалэ а луй есте  $\omega_0$ . Асупра рижидулуй акциязэ моментул де ротации  $M$  констант ши ындрептат ын дирекция витезей унгюларе инициале. Моментул де резистенцэ, каре акциязэ асупра рижидулуй ын тимпул ротацией луй, есте пропорционал ку витеза унгюларэ, адикэ  $L = k\omega$ , унде  $k$  есте ун коефициент констант. Моментул де инерцие ал рижидулуй ын рапорт ку акса де ротации есте  $J$ . Сэ се афле екуация мишкэрий де ротации а ачестуй корп.

*Резолваре.* Компунем екуация дифференциалэ а мишкэрий де ротации а корпулуй. Дрепт сенс позитив де ротации луэм сенсул витезей унгюларе инициале. Обцинем

$$J\ddot{\varphi} = M - L = M - k\omega$$

сау

$$J\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} = M.$$

Ымпэрцим амбеле пэрць але ачестей екуаций ла  $J$ , обцинем

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J} \dot{\varphi} = \frac{M}{J}. \quad (\text{a})$$

Ачаста есте о екуация линиарэ неоможенэ де ординул дой ку коефициенць констанць. Солуция ей есте егалэ ку солуция жeneralэ а екуацией оможене плус о солуция партикуларэ. Нотэм прин  $\varphi_1$  солуция екуацией оможене, яр прин  $\varphi_2$ —солуция партикуларэ. Пентру а обцине солуция  $\varphi_1$ , компунем екуация карактеристикэ ши детерминэм рэдэчинице ей:

$$\lambda^2 + \frac{k}{J}\lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -\frac{k}{J}.$$



Де унде пентру  $\varphi_1$  авем

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{J}t}.$$

Солуция партикулярэ се афлэ суб форма  $\varphi_2 = At$ , унде  $A$  есте ун коефициент констант.

Субституинд  $\varphi$  ын екуация (а) прин  $\varphi_2$ , обцинем

$$\frac{k}{J} A = \frac{M}{J}.$$

Де унде

$$A = \frac{M}{k}.$$

Солуция екуацией (а) есте

$$\varphi = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{J}t} + \frac{M}{k}t. \quad (б)$$

Константеле арбитраре де интеграре  $C_1$  ши  $C_2$  се детерминэ дин кондицииле инициале. Консидерэм унгул инициал де ротацие егал ку zero. Ын ачест каз пентру  $t=0$   $\varphi=0$ ,  $\dot{\varphi}=\omega_0$ .

Луынд деривата луй  $\varphi$ , авем

$$\dot{\varphi} = -\frac{k}{J} C_2 e^{-\frac{k}{J}t} + \frac{M}{k}. \quad (в)$$

Субституинд кондицииле инициале ын (б) ши (в), обцинем

$$0 = C_1 + C_2, \quad \omega_0 = -\frac{k}{J} C_2 + \frac{M}{k}.$$

Дин ачесте екуаций

$$C_2 = \frac{J}{k} \left( \frac{M}{k} - \omega_0 \right), \quad C_1 = -C_2 = -\frac{J}{k} \left( \frac{M}{k} - \omega_0 \right).$$

Субституим валориле константелор  $C_1$  ши  $C_2$  ын екуация (б). Обцинем екуация чинематикэ а мишкэрий де ротацие

$$\varphi = \frac{J}{k} \left( \omega_0 - \frac{M}{k} \right) \left[ 1 - e^{-\frac{k}{J}t} \right] + \frac{M}{k}t.$$

Пентру валорь фоарте марь але тимпулуй  $t$  (формал ла лимитэ пентру  $t \rightarrow \infty$ ) дин екуация (в) резултэ

$$\omega = \dot{\varphi} \approx \frac{M}{k} = \text{const},$$

адикэ песте ун интервал фоарте маре де тимп мишкаря ест е апроксиматив о ротацие униформэ ку витеза унгуларэ  $\frac{M}{k}$ .

Витеза унгуларэ а ачестей ротаций униформе ну депинде де мэрия витезей унгуларе инициале. Ачест резултат поате фи обцинут дин консидерацииле урмэтоаре.

Пресупунем, кэ дупэ ынчепутул мишкэрий витеза унгуларэ а корпулуй се мэреште. Ымпреунэ ку дынса се мэреште ши моментул де резистенцэ  $L$ . Дакэ моментул де резистенцэ  $L$  есте егал дупэ мэриме ку моментул де ротацие  $M$ , акчелерация унгуларэ есте нулэ, витеза унгуларэ ну вариязэ ши моментул де резистенцэ рэмыне егал ку моментул де ротацие. Мишкаря де май департе есте униформэ.

Егалынд  $M$  ку  $L$ , детерминэм витеза унгуларэ а ачестей ротаций униформе

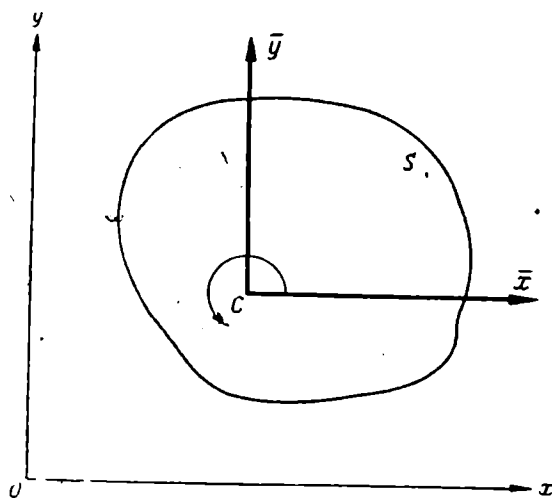
$$M = L = k\omega, \quad \omega = \frac{M}{k}.$$

Результатул обцинут ну депинде де витеза унгуларэ инициалэ.

Дин солуция екзактэ а проблемей реесе, кэ витеза унгуларэ а корпулуй девине егалэ ку  $\omega = \frac{M}{k}$  песте ун интервал де тимп инфинит де маре.

### § 3. ЕКУАЦИИЛЕ ДИНАМИЧЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИИ ПЛАН-ПАРАЛЕЛЕ А РИЖИДУЛУЙ

Сэ нотэм прин  $H$  планул, ын каре есте ситуатэ траектория чентрулуй маселор корпулуй. Секциуня корпулуй ын ачест план есте фигура  $S$ . Луэм системул де координате фикс  $xu$  ын планул  $H$ , яр системул мобил  $\bar{x}\bar{u}$ , каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция, ыл луэм ку орижина ын чентрул маселор  $C$  ал корпулуй (фиг. 240). Акса фиксэ  $Oz$  ши акса мобилэ  $C\bar{z}$  сынт перпендикуларе пе планул  $H$ . Пентру комодитате нотэм акса мобилэ прин  $C\bar{z}$ .



Фиг. 240.

Мишкарĳа корпуслуй есте детерминатэ, дакэ есте дефинитэ мишкарĳа центрулуй маселор ын планул  $H$  ши ротация корпуслуй ын журул аксей, каре трече прин центрул маселор, перпендикулар пе планул  $H$ , адикэ ын журул аксей  $Cz$ .

Пентру а детермина мишкарĳа центрулуй маселор вом фолоси екуацииле диференциале але мишкэрий центрулуй маселор ын проекций пе акселе де координате  $x$  ши  $y$ . Ын ачест каз

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)};$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}.$$

Ын ачесте екуаций  $M$  есте маса корпуслуй;  $x_C$  ши  $y_C$  сынт координателе центрулуй маселор корпуслуй; ын партя дряптэ а ачестор екуаций авем сума проекциилор тутурор форцелор екстериоре пе акселе  $x$  ши  $y$ , каре акциязэ асупра корпуслуй.

Пентру а стабилѳ лежя мишкэрий де ротация а рѳжидулуй ын журул аксей  $Cz$  сэ апликэм теорема деспре моментул чинетик ал системулуй ын мишкарĳа релативэ а са фацэ де центрул маселор, сау фацэ де системул де координате, каре ефектузэ о мишкарĳа де трансляция ымпреунэ ку центрул маселор. Ын казул де фацэ ачеста есте системул де координате  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ . Конформ ачестей теореме ын проекций пе акса  $Cz$  авем

$$\frac{dK_{Cz}^{(r)}}{dt} = \sum M_{Cz} (\bar{F}_k^{(e)}),$$

унде  $K_{Cz}^{(r)}$  есте моментул чинетик ал рѳжидулуй ын рапорт ку акса  $Cz$  ла мишкарĳа [са релативэ фацэ де системул  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ,  $K_{Cz}^{(r)} = J_{Cz} \omega$ , дебарече мишкарĳа корпуслуй фацэ де системул  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  есте о мишкарĳа симплэ де ротация ын журул аксей  $Cz$ .

Субституинд мэримя  $K_{Cz}^{(r)}$ , обцинем

$$\frac{d}{dt} (J_{Cz} \omega) = \sum M_{Cz} (\bar{F}_k^{(e)})$$

сау

$$J_{Cz} \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{Cz} (\bar{F}_k^{(e)}).$$

Ачастэ екуация поате фѳ презентатэ ын фелул урмэтор

$$J_{Cz} \ddot{\varphi} = \sum M_{Cz} (\bar{F}_k^{(e)}).$$

Унинд екуацииле диференциале але мишкэрий центрулуй ма-

селор ши ултима екуацие, обцинем екуацииле динамиче дифференциале але мишкэрий план-паралеле а рижидулуй:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \Sigma F_{kx}^{(e)}, \\ M\ddot{y}_c &= \Sigma F_{ky}^{(e)}, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= \Sigma M_{Cz}^{(e)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Дакэ куноаштем форцеле, каре акционязэ асупра корпулуй, атунч обцинем екуацииле чинематиче але мишкэрий план-паралеле а рижидулуй, интегрывнд ачест систем де екуаций, адикэ

$$x_c = f_1(t), \quad y_c = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Примеле доуэ екуаций детерминэ мишкаря чентрулуй маселор, яр екуация а трея детерминэ ротация рижидулуй ын журул аксей централе, перпендикуларе пе планул мишкэрий.

Константеле арбитраре де интеграре се детерминэ дин кондицииле инициале. Ын кондицииле инициале требе дефините координателе позицией инициале а чентрулуй маселор корпулуй, проекцииле витезей инициале а чентрулуй маселор пе акселе де координате  $x$  ши  $y$ , унгул де ротации инициал ши витеза унгуларэ инициалэ.

Де екземплу, пентру  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} x_c &= x_c^0; & y_c &= y_c^0; \\ \dot{x} &= \dot{x}_c^0; & \dot{y}_c &= \dot{y}_c^0; \\ \varphi &= \varphi_0; & \dot{\varphi} &= \omega_0. \end{aligned}$$

Екуацииле дифференциале але мишкэрий план-паралеле се фолосеск фоарте дес ла резолваря проблемелор практиче, деоарече диферите елементе але мултор механизме ефектуязэ мишкэрь план-паралеле.

*Екземплу.* Ун диск оможен ку греутатя  $P$  ши раза  $r$  поате сэ се ростоляекэ пе ун план оризонтал. Асупра дискулуй ын планул сэу акционязэ моментул де ротации  $M$ , яр ын чентрул дискулуй форца оризонталэ  $Q$ . Коефициентул де фрекаре де алунекаре динтре диск ши план есте  $f$ , яр коефициентул де фрекаре де ростополире есте  $\delta$ . Сэ се афле екуацииле мишкэрий дискулуй, дакэ:

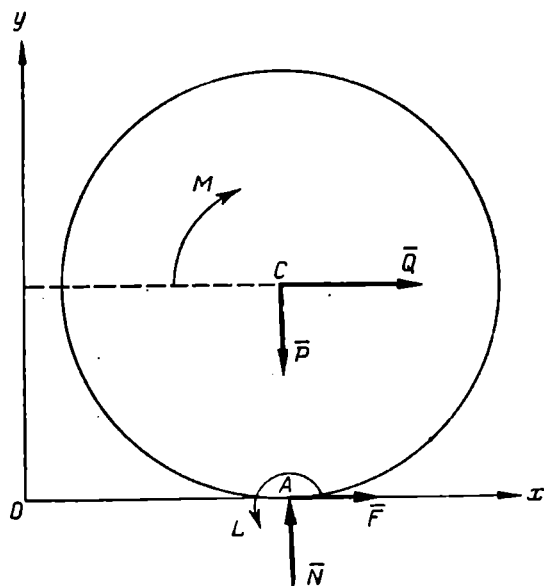
$$P = 10 \text{ кн}; \quad r = 400 \text{ мм}; \quad Q = 2 \text{ кн}; \quad M = 3000 \text{ нм}; \quad f = 0,3; \quad \delta = 0,2 \text{ чм}.$$

Ын моментул инициал  $t = 0$  дискул се афлэ ын планул вертикал, витеза инициалэ а чентрулуй дискулуй, витеза унгуларэ ши унгул де ротации сынт егале ку zero.

*Резолваре.* Мишкаря дискулуй есте план-паралелэ, деоарече ел ынчепе мишкаря са дин старя де репаус суб акциуня форцелор, каре акционязэ ын планул дискулуй. Дискул поате сэ

се ростоґоляскэ фэрэ алунекаре ши ку алунекаре. Дискул се ростоґолеште фэрэ алунекаре, дакэ ынтре диск ши план апаре форца де фрекаре нечесарэ пентру ачаста.

Форца максимэ а фрекэрий де алунекаре динтре диск ши план есте  $F_{\max} = fN$ , унде  $N$  есте реакциуня нормалэ. Форца де фрекаре  $\vec{F}$ , нечесарэ ка ростоґолиря сэ фие фэрэ алунекаре, ну требуе сэ фие нумайдекыт егалэ ку форца де фрекаре максималэ. Гэсим ачастэ форцэ дин екуацииле дифференциале але мишкэрий план-паралеле а дискулуй. Деачея алкэтуим екуацииле дифференциале але мишкэрий пресупунынд, кэ дискул се ростоґолеште фэрэ алунекаре.



Фиг. 241.

Сэ алеґем акселе де координате  $x$  ши  $y$  ын планул дискулуй ын фелул урмэтор: луэмакса  $x$  ын планул оризонтал, ориентиынды сенсул позитив ал ей ын сенсул форцей  $\vec{Q}$ , яр акса  $y$  о дучем прин позици инициалэ а чентрулуй дискулуй. Ын фигура 241 есте репрезентат дискул ынтр'ун момент арбитрар  $t$ . Асупра дискулуй акционязэ урмэтоареле форце екстериоаре: форца де греутате а дискулуй  $\vec{P}$ , форца оризонталэ  $\vec{Q}$ , моментул  $M$  каре ротеште дискул ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник, реакциуня нормалэ  $N$  а планулуй, форца фрекэрий де алунекаре  $\vec{F}$  ши моментул куплулуй фрекэрий де ростоґолире  $L$ , каре ротеште дискул ын сенс контрар мишкэрий ачелор де часорник.

Форца де фрекаре де алунекаре  $\bar{F}$  требуе ориентатэ ын сенсул опус витезей пунктулуй де жос ал дискулуй. Екуацииле диференциале але мишкэрий, дупэ кум с'а пресупус май сус, се компун пентру ростогирия фэрэ алунекаре а дискулуй. Ын ачест каз витеза пунктулуй де жос ал дискулуй есте нулэ ши прин урмаре, сенсул форцей де фрекаре де алунекаре  $\bar{F}$  есте некуноскут. Сэ ориентэм форца де фрекаре  $\bar{F}$  ын сенсул позитив ал аксей  $x$ . Резолвынд проблема, детерминэм модулул ши сенсул форцей  $\bar{F}$ . Дрепт сенс позитив ал моментелор форцей ши карактеристичилор унгларе але мишкэрий луэм сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник.

Екуацииле диференциале але мишкэрий дискулуй сынт

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^{(e)} = Q + F, \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^{(e)} = N - P, \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}) = Fr - M + L. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Системул (а) де трей екуаций концине шасе некуноскутэ ануме:  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $\varphi$ ,  $F$ ,  $N$ ,  $L$ .

Пентру а резолва проблема деспре мишкаря план-паралелэ а рижидулуй либер сынт суфичиенте трей екуаций диференциале але мишкэрий план-паралеле а рижидулуй. Ын казул рижидулуй супус ла легэтурь ын ачесте екуаций фигурызэ реакциуниле некуноските але легэтурилор, адикэ нумэрул некуноскутелор есте май маре декыт трей. Карактерул легэтурилор, ла каре есте супус корпул, дэ посибилитате де а алкэтуи нумэрул нечесар де екуаций суплиментаре. Деч, сэ алкэтуим ачесте екуаций суплиментаре.

Дискул се ростоголеште пе планул оризонтал, прин урмаре

$$y_C = \text{const} = r.$$

Дискул се ростоголеште фэрэ алунекаре, аша кэ чентрул инстантанеу ал витезелор дискулуй се афлэ ын пунктул де жос А ал луй, яр витеза чентрулуй дискулуй  $v_C$  се детерминэ дупэ формула

$$v_C = r\omega = r |\dot{\varphi}|.$$

Проекция векторулуй витезей  $\bar{v}_C$  пе акса  $x$  есте  $\dot{x}_C = -r\dot{\varphi}$ . Сенсул минус дин партя дряптэ индикэ, кэ ла ростогирия дискулуй спре дряпта проекция витезей чентрулуй дискулуй пе акса  $x$   $\dot{x}_C > 0$ , яр  $\dot{\varphi} < 0$ . Ла мишкаря дискулуй спре дряпта ел се ротеште ын сенсул мишкэрий ачелор де часорник, яр сенсул позитив, дупэ кум с'а индикат май сус, есте контрар мишкэрий

ачелор де часорник. Менционэм, кэ релация  $\dot{x}_c = -r\dot{\varphi}$  есте жустэ ши ла мишкаря дискулуй спре стынга, деоарече атунач  $\dot{x}_c < 0$ , яр  $\dot{\varphi} > 0$ .

Ултура екуация суплиментарэ о обцинем, обсервынд, кэ ын презенца ростогирий моментул куплулуй де фрекаре де ростогири есте максимал, адикэ

$$L = L_{\max} = \delta N,$$

унде  $N$  есте реакциуня нормалэ а планулуй.

Авем урмэтоареле екуаций суплиментаре:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= r, \\ \dot{x}_c &= -r\dot{\varphi}, \\ L &= \delta N. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ам обцинут шасе екуаций ши шасе некунсскуте. Пентру а стабили карактерул мишкэрий есте нечесар сэ детерминэм форца де фрекаре де алунекаре  $F$ .

Дин прима екуация а системулуй (6) ши екуация а доуа а системулуй (а)

$$\ddot{y}_c = 0, \quad N = P.$$

Дин екуация а трей а системулуй (6)

$$L = \delta P.$$

Сэ експримэм  $\ddot{\varphi}$  дин екуация а трей а системулуй (а):

$$\ddot{\varphi} = \frac{Fr - M + L}{J_{Cz}}$$

сау субституинд валоаря моментулуй де инерции,

$$\ddot{\varphi} = \frac{2(Fr - M + L)}{mr^2}.$$

Сэ деривэм екуация а доуа а системулуй (б) ын рапорт ку тимпул ши сэ субституим валоаря луй  $\ddot{\varphi}$ :

$$\ddot{x}_c = -r\ddot{\varphi} = -\frac{2(Fr - M + L)}{mr} = -\frac{2}{m} \left( F - \frac{M}{r} + \frac{L}{r} \right).$$

Сэ субституим валоаря  $\ddot{x}_c$  ын прима екуацие а системулуй (а) ши сэ детерминэм форца де фрекаре  $F$ :

$$-m \frac{2}{m} \left( F - \frac{M}{r} + \frac{L}{r} \right) = Q + F$$

сау

$$-2F + \frac{2M}{r} - \frac{2L}{r} = Q + F,$$

де унде, субституинд валоаря  $L = \delta P$ , обцинем

$$F = -\frac{Q}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta P}{r}. \quad (в)$$

Астфел, мэримя форцей де фрекаре де алунекаре ла ростоголиря фэрэ алунекаре се детерминэ дупэ формула (в). Еа поате фи позитивэ сау негативэ. Дакэ еа есте позитивэ, форца де фрекаре  $F$  есте ориентатэ ынтр'адевэр аша кум с'а пресупус, адикэ ын сенсул позитив ал аксей  $x$ . Дакэ форца есте негативэ, атунч еа есте ориентатэ ын сенсул контрар, адикэ ын сенсул негатив ал аксей  $x$ .

Пентру а стабилн карактерул мишкэрий дискулуй, требуе сэ компарэм мэримя форцей  $F$ , нечесарэ пентру а асигура ростоголиря фэрэ алунекаре, ку форца максимэ де фрекаре де алунекаре

$$F_{\max} = fN = fP.$$

Ростоголиря аре лок фэрэ алунекаре, дакэ форца де фрекаре, нечесарэ пентру ачаста есте посибилэ, адикэ дакэ  $|F| \leq F_{\max}$ , ши ку алунекаре дакэ  $|F| > F_{\max}$ .

Аич форца  $F$  с'а луат дупэ модул, деоарече мэримя ачестей форце дупэ формула (в) поате фи ши негативэ.

Дакэ  $F = F_{\max}$ , атунч се консидерэ, кэ дискул се ростоголеште фэрэ алунекаре, деоарече есте сатисфэкутэ екуация а доуа а системулуй (б)  $\ddot{x} = -r\phi$ .

Пентру валориле нумериче дате

$$F_{\max} = fP = 0,3 \cdot 10\,000 = 3000 \text{ н},$$

$$F = -\frac{2000}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3000}{0,4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{0,002 \cdot 10\,000}{0,4} = 4300 \text{ н}.$$

Дупэ кум ам менционат  $|F| > F_{\max}$ , адикэ дискул се ростоголеште ку алунекаре, яр форца де фрекаре есте максималэ

$$F = F_{\max} = 3000 \text{ н}.$$



Форца максималэ де фрекаре ла рестогиля ку алунекаре требуе луатэ ку семнул обцинут пентру форца де фрекаре  $F$ .

Дин екуацииле диференциале але системулуй (а)

$$\frac{10\,000}{9,8} \ddot{x}_c = 5000; \quad |\ddot{x}_c| = 4,9;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10\,000}{9,8} \cdot 0,16; \quad \ddot{\varphi} = 3000 \cdot 0,4 - 3000 + 0,002 \cdot 10\,000; \quad \ddot{\varphi} = -21,8.$$

Дупэ интеграря ши детерминаря константелор арбитраре екуацииле мишкэрий дискулуй капэтэ форма

$$x_c = 2,45 t^2 \text{ м}, \quad \varphi = -10,9 t^2 \text{ рад.}, \quad y_c = 0,4 \text{ м}.$$

## БАЗЕЛЕ МЕКАНИЧИЙ АНАЛИТИЧЕ

## § 1. НОЦИУНЬ ФУНДАМЕНТАЛЕ

Объектул механикий аналитиче

Механика аналитикэ стабилеште методеле жєнерале, униче, ку ажуторул кэрора се пот студия мишкаря ши екилибрул орькэ-руй систем материал.

Ачесте методе репрезинтэ апликаря методелор анализей математиче ла студиул тутурор мишкэрилор системулуй материал. Аич се дедук екуацииле мишкэрий де ачеш структурэ, индипендент де систем ши карактерул кондицилор, ын каре се петрече мишкаря. Екуацииле жєнерале але механикий аналитиче сынт май комод атыт ла резолваря проблемелор конкрете але механикий, кыт ши ла черчетэриле жєнерале але проприетэцилор мишкэрий.

Тоате теоремеле ши екуацииле механикий аналитиче реесе дин кытева ноциунь ши пропозиций фундаментаде.

Легэтурь

Сэ консидерэм ун систем дин  $N$  пункте материале ши сэ пресупунем, кэ ын тимпул мишкэрий системулуй координателе, витезеле ши акчелерацииле пунктелор луй сатисфак ниште кондиций, индипендент де форцеле активе, каре акционязэ асупра ачестуй систем. Астфел де кондиций сынт нумите легэтурь, импуге системулуй. Легэтуриле пот фи експримате прин ниште релаций ынтре координателе  $(x_k, y_k, z_k)$  але пунктелор  $(k=1, 2, \dots, N)$ , деривателе лор ын рапорт ку тимпул  $(\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)$  — компонентеле витезелор ши деривателе де ординул дой  $(\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k)$  — компонентеле акчелерациилор ын системул де координате консидерат. Ачесте релаций пот концине ын мод експличит ши тимпул  $t$ .

Релацииле, каре експримэ легэтуриле импуге, пот фи сау екуаций сау инекуаций. Легэтуриле, ла каре есте супс системул де пункте материале, лимитязэ ынтр'о мэсурэ оарекаре мишкэриле посибиле але системулуй суб акциуня унор сау алтор форце активе ын жомпарацие ку мишкэриле, пе каре ле-ар авя ачелаш систем фиинд либер, адикэ системул каре ну е супс ла легэтурь. Системул либер поате ефектуа орьче мишкэрь ын спациу, пентру ачаша требуе сэ акционэм асупра луй ку форце активе, алесе ын мод респектив. Требуе сэ менционэм, кэ лимитэриле импуге

де легэтурь, пот авя о дестинация спечиялэ, нечесарэ ын практикэ, ын диферите рамуь але техниий. Де екземплу, системеле механике дирижабиле, сынт системе ку легэтурь детерминате, каре кондициязэ режимул дат ал мишкэрий, аша кэ проблема техниий констэ ын реализаря ачестор легэтурь суб форма унор конструкций кореспунзэтоаре.

Аксиома легэтури лор. Ын механика аналитикэ се апликэ аксиома деопре легэтурь, аксиомэ, черчетатэ ши ын статикэ: ануме, се консидерэ, кэ инфлуенца легэтури лор асупра позицией ши мишкэрий пунктелор материалае поате фи реализатэ прин акциуня форселор де реакциуне але легэтури лор. Апликынд ын пунктеле системулуй реакциуниле легэтури лор, путем консидера системул дат дрепт ун систем либер де пункте материалае.

### Класификаря легэтури лор

Карактерул легэтури лор детерминэ ну нумай фелул мишкэрий системулуй, чи ши алежеря методелор де черчетаре але ачестей мишкэрь а системулуй. Деачея требуе сэ консидерэм диферите типурь де легэтурь. Класификаря легэтури лор поате фи ын-фэптуитэ дупэ диферите партикуларитэць. Вом ымпэрци легэтуриле ын доуэ класе: легэтурь олономе ши легэтурь неолономе.

Се нумеск легэтурь *олономе* легэтуриле, каре се експримэ прин екуаций фините сау инекуаций фаць де координате, сау прин екуаций диференциале интеграбиле фаць де координате. Легэтуриле олономе\* сынт нумите десеорь легэтурь жеометриче.

Се нумеск легэтурь *неолономе* легэтуриле, каре се експримэ прин екуаций диференциале неинтеграбиле фаць де координате, адикэ прин екуаций, каре кончин ну нумай координателе пунктелор системулуй, чи ши деривателе лор ын рапорт ку тимпул. Екуацииле легэтури лор неолономе ну се интегрязэ нич фиекаре ын парте, нич тоате ымпреунэ. Прин урмаре, легэтуриле неолономе де градул ынтый се експримэ прин екуаций неинтеграбиле де форма

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0. \quad (1)$$

Екуация есте неинтеграбилэ, дакэ еа ну поате фи адусэ ла о екуацие, партя стынгэ а кэрея ар фи диференциала тоталэ а уней функций оарекаре нумай де координателе пунктелор системулуй, адикэ ла о екуацие де форма  $df(x_k, y_k, z_k, t) = 0$ , дупэ интеграря кэрея се обцине екуация легэтурий олономе  $f(x_k, y_k, z_k, t) = \text{const.}$

Легэтуриле неолономе сынт нумите де асеменя ши легэтурь чинематиче, деоарече еле мэржинеск ну нумай координателе пунк-

\* «Олоном» есте ун кувынт греческ. Сенсул луй констэ ын ачея, кэ екуация легэтурий се интегрязэ комплект ши се редуче ла о екуацие ын каре фигурязэ нумай координателе пунктелор системулуй.

телор системулуй, чи ши витезеле, ши акселерацииле ачестор пункте.

Се деосебеск легэтурь, че депинд де тимп, ши легэтурь, каре ну депинд де тимп. Се нумеште легэтурэ, че ну депинде де тимп, легэтура, каре се експримэ принтр'о екуацие сау принтр'о инекуацие, ын каре ну фигурызэ тимпул  $t$ . Де екземплу, дакэ пунктул рэмыне пе супрафаца елипсоидулуй

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

а частэ екуацие аратэ, кэ легэтура ну вариязэ ку тимпул, пунктул материал се афлэ пе ун елипсоид, каре ну се депласязэ ын спациу ши ну се деформязэ. Легэтуриле, че ну пединд де тимп, сынт нумите ши склерономе, адикэ де формэ нескимбабилэ, асемэнэтор ку корпул солид инвариабил. Легэтуриле, че ну депинд де тимп, сынт нумите де асемения ши легэтурь стационаре.

Се нумеште легэтурэ, че депинде де тимп, легэтура, каре се експримэ принтр'о екуацие сау инекуацие, каре концине ын мод експлицит тимпул. Екуация, каре експримэ легэтура олономэ, че депинде де тимпул  $t$ , аре форма

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0. \quad (2)$$

Де екземплу, легэтура, каре се репрезинтэ прин екуация

$$\frac{x^2}{a^2 t^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

констэ ын ачея, кэ пунктул есте ситуат пе ун елипсоид, каре-шь скимбэ форма, деоарече семиакса ачестуй елипсоид, ориентатэ ын дирекция аксей  $x$ , ышь скимбэ лунжимя. Легэтура есте мобилэ, адикэ ну есте инвариабилэ. Легэтура каре се експримэ прин екуация

$$\frac{(x - 2t)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

есте де асемения о легэтурэ мобилэ.

А частэ екуацие аратэ, кэ пунктул материал се афлэ пе ун елипсоид, чентрул кэруя се мишкэ пе акса  $x$  спре дряпта ку о витезэ, егалэ ку доуэ унитэць. Легэтуриле, че депинд де тимп, сынт нумите ши реономе (мобиле).

Се нумеск легэтурь олономе билатерале легэтуриле, каре се експримэ прин екуаций, де екземплу, ын казул унуй сингур пункт материал:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Екуация аратэ, кэ пунктул требуе сэ се гэсяскэ нумайдекыт

ле супрафаца, дескрисэ де ачастэ екуацие. Легэтура билатералэ ну пермите пунктулуй сэ пэрэсякэ ачастэ супрафацэ нич ынтр'о парте а ей.

Прин урмаре, ын казул легэтурый билатерале пунктул материал се афлэ паркэ ынтре доуэ стратурь инфинит апропияте, каре формязэ супрафаца, пе каре се афлэ пунктул материал, индентент де форцеле активе че акционязэ асупра луй. Легэтуриле билатерале сынт нумите де асеменя легэтурь неелибератоаре. Се нумеск легэтурь унилатерале (сау елибератоаре) легэтуриле, каре се експримэ прин инекуаций.

### Координателе Женерализате

Сэ консидерэм ун систем дин  $N$  пункте материале ши сэ пресупунем, кэ ачестуй систем и сау импус легэтурь олономе, каре се експримэ прин кытева, де екземплу  $l$  екуаций але легэтурилор де форма

$$f_v(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, l). \quad (3)$$

Прин урмаре, тоате  $3N$  координате але пунктелор системулуй сынт легате ынтре еле прин екуацииле (3). Ачестэ  $l$  екуаций пот фи резолвате ын рапорт ку карева вариабиле, нумэрул кэраора есте егал ку  $l$ , адикэ ку нумэрул легэтурилор олономе. Ку алте кувинте,  $l$  координате картезиене пот фи експримате прин челеалалте  $3N - l$  координате ши ачестэ  $l$  координате пот фи консидерате дрепт функций де челеалалте  $3N - l$  координате вариабиле. Есте евидент, кэ нумэрул координателор индентенте, каре-л вом нота ку  $n$ , есте

$$n = 3N - l. \quad (4)$$

Ла черчетаря уней кестиунь оарекаре а механичий сау ла резолваря диферитор проблеме, координателе картезиене индентенте се експримэ де обичей прин алць параметри жеометричь. Де екземплу, ын чинематикэ се ынтребуинцязэ координателе курбилий. Ын механика аналитикэ параметрий кореспунзэторь сынт нумиць координате женерализате. Ле вом нота прин  $q_i$ , унде  $i = 1, 2, \dots, n$ . Координателе женерализате пот фи унгорь, сегменте сау алте мэримь. Вом нота тоате  $3N$  координате картезиене ку  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 3N$ ).

Сэ тречем дупэ ануите формуле де тречере де ла  $n$  координате картезиене индентенте ла алте  $n$  координате женерализате индентенте, адикэ сэ експримэм координателе картезиене индентенте прин  $n$  координате женерализате  $q_i$ , каре де асеменя сынт индентенте. Дупэ ачэя, пе база екуациилор легэтурилор (3) сэ експримэм ши рестул координателор картезиене индентенте прин ачеляшь координате женерализате. Ка резултат обцинем, кэ дакэ системулуй и сау импус  $l$  легэтурь олономе, атунч тоате координателе картезиене

але пунктелор пот фи експримате ку ажуторул унор релаций фините прин координателе жєнерализате, ын нумэр де  $n = 3N - l$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \dots \\ x_{3N} &= x_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Сэ ынтродучем ноциуня де нумэрул граделор де либертате але системулуй ку легэтурь олономе. *Нумэрул граделор де либертате але системулуй ку легэтурь олономе есте нумэрул де координате жєнерализате индєпенденте, прин каре пот фи експримате координателе картезиєне але тутурор пунктелор ачестуй систем.* Ын партикулар, принтре координателе жєнерализате пот рэмыне ши унеле координате картезиєне индєпенденте. Дакэ легэтуриле олономе ну депинд експлицит де тимпул  $t$ , атунч формулеле, каре експримэ координателе картезиєне прин чєле жєнерализате, ну концин експлицит тимпул. Раза вектоаре  $\bar{r}_k$  а фиекэруй пункт ал системулуй се експримэ ын мод векториал прин координателе ачестуй пункт ын фєлул урмэтор

$$\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k},$$

прин урмаре, раза вектоаре а фиекэруй пункт есте де асеменя о функции векториалэ де координателе жєнерализате ши де тимп ын казул легэтурилор реономе

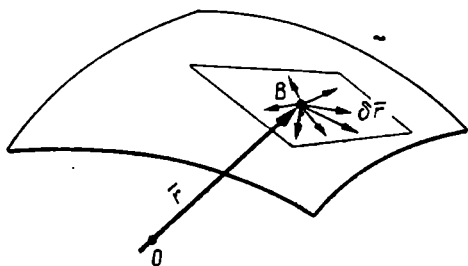
$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

Прин урмаре, пентру а дефини мишкаря системулуй де пункте materiale considerate, адикэ траектория ши лежя мишкэрий фиекэруй пункт пе траектория са, есте суфициент сэ детерминэм май ынтый тоате координателе жєнерализате  $q_i$  ка функций де тимп, апой апликынд формулеле, каре експримэ координателе картезиєне але тутурор пунктелор системулуй прин координателе жєнерализате путем експрима тоате координателе картезиєне ка функций де тимп, адикэ путем дефини мишкаря системулуй. Ынсэ пентру а детермина координателе жєнерализате  $q_i$  але системулуй есте нечесар сэ дєдучем екуацииле диференциале але мишкэрий ын рапорт ку  $q_i$ . Ын динамика аналитикэ се дєдук регулили алкэтуирий ачестор екуаций диференциале, дакэ сынт куноскуте форцеле, каре акцияээ асупра пунктелор системулуй. Требуе сэ менционэм, кэ фиекэрей тоталитэць де валорь але координателор жєнерализате  $q_1, q_2, \dots, q_n$  пентру ун момент оарекаре  $t$  ый кореспунде о тоталитате де валорь але координателор картезиєне але тутурор пунктелор системулуй, адикэ о позиции оарекаре детерминатэ а системулуй дат де пункте ын спациу.

Ноциуня де депласаре виртуалэ сау посибилэ аре о апликаре вастэ ын механика аналитикэ. Се консидерэ ачастэ ноциуне май ынтый пентру ун пункт супус ла легэтурь олономе. Сэ пресупу-нем, кэ пунктул материал  $B$  есте супус уней легэтурь олономе, каре ну депинде де тимп ши акциуня кэрея констэ ын ачея, кэ лунктул се афлэ пе о супрафацэ оарекаре. Фие  $f(x, y, z)=0$  есте екуация ачестей супрафече. Сэ консидерэм ынтр'ун момент оарекаре о позиции а лунктулуй, супус легэтурий дате, адикэ ун пункт, че се гэсеште пе ачастэ супрафацэ, ши сэ не ынкипуим че депласэрь елементарэ (мичь) пермите ачастэ легэтурь.

Сэ не имажинэм мулцима тутурор депласэрилор, адмисе де легэтурь. Ачесте депласэрь се репрезинтэ прин вариацииле разей вектоаре а пунктулуй

ши сынт дистрибуите пе супрафацэ консидератэ суб форма унуй евантай (фиг. 242). Абстракции фэкынд де ниште мэрымь инфинит мичь де ун ордин супериор ачесте вариаций пот фи репрезентате прин векторь, ситуацэ ын планул тангент ла супрафацэ ын пунктул дат ал ей. Прин



Фиг. 242.

урмаре, се нумеште депласаре виртуалэ а унуй пункт депласаря инфинит микэ ынкипуитэ а пунктулуй, пермисэ де легэтуриле, импусе пунктулуй ын моментул дат. Нотэм депласаря виртуалэ прин  $\delta r$  (вариация микэ имажинатэ а разей вектоаре а пунктулуй).

Дакэ пунктулуй и с'а импус о легэтурь олономэ, че депинде де тимп, адикэ о легэтурь, каре се експримэ принтр'о екуацие де форма  $f(x, y, z, t)=0$ , атунч депласэриле виртуале ын моментул дат требеуе консидерате лентру о валoare фиксэ детерминатэ а тимпулуй, адикэ пентру  $\delta t=0$ . Де екземплу, пунктул се гэсеште пе о супрафацэ, каре се мишкэ сау се деформязэ. Атунч депласэриле виртуале сынт депласэрь елементарэ ын лунгул супрафечей ын моментул дат, кынд супрафацэ окупэ о позиции анумитэ.

Се нумеште депласаре реалэ а пунктулуй ын тимпул  $dt$  о аша депласаре елементарэ, пе каре ынтр'адевэр о ефектуязэ пунктул материал ын тимпул  $dt$  ла мишкаря са ын спациу ын конформитате ку легэтуриле дате. Карактерул ачестей депласэрь депинде де форцеле, апликате ын ачест пункт, де фелул легэтурилор ши де витеза инициалэ а пунктулуй ын моментул дат  $t$ . Спре деосебире де депласаря виртуалэ депласаря реалэ се

нотязэ прин  $d\bar{r}$ . Сэ кларификэм легэтура динтре ноциуниле де депласаре виртуалэ ши де депласаре реалэ.

Дакэ легэтура импусэ пунктулуй ну депинде де тимп, фиекаре депласаре реалэ, ефектуатэ де пунктул материал, коинчиде ку уна дин депласэриле виртуале. Фиекаре депласаре виртуалэ а пунктулуй  $\delta\bar{r}$  поате фи консидератэ дрепт о депласаре релативэ а пунктулуй фацэ де супрафаца, че кореспунде екуацией легэтурый олономе. Дакэ легэтура ну депинде де тимп, адикэ супрафаца ну-шь скимбэ форма са ши ну се депласязэ ын спациу, атулч пунктул, ситуат пе дынса, н'аре мишкаре де транспорт, аша кэ тоате депласэриле виртуале але пунктулуй сынт ын ачелаш тимп ши депласэрь абсолуте. Прин урмаре, пентру орьче депласаре реалэ  $d\bar{r}$ , ефектуатэ де пунктул мобил суб акциуны унор форце оарекаре, поате фи гэситэ о депласаре виртуалэ  $\delta\bar{r}$ , егалэ ку депласаря консидератэ  $d\bar{r}$ .

Ын казул легэтурилор, каре депинд де тимп, пот фи ши аша депласэрь реале, каре ну коинчид ку нич уна дин депласэриле виртуале. Депласаря реалэ  $d\bar{r}$  се компуне ын ачест каз дин депласаря релативэ  $\delta\bar{r}$  ши о депласаре суплиментарэ  $d\bar{r}_e$ , каре я наштере сау даторитэ мишкэрий супрафецей консидерате ын ынтрэжме, сау ын урма деформэрий ачестей супрафеце.

Прин депласаре виртуалэ а системулуй де пункте материале се субынцележе депласаря, детерминатэ де депласэриле виртуале але тутурор пунктелор системулуй. Дакэ се депласязэ нумай ун сингур пункт, требуе сэ спунем, кэ ши ынтрэг системул се депласязэ. Прин урмаре, орьче депласаре виртуалэ а системулуй се дефинеште принтр'ун систем де депласэрь виртуале але тутурор пунктелор луй

$$(\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \dots, \delta\bar{r}_N).$$

Тот, че с'а спус май сус деспре релацииле динтре депласэриле реале ши челе виртуале але пунктулуй, есте карактеристик ши пентру депласэриле системулуй де пункте.

**Экспримаря депласэрилор виртуале прин координате женерализате.**

**Легэтурь олономе**

Дупэ кум се штие, дакэ унуй систем де пункте материале и се импун легэтурь олономе, атулч координателе картезиене але тутурор пунктелор системулуй пот фи експримате прин координателе женерализате  $q_1$ , нумэрул кэроа есте детерминат де нумэрул граделор де либертате але системулуй механик консидерат. Прин урмаре, ши раза вектоаре а фиекэруй пункт ал системулуй поате фи експриматэ прин координателе женерализате:  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ . Позиция системулуй се детерминэ прин валориле нумериче але координателор женерализате, прин



урмаре, ши депласаря виртуалэ а системулуй се детерминэ прин вариацииле координателор жєнерализате.

Астфел, депласаря виртуалэ а системулуй есте детерминатэ де тоталитатя вариацилор ынкипите але координателор жєнерализате

$$(\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n).$$

Депласаря реалэ а системулуй есте детерминатэ де тоталитатя вариацилор реале але координателор жєнерализате  $(dq_1, dq_2, \dots, dq_n)$ ; вариаций, каре ау лок ынтр'ун интервал оарекаре мик де тимп  $dt$ . Сэ стабилим експресия вариацией  $\delta \bar{r}$  а разей вектоаре а фикеруей пункт ал системулуй ын депласаря виртуалэ ши а диференциалей  $d\bar{r}$  а разей вектоаре ын депласаря реалэ. Ын ачест скоп вом фолоси серия Тайлор. Ла калкуларя векторулуй  $\delta \bar{r}_k$  путем сэ не ынкипуим, кэ ачест вектор есте диференциала тоталэ а функцией  $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ , ынсэ ачаста-й о диференциалэ ынкипите, кынд тимпул  $t$  есте фиксат, инвариабил. Ын ачест каз пе база регулий де калкул а диференциалелор тотале авем

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n, \quad (7)$$

адикэ ну деривэм раза вектоаре  $\bar{r}_k$  ын рапорт ку тимпул. Сау

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (8)$$

Дар

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt, \quad (9)$$

де унде пентру витеза пунктулуй, експриматэ прин координателе жєнерализате, авем

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \dot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \quad (10)$$

Аич прин векторул  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$  се субынцележе векторул

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \bar{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \bar{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \bar{k}, \quad (11)$$

унде  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  сынт версорий акселор системулуй де координате, ын каре сынт дефините координателе фикеруей пункт ал системулуй.

Ноциуня де депласэрь виртуале але системелор механике ку легэтурь неолономе есте стабилитэ педеплин ын механике нумай ын казул легэтурилоь неолономе линиаре де градул ынтый, адикэ ын казул легэтурилоь, каре се експримэ прин екуаций дифференциале неинтеграбиле де градул ынтый фацэ де координате, ши линиаре фацэ де деривателе координателор ын рапорт ку тимпул. Сэ пресупунем, кэ системулуй дин  $N$  пункте и с'ау импунс  $l$  легэтурь олономе, каре се експримэ прин екуаций фините

$$f_v(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, l), \quad (12)$$

ши  $s$  легэтурь неолономе, каре се експримэ прин екуацииле

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2 + \dots + a_{1,3N}\dot{x}_{3N} + a_1 &= 0; \\ a_{21}\dot{x}_1 + a_{22}\dot{x}_2 + \dots + a_{2,3N}\dot{x}_{3N} + a_2 &= 0; \\ a_{s1}\dot{x}_1 + a_{s2}\dot{x}_2 + \dots + a_{s,3N}\dot{x}_{3N} + a_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Коефициенций  $a_{vj}$ ,  $a_v$  депинд де  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  ши  $t$ .

Координателе картезиене се нотязэ прин  $x$  ку индичеле  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 3N$ ). Екуацииле (12) пермит експримаря координателор тутурор пунктелор системулуй ши а разелор вектоаре  $\vec{r}_k$  прин  $n = 3N - l$  координате женерализате  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Дин екуацииле (13) резултэ екуацииле суплиментаре але легэтурилоь фацэ де  $q_i$  ши  $\dot{q}_i$ :

$$A_{p1}\dot{q}_1 + A_{p2}\dot{q}_2 + \dots + A_{pn}\dot{q}_n + A_p = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots, s).$$

Дупэ ынмулциря ку  $dt$  екуацииле суплиментаре се трансформэ ын екуаций дифференциале

$$A_{p1}dq_1 + A_{p2}dq_2 + A_{p3}dq_3 + \dots + A_{pn}dq_n + A_p dt = 0 \quad (14)$$

$$(p = 1, 2, \dots, s),$$

унде  $A_{pj}$  сынт функций де  $q_i$  ши  $t$ .

Се нумеск депласэрь виртуале але системулуй ку легэтурь неолономе депласэриле  $\delta\vec{r}_k$ , каре сатисфак релацииле легэтурилоь пентру  $t$  фиксат ( $\delta t = 0$ ):

$$A_{p1}\delta q_1 + A_{p2}\delta q_2 + \dots + A_{pn}\delta q_n = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, s). \quad (15)$$

Прин урмаре, ынтре системеле ку легэтурь олономе ши системеле ку легэтурь неолономе екзистэ о диференцэ есенциалэ. Координателе женерализате але системулуй ку легэтурь олономе

сынт тоате индепенденте уна де алта. Ынтре вариацииле лор  $\delta q_i$  ну екзистэ нич ун фел де релаций. Путем авя орьче комбинаций але ачестор вариаций, де екземплу, путем сэ не ынкипуим о аша депласаре виртуалэ а системулуй, кынд нумай о сингурэ координатэ  $q_i$  вариязэ ку  $\delta q_i$ , яр вариацииле челорлалте координате сынт нуле:

$$\delta q_i \neq 0, \delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_{i-1} = 0, \delta q_{i+1} = 0, \dots, \delta q_n = 0.$$

Прин урмаре, ын системеле нумай ку легэтурь олономе нумэрул вариациилор индепенденте але координателор жєнерализате есте егал ку нумэрул ачестор координате жєнерализате.

Екуацииле (15) аратэ, кэ ын казул легэтурилул неолономе, каре се експримэ прин екуаций дифференциале неинтеграбиле, вариацииле координателор сынт депенденте ынтре еле, аспфел кэ дин (15) путем експрима  $s$  вариаций оарекаре прин рестул де  $n-s$  вариций. Нумэрул вариациилор индепенденте есте егал нумай ку  $n-s$ . Деачея нумэрул граделор де либертатэ але системелор жу легэтурь неолономе ну есте егал ку нумэрул координателор жєнерализате, чи ку нумэрул вариациилор индепенденте але координателор, адикэ нумэрул граделор де либертате але системулуй есте май мик декыт нумэрул координателор жєнерализате але системулуй. Ачаства есте о деосебире есенциалэ а системелор неолономе де челе олономе.

### Лукрул механик виртуал ал форцей

Сэ консидерэм ынкэ о ноциуне, апликатэ дес ын механика аналитикэ ла студиул мишкэрий сау екилибрулуй системелор механиче,— ноциуна де лукру механик элементар ал форцей, апликате ын лунктул материал, пе депласаря виртуалэ, сау ноциуна де лукру механик элементар виртуал ал форцей.

Дакэ ын лунктул консидерат есте апликатэ форца  $\vec{F}$ , атунч, цинынд конт де депласэриле виртуале але лунктулуй дин позиция датэ, пермисе де легэтурь, путем сэ не ынкипуим ши мэримя лукрулуй механик элементар ал форцей пе оарекаре депласаре виртуалэ. Ачест лукру механик есте токмай лукрул механик элементар виртуал ал форцей. Лукрул механик ал форцей пе о оарекаре депласаре элементарэ се експримэ прин продусул скалар динтре векторул форцей  $\vec{F}$  ши векторул депласэрий, ын казул де фацэ векторул  $\delta \vec{r}$ . Нотынд лукрул механик элементар ал форцей  $\vec{F}$  пе депласаря виртуалэ  $\delta \vec{r}$  прин  $\delta A_{\vec{F}}$ , обцинем урмэтоаря експресие пентру лукрул механик элементар виртуал ал форцей:

$$\delta A_{\vec{F}} = \vec{F} \delta \vec{r}$$

сау прин координате

$$\delta A\bar{F} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z,$$

унде  $\delta x, \delta y, \delta z$  сынт проекцииле векторулуй  $\delta \bar{r}$  пе акселе системуй де координате картезиене.

Експресия лужрулуй механик поате фи обцинутэ дин експресия продусулуй скалар, презентатэ суб форма десфэшура

$$\delta A\bar{F} = |\bar{F}| |\delta \bar{r}| \cos \alpha,$$

унде  $\alpha$  есте унгул динтре векторул форцей ши векторул депласэрий виртуале консидерате.

### Легэтурь идеале ши неидеале

Дупэ че ам стабилит ноциуня де лужру механик ал форцей пе депласаря виртуалэ, путем лэргжи класификаря легэтурило. Черчетынд форцеле, апликате ын пунктеле системуй, путем дистрибуи форцеле, каре акционязэ асупра фикэруй пункт, ын доуэ класе: форцеле активе ши реакциуниле легэтурило. Нотэм прин  $\bar{F}_k$  резултанта тутурор форцелор активе (екстериоаре ши интериоаре), апликате ын пунктул  $B_k$ ; прин  $\bar{R}_k$  — резултанта тутурор реакциунило легэтурило; прин  $\bar{F}_k^*$  — резултанта тутурор форцелор, адикэ

$$\bar{F}_k^* = \bar{F}_k + \bar{R}_k. \quad (16)$$

Сэ не ынкипуим о оарекаре депласаре виртуалэ а системуй, адикэ о тоталитате де депласэрь але тутурор пунктелор системуй ( $\delta \bar{r}_1, \delta \bar{r}_2, \dots, \delta \bar{r}_N$ ). Сэ калкулэм сума лужрурило механиче елементаре але тутурор форцелор, каре акционязэ асупра системуй пе ачастэ депласаре, адикэ  $\sum_{k=1}^N \delta A_k$ :

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^* \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k. \quad (17)$$

Есте посибил, кэ легэтуриле импугсе системуй, сынт де аша натурэ ынкыт аре лок идентитатя

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k \equiv 0. \quad (18)$$

Ачесте легэтурь сынт нумите идеале. Прин урмаре, *се нумеск легэтурь идеале але системулуй механик легэтуриле, сума лукрурилор механиче елементаре але реакциунилор кэтора пе орьче депласаре виртуалэ а системулуй есте нулэ.*

### Форце жєнерализате

Ун рол импортант ын механика аналитикэ ыл жоакэ ноциуня де форцэ жєнерализатэ. Пентру а дефини ачестэ ноциуне вом алкэтуи сума лукрурилор механиче елементаре але тутурор форцелор активе, апликате ын пунктеле системулуй (легэтуриле се консидерэ идеале), пе о депласаре оарекаре виртуалэ арбитрарэ, каре се карактеризязэ прин тоталитатя вариацилор координателор жєнерализате ( $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ ).

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k. \quad (19)$$

Ынлокуинд тоате  $\delta \bar{r}_k$  ку експресииле лор прин  $\delta q_i$ , обцинем

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (20)$$

Ын ачест каз

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (21)$$

сау, скимбынд ордия сумэрий,

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (22)$$

Сэ нотэм ку  $Q_i$  сума интериоарэ дин партя дряптэ. Вом авя

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (23)$$

Егалитатя (22) капэтэ форма

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \equiv Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_i \delta q_i + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (24)$$

Дин (23) поате фи ушор обцинутэ експресия пентру  $Q_i$  прин координате

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \quad (25)$$

Мэрия  $Q_i$  се нумеште токмай форцэ жéнерализатэ, кореспунзэтоаре координатей жéнерализате  $q_i$  ку ачелаш индиче. Прин урмаре, форцэ жéнерализатэ, каре кореспунде уней координате жéнерализате оарекаре а системулуй механик консидерат, поате фи нумит коефициентул вариацией координатей жéнерализате кореспунзэтоаре дин експресия сумей лукрурило меканиче елементаре але тутурор форцелор активе але системулуй пе орьче депласаре виртуалэ а ачестуй систем. Ачаствэ формуларе а форцей жéнерализате експримэ симултан ши прима методэ де калкул а форцей жéнерализате, компунынд сума лукрурило меканиче елементаре але форцелор пе о депласаре виртуалэ оарекаре а системулуй де пункте материале.

Пентру а симплифика калкулул есте рационал сэ луэм о асфел де депласаре виртуалэ, каре аре лок ла вариация нумай а уней сингуре координате жéнерализате  $q_i$ , кореспунзэтоаре форцей жéнерализате кэутате  $Q_i$ , адикэ пе депласаря, детерминатэ де аша вариаций, динтре каре уна  $\delta q_i \neq 0$ , яр тоате челелалте  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{i-1}, \delta q_{i+1}, \dots, \delta q_n$  сынт нуле.

Нотэм сума лукрурило меканиче але тутурор форцелор пе ачаствэ депласаре партикуларэ прин  $\left( \sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i$ . Ын конформитате ку (24) ачаствэ сумэ концине ун сингур термен

$$\left( \sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i \stackrel{?}{=} Q_i \delta q_i. \quad (25)$$

Де унде

$$Q_i = \frac{\left( \sum_{k=1}^N \delta A_k \right)_i}{\delta q_i}. \quad (27)$$

Прин урмаре, пентру а калкула форца жéнерализатэ ку индичеле дат есте суфициент сэ алкэтуим сума лукрурило меканиче пе депласаря партикуларэ, кынд вариазэ нумай о сингурэ координатэ — чя ку индичеле консидерат. Ын сфыршит, форца жéнерализатэ ку индичеле дат поате фи калкулатэ нумай аналитик, дупэ формула (25). Ын казул легэтурило неидеале експресия форцелор жéнерализате концине ши реакциуниле некуноускуте але легэтурило.

Деоарече продусул форцей жéнерализате  $Q_i$  прин вариация координатей жéнерализате  $\delta q_i$  есте лукрул механик, адикэ аре дименсиуна продусулуй динтре форцэ ши лунжме, прин урмаре, дименсиуна форцей жéнерализате депинде де дименсиуна координатей жéнерализате. Дакэ координата жéнерализатэ аре дименсиуна лунжимий, атуич форца жéнерализатэ аре дименсиуна форцей физиче (се поате мэсура ын ньютонь). Дакэ, ынсэ, координата жéнерализатэ аре дименсиуна унгулуй (се мэсоарэ ын ради-

ань), адикэ се мэсоарэ ын унитарэ обстрактэ де мэсурэ а унгюрлор, атунч форца жэнерализатэ  $Q_i$  арэ дименсиуна моментулуй форцей. Ачаства есте ын акорд ку ачя, кэ дупэ кум се штие, лүкрул механик элементар ал форцей, каре акционязэ асупра унуй корп, че се ротеште ын журул уней аксе, есте егал ку продусул моментулуй форцей ын рапорт ку ачаствэ аксэ прин унгул элементар де ротацие  $\delta A_F = M_z(F)\delta\varphi$ . Сэ дучем де асемения експрессия форцей жэнерализате ын казул, кынд форцэле се карактеризязэ ку функция де форцэ  $U$ . Фие форцэле, апликате ын пунктеле  $B_k(x_k, y_k, z_k)$  але системулуй де пункте ( $k=1, 2, \dots, N$ ), поседэ о функции де форцэ, адикэ екзистэ о аша функции  $U(x_k, y_k, z_k)$  а тутурор координателор пунктелор системулуй, ынкыт проекцииле форцелор пе акселе де координате се експримэ ын фелул урмэтор:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}. \quad (28)$$

Аич  $k=1, 2, \dots, N$ .

Ын ачест каз експрессия форцей жэнерализате  $Q_i$  се обцине субституиунд експрессиале проекциилор форцелор (28) ын експрессия форцей жэнерализате (25). Обцинем

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Партя дряптэ а ачестей егалитэць есте деривата парциалэ а функцией  $U$  ын рапорт ку координата вариабилэ  $q_i$ . Астфел, авем дефинитив

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Деоарече дрепт енержие потенциалэ а системулуй де форце се я функция

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = -U(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

експрессия форцей жэнерализате поате фи презентатэ ши ын фелул урмэтор

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (30)$$

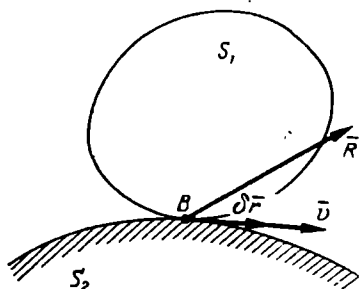
Сэ консидерэм кытева екземпле де легэтурь идеале.

1. Дакэ пунктул материал се мишкэ пе о супрафацэ недеформабилэ абсолут нетедэ, атунч легатура есте идеалэ, деоарече реакциуня легэтурий есте ындрептатэ дупэ нормала ла супрафацэ. Орьче депласаре виртуалэ  $\delta \vec{r}$  а пунктулуй есте ориентатэ танжент ла супрафацэ. Прин урмаре, лүкрул механик  $\delta A_N^*$  а

\* Реакциуня нормалэ а супрафцей се нотязэ прин векторул  $N$ .

реакциунный нормале а легэтурий пе орьче депласаре виртуалэ есте нул, деоарече  $\delta A_{\bar{N}} = \bar{N} \delta \bar{r} \equiv 0$  ка урмаре а фаптулуй, кэ унгул динтре  $\bar{N}$  ши орьче депласаре виртуалэ  $\delta \bar{r}$  есте ун унгь дрепт.

2. Сэ консидерэм корпул  $S_1$ , каре се мишкэ пе корпул фикс  $S_2$ , венинд ын контакт ку дынсул ын орьче момент ынтр'ун пункт оарекаре ал сзу (фиг. 243). Лукрул механик елементар ал форцей де реакциуне а легэтурий пе орьче депласаре виртуалэ а пунктулуй де апликаре ал реакциунный ла о депласаре виртуалэ оарекаре а корпулуй ын ынтрешиме есте



Фиг. 243.

$$\delta A_{\bar{R}} = \bar{R} \delta \bar{r}. \quad (31)$$

Десворь депласэриле виртуале се експримэ прин витезеле виртуале. Прин витеза виртуалэ се ынцележе витеза, пе каре ар поседа-о пунктул материал, атулч кынд депласаря виртуалэ ар девени о депласаре реалэ. Деоарече витеза виртуалэ есте о витезэ ынкипуитэ, вом юта дифференциала тимпулуй ку  $dt'$ . Прин урмаре, депласэриле виртуале пот фи калкулате дупэ формула кинематикэ

$$\delta \bar{r} = \bar{v} dt'. \quad (32)$$

Експресия лукрулуй механик елементар капэтэ форма

$$\delta A_{\bar{R}} = \bar{R} \bar{v} dt'.$$

Прин урмаре, пентру ка легэтура датэ сэ фие идеалэ, есте нечесар ка

$$\bar{R} \bar{v} = 0. \quad (33)$$

Дин кондиция (33) резултэ, кэ легэтура ва фи идеалэ ын казуриле următoare:

- 1)  $\bar{R} \perp \bar{v}$  — легэтурэ фэрэ фрекаре;
- 2)  $v = 0$  — легэтура пермите нумай ростогирия фэрэ алунакаре.

Ын казуриле менционате май сус легэтура корпурилор ла мишкаря релативэ а лор есте идеалэ.



## § 2. ПРИНЦИПИУЛ ДЕПЛАСЭРИЛОР ВИРТУАЛЕ

### Формуляра Женералэ а принципиулуй депласэрилол виртуале

Принципиул депласэрилол виртуале експримэ кондиция де екилибру а унуй пункт сау а унуй систем материал, асупра кэ-рора акциянэзэ форцеле активе ши легэтуриле консидерате. Пентру ка системул материал (ынтр'ун систем инерциал де ре-феринцэ), каре се афлэ суб акциянэ форцелор активе ши есте сунус легэтурилол идеале, неелибератоаре, склерономе, сэ се афле ын екилибру, есте нечесар ши суфициент ка сума лукрури-лол механиче елементаре але тутурор форцелор активе пе орь-че депласаре виртуалэ дин позиция пресупусэ де екилибру сэ фие нулэ, адикэ

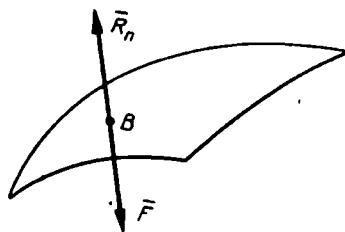
$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \vec{r}_k = 0. \quad (34)$$

Екуация (34) есте нумитэ десеорь екуация женералэ а ста-тичий, деоарече еа поате фи апликатэ тутурор системелор мате-риале, индипендент де структура лор. Ачастэ екуацие апарцине луй Лагранж.

### Демонстраря принципиулуй депласэрилол виртуале ын казул унуй сингур пункт материал

Сэ пресупунем, кэ унуй пункт материал и с'а импус о легэ-турэ олономэ, неелибератоаре, идеалэ, индипендентэ де тимп. Ачаста ынсямнэ, кэ пунктул материал се афлэ пе о супрафацэ оарекаре нетедэ, инвариабилэ дупэ формэ ши позиция са ын спациу. Реакциянэ легэтурий, адикэ реакциянэ супрафеей не-теде асупра пунктулуй, есте ындрептатэ ынтодьяуна дупэ нор-мала ла супрафацэ, ын функцие де сен-сул резултантей  $\bar{F}$ , а тутурор форцелор активе, апликате ын пунктул консиде-рат.

Сэ демонстрэм нечеситатя конди-цией де екилибру, че се концине ын формуляра принципиулуй депласэрилол виртуале. Сэ пресупунем, кэ пунктул материал, асупра кэруя акциянэзэ фор-ца активэ  $\bar{F}$  ши реакциянэ легэтурий  $\bar{R}_n$ , рэмыне ын старе де репаус ын по-зиция  $B$  (фиг. 244), ын каре ел есте пус фэрэ витезэ иници-алэ. Ынсэ, ын конформитате ку аксиомеле динамичий пунктул



Фиг. 244.

\* Индичеле  $n$  аратэ, кэ реакциянэ есте ындрептатэ дупэ нормала ла су-прафацэ.

материал поате сз се афле ын екилибру нумай атунч, кынд резул-  
танта тутурор форцелор, аппликате ын ачест пункт, есте нулэ:

$$\bar{F} + \bar{R}_n = 0.$$

Сэ ынмулцим скалар амбеле пэрць але ултимей екуаций.  
ку векторул уней депласэрь виртуале оарекаре  $\delta \bar{r}$ . Ын ачест каз

$$(\bar{F} + \bar{R}_n) \delta \bar{r} = 0$$

сау

$$\bar{F} \delta \bar{r} + \bar{R}_n \delta \bar{r} = 0.$$

Векторул  $\delta \bar{r}$  поате фи консидерат дрепт ун вектор, ситуат  
ын планул тангент ла супрафаца датэ, прин урмаре, продусул  
скалар ал векторилор  $\bar{R}_n$  ши  $\delta \bar{r}$  есте нул:

$$\bar{R}_n \delta \bar{r} \equiv 0,$$

яр пентру кондиция нечесарэ а екилибрулуй авем

$$\bar{F} \delta \bar{r} = 0,$$

адикэ

$$\delta A_{\bar{F}} = 0.$$

Сэ демонстрэм, кэ ачастэ кондиције есте суфициентэ. Де-  
монстрэм ачаста прин редучеря ла абсурд. Сэ дэ: лукрул ме-  
каник ал форцей активе  $\bar{F}$  пе орьче депласаре виртуалэ  $\delta \bar{r}$  динтр'о  
позиције оарекаре  $B$  есте нул:  $\bar{F} \delta \bar{r} = 0$ . Требуе сз демонстрэм,  
кэ пунктул материал се афлэ ын екилибру ын позиция датэ  
суб акциуня форцей консидерате ши а реакциуний легэтурий.

Сэ пресупунем контрариул, адикэ, кэ пунктул материал,  
пус ын позиция датэ фэрэ витезэ инициалэ, асупра кэруя ак-  
ционязэ форца активэ  $\bar{F}$  ши реакциуня легэтурий  $\bar{R}_n$ , ну рэ-  
мыне ын екилибру, чи капэтэ о оарекаре акчелерацие ши, прин  
урмаре, се депласязэ пе супрафацэ ку ун оарекаре вектор  
реал  $d\bar{r}$ . Дакэ, ынсэ, пунктул обцине акчелерацие, ачаста ын-  
сямнэ, кэ резултанта  $\bar{F}^*$  а форцелор  $\bar{F}$  ши  $\bar{R}_n$  есте диферитэ де  
зеро. Пынэ ла акциуня ачестей форце витеза пунктулуй а фост  
нулэ, прин урмаре, сенсул ачестей депласэрь реале  $d\bar{r}$  коинчиде  
ку сенсул форцей  $\bar{F}^*$ , резултанта форцелор  $\bar{F}$  ши  $\bar{R}_n$ . Резултэ,  
кэ лукрул механик ал ачестей резултанте пе депласаря реал-  
лэ  $d\bar{r}$  есте о мэриме позитивэ, адикэ  $\bar{F}^* d\bar{r} > 0$  сау

$$(\bar{F} + \bar{R}_n) d\bar{r} > 0, \quad (35)$$

деоарече

$$\bar{F}^* = \bar{R}_n + \bar{F}.$$

Легатура, импусэ пунктулуй, ну депинде де тимп. Прин ур-маре, депласаря реалэ  $\bar{d}r$  коинчиде ку, о депласаре виртуалэ оарекаре  $\delta r$  дин пунктул  $B$ , адикэ екзистэ о депласаре оаре-каре  $\delta r$ , егалэ ку  $\bar{d}r$ . Дупэ формула (35)

$$\bar{F}\delta r + \bar{R}_n\delta r > 0. \quad (36)$$

Деоарече легатура есте идеалэ,  $\bar{R}_n\delta r = 0$ , прин урмаре рела-ция (36) капэтэ форма

$$\bar{F}\delta r > 0, \quad (37)$$

адикэ екзистэ о асфел де депласаре виртуалэ  $\delta r$ , не каре лук-рул механик ал форцей активе  $\bar{F}$  ну есте егал ку zero, чи е май маре декыт zero.

Асфел ам ажунс ла контрадикция. Прин урмаре, екуация  $\bar{F}\delta r = 0$  не орьче депласаре виртуалэ есте кондиция суфициентэ а екилибрулуй пунктулуй материал ын позиция  $B$ , дин каре се детерминэ тоате депласэриле  $\delta r$ . Реакциуня легатурий екилибрия-зэ форца активэ, апликатэ ын пунктул дат\*.

#### Казул легатурий реономе

Дакэ ун пункт материал есте сулус уней легатурь, екуация кэрея концине тимпул  $t$  ачаста ынсямнэ, кэ пунктул есте силит сэ рэмынэ не о супрафацэ, каре се мишкэ сау каре се дефор-мязэ. Депласэриле виртуале сынт, ынсэ, депласэрь ын лунгул супрафеей ын моментул дат. Прин урмаре, принципиул депла-сэрилор виртуале поате фи апликат нумай ла детерминаря по-зицией де екилибру релатив а пунктулуй фацэ де позиция су-прафеей ын моментул дат.

Детерминаря позицией де екилибру абсолут есте посибилэ нумай не база методелор динамичий пунктулуй материал ши а системелор де пункте.

#### Принципиул депласэрилор виртуале пентру системул де пункте материалэ

Метода демонстрэрий принципиулуй депласэрилор виртуале пентру ун сингур пункт материал поате фи апликатэ ши ын ка-зул уной систем де пункте материалэ.

О партикуларитате принципалэ ши ун авантаж ал прин-ципиулуй депласэрилор виртуале есте фаптул, кэ ел експримэ

---

\* Де фапт, аич с'а демонстрат нумай, кэ акцелерация инстантанеэ а пунктулуй есте нулэ. Пентру а кларифика кондицииле де екилибру ынтр'ун интервал финит де тимп, требуе сэ черчетэм суплиментар карактерул фор-целор [19].

кондицииле нечесарэ ши суфициентэ де екилибру. Еле пот фи апликате ну нумай пентру ун рижид чи ши пентру орьче систем, инжлусив системеле деформабиле — ликвиделе, корпуриле еластиче, системеле де корпусь солиде артикулате ши алтеле.

Принципиул депласэрилор виртуале поате фи апликат ши ын казал легэтурилор неидеале, нумай кэ ын ачест каз ын кондицииле де екилибру фигурязэ ши реакциуниле легэтурилор. Дакэ легэтуриле сынт идеале, ын кондицииле де екилибру ши ын екуацииле, обцинуте дин ачесте кондиций, фигурязэ, нумай форцеле активе; аша кэ позиция де екилибру поате фи стабилитэ фэрэ а детермина реакциуниле легэтурилор.

Ачеста есте унул дин авантаже ле принципиулуй депласэрилор виртуале фацэ де методеле статичий жеометриче.

Пентру а детермина реакциуниле некуноскуте але легэтурилор пе база принципиулуй депласэрилор виртуале требуе сэ апликэм, ын примул рынд, аксиома легэтурилор. Ачаста ынсямнэ, кэ, апликынд реакциуниле легэтурилор, системул механик поате фи консидерат формал ун систем механик либер. Дупэ ачея системулуй и се комуникэ астфел де депласэрэ виртуале, ынкыт ын сума лукрурилор механиче елементаре сэ фигурезе ши компонентеле реакциунилор. Дин екуацииле, компусе ын ачест фел, се детерминэ токмай реакциуниле легэтурилор.

#### Кондицииле де екилибру, експримате прин форцеле женерализате

Сэ консидерэм ун систем дин  $N$  пункте материале ку легэтурь олономе, нумэрул граделор де либертате ал кэруя есте  $n$ . Прин урмаре, конфигурация жеометрике а ачестуй систем есте детерминатэ де  $n$  координате женерализате  $q_i$ . Легэтуриле неономе липсеск, деачея вариацииле координателор женерализате  $\delta q_i$  сынт индепенденте ынтре еле. Сэ компунем екуация, каре експримэ кондиция де екилибру а системулуй суб форма принципиулуй депласэрилор виртуале:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \delta \bar{r}_k = 0. \quad (38)$$

Пе база формулелор (19), (24) кондиция де екилибру (38) поате фи пусэ суб форма

$$\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0, \quad (39)$$

унде  $Q_i$  сынт форцеле женерализате.

Десфэшурынд сума ын партя стынгэ, обцинем

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = 0. \quad (40)$$

Деоарече системул механик есте олоном ши тоате вариацииле координателор жєнерализате  $\delta q_1$  сынт индєпенденте, факторий  $\delta q_1$  пот фи консидераць дупэ вое; ын партикулар, путем сэ не ынкипуим асфел де депласэрь виртуале але системулуй, кынд вариэзэ о сингурэ координатэ жєнерализатэ ын експрессиеле пентру депласэриле виртуале але пунктелор системулуй  $\delta \vec{r}_k$ . Сэ консидерэм, де екземплу, депласаря виртуалэ, каре кореспунде урмэтоарелор вариаций але координателор жєнерализате:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = 0, \quad \delta q_3 = 0, \quad \dots, \quad \delta q_n = 0. \quad (41)$$

Ын конформитате ку принципул депласэрилор виртуале сума лужрурилор механиче елементаре але тутурор форцелор пє орьче депласаре виртуалэ а системулуй есте нулэ, адикэ екуация (40) аре лок ши ын казул депласэрий виртуале (41). Субституинд (41) ын екуация (40) кондиция де екилибру, експрима тэ прин координателе жєнерализате, капэтэ форма урмэтоаре

$$Q_1 \delta q_1 = 0. \quad (42)$$

Дар  $\delta q_1 \neq 0$ , прин урмаре

$$Q_1 = 0. \quad (a)$$

Сэ консидерэм акум депласаря виртуалэ, кондиционатэ де вариацииле урмэтоаре але координателор:

$$\delta q_1 = 0, \quad \delta q_2 \neq 0, \quad \delta q_3 = 0, \quad \dots, \quad \delta q_n = 0.$$

Ын ачест каз екуация (40) капэтэ форма

$$Q_2 \delta q_2 = 0. \quad (43)$$

Де унде резултэ кондиция

$$Q_2 = 0. \quad (б)$$

Континуунд рационаментеле ын мод аналог пынэ ла ултима комбинация а вариацилор координателор жєнерализате ( $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_{n-1} = 0, \delta q_n \neq 0$ ), обцинем

$$Q_n \delta q_n = 0 \text{ ши } Q_n = 0.$$

Прин урмаре, ам дедус урмэтоареле кондиций де екилибру але системулуй олоном, експримате прин форцеле жєнерализате

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = 0, \dots, \quad Q_n = 0. \quad (в)$$

Пентру ка системул олоном ку  $n$  граде де либертате сэ се афле ын екилибру ынтр'о позиция оарекаре а са, детерминатэ де валориле  $q_1, q_2, \dots, q_n$  але координателор жєнерализате, есте нечесар ши суфичиент, ка валориле тутурор форцелор жєнерализате, каре кореспунд ачестор валорь але координателор жєнерализате, сэ фие нуле.

Форцелe жeнepализатe  $Q_i$  пот фи калкулате дупe формула (25), експримынду-ле ын форма аналитикe, адикe експримынд тоате продуселе скаларе  $\bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$  прин проекцииле векторилор:

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \quad (7)$$

Форцелe жeнepализатe пот фи калкулате де асеменя, алкe-туинд немижлочит сума лукрурилор механиче елементарe ле депласаря виртуалe респективe, кынд вариацииле тутурор координателор жeнepализатe сынт нуле ын афарe де уна  $\delta q_i \neq 0$ .

Дакe тоате форцелe активе (ын казул легeтурилор идеале) пот фи карактеризатe прин функция де форцe  $U = U(x_k, y_k, z_k)$ , сау ын координателе жeнepализатe  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , атунч, дупe кум с'а демонстрат май сус, пентру форцелe жeнepализатe авем

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Прин урмаре, кондицииле де екилибру але системулуй капeтe форма

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q_1} \right)_* = 0, \left( \frac{\partial U}{\partial q_2} \right)_* = 0, \dots, \left( \frac{\partial U}{\partial q_n} \right)_* = 0,$$

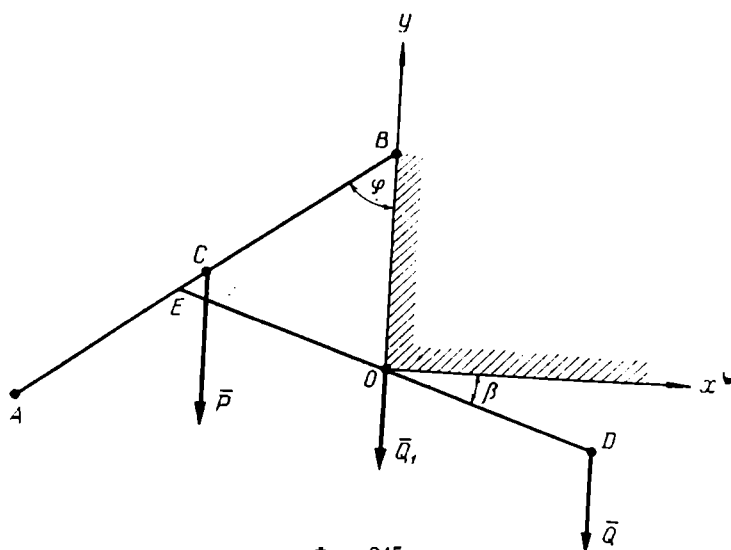
унде индичий \* аратe, кe валориле деривателор парциале се яу нумай пентру ачеле валорь  $q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*$ ,  $\delta$  але координателор жeнepализатe, каре кореспунд позицией пресупусе а стeрий де екилибру а системулуй. Деоарече енержия потенциалe а системулуй  $\Pi$  се деосебеште де функция де форцe  $U$  нумай прин семн  $\Pi = -U$ , кондицииле де екилибру капeтe форма урмeтоаре:

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \right)_* = 0, \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \right)_* = 0, \dots, \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} \right)_* = 0.$$

Прин урмаре, позицииле де екилибру але системулуй олоном пот фи нумай пентру ачеле валорь але координателор жeнepализатe  $q_1^*, q_2^*, q_3^*, \dots, q_n^*$ , пентру каре атыт функция де форцe  $U$ , кыт ши енержия потенциалe  $\Pi$  ау валорь стационаре, ын партикулар, валорь екстреме — максимум сау минимум. Дакe  $U$  аре валoare максимe, атунч  $\Pi$  аре валoare минимe, ши инверс.

*Екземплул 1.* Де вержяуа  $AB$  (фиг. 245) кy греутатя  $P$  кг, унитe прин артикулатиe ын пунктул  $B$ , се ряземe вержяуа  $ED$  де греутатe  $Q_1$  кг, ку о артикулатиe ын пунктул  $O$ . Сe се детермине унгул  $\varphi$ , пентру каре ачест систем се афлe ын екилибру, дакe ла капeтул вержелей  $D$  есте апликатe форца  $Q$ .

Лунжимиле ачестор вержеле сынт ачеляшь ши егале ку  $2l$ , яр пунктул де суспенсие  $B$  ал вержелей  $AB$  се афлэ ла дистанца  $l$  де ла орижиня координателор  $O$ . Се пресупуне, кэ тоате легэтуриле сынт идеале, адикэ вержелеле, че се атинг ын пунктул  $E$ , сынт нетеде; артикулацииле ын пунктеле  $B$  ши  $O$  сынт де асеменя нетеде; моментеле форцелор де фрекаре ын ачесте артикулаций сынт нуле. Пунктеле  $B$  ши  $O$  се афлэ пе ачеш вертикалэ.



Фиг. 245.

Резолваре. Конформ принципулуй депласэрилор виртуале системул ку легэтурь идеале се афлэ ын екилибру, дакэ

$$\sum_{k=1}^3 \delta A_k = 0 \quad \text{сау} \quad \bar{P} \delta \bar{r}_C + \bar{Q}_1 \delta \bar{r}_O + \bar{Q} \delta \bar{r}_D = 0.$$

Сэ нотэм проекцииле форцелор

$$\bar{P}(0; -P), \bar{Q}(0; -Q), \bar{Q}_1(0; -Q_1).$$

Де асеменя:

$$\delta \bar{r}_C(\delta x_C, \delta y_C); \delta \bar{r}_D(\delta x_D, \delta y_D); \delta \bar{r}_O(0; 0).$$

Ын ачест каз

$$-P \delta y_C - Q \delta y_D = 0.$$

Сэ калкулэм  $\delta y_C$  ши  $\delta y_D$ :

$$y_C = l - l \cos \varphi; \quad y_D = -l \sin \beta.$$

Ын урма деривэрий обцинем

$$\delta y_C = l \sin \varphi \delta \varphi; \delta y_D = -l \cos \beta \delta \beta.$$

Апой

$$\beta = 2\varphi - 90^\circ \text{ ши } \cos \beta = \sin 2\varphi, \delta \beta = 2\delta \varphi.$$

Експресия лукрулуй механик элементар капэтэ форма

$$-Pl \sin \varphi \delta \varphi + Ql \sin 2\varphi \cdot 2\delta \varphi = 0$$

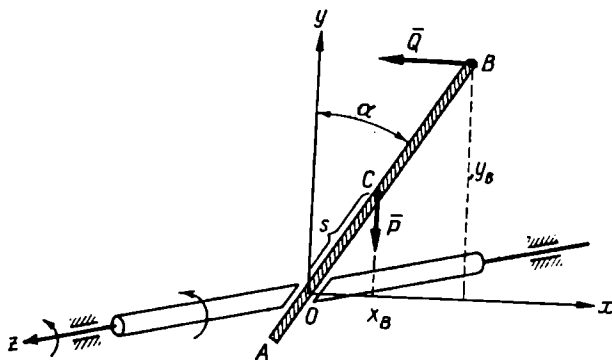
сау

$$-P \sin \varphi + 4Q \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

де унде

$$\cos \varphi = \frac{P}{4Q}.$$

Прин урмаре, системул поате сэ се афле ын екилибру нумай атулч, кынд  $P < 4Q$ .



Фиг. 246.

**Екземплул 2.** Ун чилиндру оможен поате сэ се ротясэ фэрэ фрекаре ын журул аксей сале жеометриче оризонтале. Ын чилиндру есте офределит ун канал де диаметру мик, каре интерсектязэ акса чилиндрулуй ын пунктул  $O$  ши-й перпендикулар пе ачастэ аксэ (фиг. 246). Ын канал есте ынтродусэ вержяуа  $AB$ , каре поате сэ лунече ынтр'ынсул фэрэ фрекаре. Ла капэтул  $B$  ал вержелей есте апликатэ форца оризонталэ  $Q$ , ситуатэ ын планул перпендикулар пе акса чилиндрулуй. Греутатя вержелей есте  $P$ , яр лунжимя ей  $AB = 2l$ . Сэ се детермине унгул  $\alpha$  динтре вержя ши вертикалэ ын позиция де екилибру, ши дистанца  $s$  де ла акса чилиндрулуй пынэ ла чентрул де греутате  $C$  ал вержелей, неглижынд дименсиуниле трансверсале але ей.

**Резолваре.** Сэ луэм системул де координате ку орижина ын пунктул  $O$  де пе акса чилиндрулуй, ын лунгул кэрея ындрептэм акса де координате  $z$ . Акселе  $x$  ши  $y$  ле луэм ын планул перпендикулар пе акса чилиндрулуй, ануме акса  $x$  — оризонта-



лэ, яр акса  $y$  — вертикалэ. Системул консидерат аре доуэ граде де либертате. Ын калитате де координате жєнерализате луэм унгул  $\alpha$  ши дистанца  $s$ . Унгул  $\alpha$  се мэсоарэ де ла акса  $y$  ын сенсул мишкэрий акулуй де часорник, яр дистанца  $s$  — де ла орижина координателор спре капэтул  $B$  ал вержелей. Легэту-риле, импусе системулуй, сынт идеале. Лукрул механик поате фи ефектуат нумай де форцеле  $\bar{P}$  ши  $\bar{Q}$ .

Ын конформитате ку принципул депласэрилор виртуале авем

$$\sum \delta A_k = 0$$

сау ын казул де фацэ

$$Q_x \delta x_B + P_y \delta y_C = 0,$$

унде  $C$  есте центрул де греутате ал вержелей.

Дин фигура 246 авем

$$x_B = (l+s) \sin \alpha; \quad Q_x = -Q,$$

$$y_C = s \cos \alpha, \quad P_y = -P.$$

Вариацииле координателор сынт

$$\delta x'_B = (l+s) \cos \alpha \delta \alpha + \sin \alpha \delta s;$$

$$\delta y_C = \cos \alpha \delta s - s \sin \alpha \delta \alpha.$$

Пентру сума лукрурилор механике елементаре авем

$$-Q[(l+s) \cos \alpha \delta \alpha + \sin \alpha \delta s] -$$

$$-P(\cos \alpha \delta s - s \sin \alpha \delta \alpha) = 0.$$

Вариацииле  $\delta \alpha$  ши  $\delta s$  сынт индепенденте.

Егалынд коефициенций ачестор вариаций (адикэ форцеле жєнерализате  $Q_1$  ши  $Q_2$ , каре кореспунд координателор  $\alpha$  ши  $s$ ) ку zero, обцинем екуацииле:

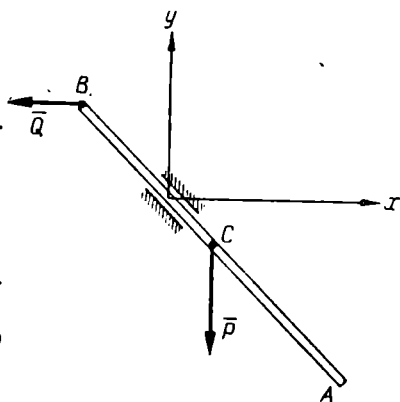
$$-Q(l+s) \cos \alpha + Ps \sin \alpha = 0; \quad -Q \sin \alpha - P \cos \alpha = 0.$$

Дин ачесте екуаций

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{P}{Q} \quad \text{ши} \quad s = -\frac{Q^2 l}{Q^2 + P^2}.$$

Семнеле минус аратэ, кэ ын позиция де екилибру унгул  $\alpha$  се мэсоарэ де ла акса  $y$  ын сенс контрар мишкэрий ачелор де часорник, яр дистанца  $s$  — де ла орижина координателор спре пунктул  $A$ .

Позиция де екилибру есте репрезентатэ ын фиг. 247.



Фиг. 247.

### § 3. ПРИНЦИПИУЛ ЛУЙ ДАЛАМБЕР

#### Принципиул луй Даламбер ын казул пунктулуй материал

Екуация динамикэ а мишкэрий пунктулуй материал ку маса  $m$  ынтр'ун оарекаре систем де реферинцэ инерциал есте

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}, \quad (1)$$

унде  $\bar{F}$  есте резултанта форцелор активе,  $\bar{R}$  — реакциуня легэ-турилор ши  $\bar{a}$  — акчелерация пунктулуй.

Екуация (1) поате фи презентатэ ын фелул урмэтор

$$-m\bar{a} + \bar{F} + \bar{R} = 0. \quad (1')$$

Ын партя стынгэ а екуацией (1') се концине сума унор векторь жаре ау дименсиуня форцей. Есте комод сэ консидерэм векторул  $(-m\bar{a})$  дрепт о форцэ фиктивэ. Ачастэ форцэ есте нумитэ *форцэ де инерцие* а пунктулуй ын системул де реферинцэ консидерат.

Прин урмаре, *се нумеште форцэ де инерцие а пунктулуй векторул, ындрептат ын сенс опус акчелерацией пунктулуй ши егал дупэ модул ку продусул масей пунктулуй прин модулул акчелерацией луй*. Нотынд форца де инерцие ку  $\bar{\Phi}$ , обцинем

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (2)$$

Атунч екуация мишкэрий (1') капэтэ форма

$$\bar{\Phi} + \bar{F} + \bar{R} = 0. \quad (3)$$

Екуация (3) експримэ принципиул луй Даламбер. Ачест принципу поате фи формулат ын фелул урмэтор: *ла мишкарэ пунктулуй материал форцеле, апликате немижлочит ын ачест пункт, ши форца де инерцие а пунктулуй формязэ ун систем де форце, еквивалент ку зеро, адикэ, жаре се афлэ ын екилибру*.

Пунктул материал се мишкэ ку акчелерация  $\bar{a}$ , деоарече асупра луй акционязэ дин партя алтор корпурь форца  $(\bar{F} + \bar{R})$ . Ын конформитате ку лежя егалитэций акциуний ши реакциуний пунктул материал акционязэ ла рындул сэу асупра ачестор корпурь ку форца  $-(\bar{F} + \bar{R})$  жаре, дупэ кум реесе дин (3), есте егалэ ку форца де инерцие  $\bar{\Phi}$ .

Прин урмаре, форца де инерцие  $\bar{\Phi}$  есте егалэ ку сума векториалэ а форцелор де акциуне дин партя пунктулуй материал асупра корпурилор, жаре-й комуникэ ачестуй пункт мишкарэ ку акчелерация датэ  $\bar{a}$ .

Акчелерация тоталэ а пунктулуй  $\bar{a}$  поате фи дескомпусэ ын акчелерацииле танженциалэ ши нормалэ  $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$ , прин урмаре,

форца де инерции  $\bar{\Phi}$  поате фи презентатэ ын конформитате ку  
(2) суб форма сумей жеометриче а дой векторы:

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n, \quad (4)$$

унде  $\bar{\Phi}_\tau$  есте форца де инерции танженциалэ, каре се експримэ  
прин акчелерация танженциалэ,

$$\bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau. \quad (5)$$

Аич  $\bar{\Phi}_n$  есте форца нормалэ, сау центрифугэ де инерции

$$\bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n.$$

### Принципиул луй Даламбер ын казул системулуй де пункте materiale

Сэ консидерэм ун систем дин  $N$  пункте materiale, супус унор  
легэтурь. Асупра фиксэруй пункт ал системулуй пот акциона  
форцеле активе, атыт челе интериоаре, кыт ши челе екстериоа-  
ре, ши реакциуниле легэтурилор де асемения екстериоаре ши  
интериоаре.

Сэ апликэм принципиул луй Даламбер ла фиксаре пункт ал  
системулуй:

$$\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k + \bar{R}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (7)$$

унде  $\bar{\Phi}_k$  сынт форцеле де инерции але пунктелор системулуй.  
Екуацииле (7) експримэ токмай принципиул луй Даламбер ын  
казул унуй систем де пункте materiale: *ла ун систем материал  
оарекаре мобил системул де форце, конституит дин форцеле,  
апликате немижлочит ын пунктеле системулуй, реакциуниле ле-  
гэтурилор ши форцеле де инерции, сатисфаче кондицииле де  
екилибру, адикэ есте ун систем де форце, векторул принципал  
ши моментул принципал але кэруя ын рапорт ку орьче центру  
сынт егаль ку zero.*

Дин принципиул луй Даламбер ын казул системулуй пот фи  
обцинуте консечинце импортанте суб формэ де шасе кондиций  
де екилибру але форцелор, каре акционязэ асупра системулуй,  
инклузынд ын ачесте форце ши форцеле де инерции але пунк-  
телор системулуй. Ачесте шасе кондиций де екилибру формал  
сынт аналожиче ку кондицииле де екилибру дин статикэ ын ка-  
зул форцелор, каре акционязэ асупра рижидулуй. Ынтр'адевэр  
ынсумынд пэрциле стынжь але екуацией (7) пентру тоате пунк-  
теле системулуй, авем

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{\Phi}_k + \sum \bar{R}_k = 0. \quad (8)$$

Ынмулцинд фиксаре дин релацииле (7) дин стынга ку раза

вектоаре  $\bar{r}_k$ , апой ынсумынд челе обдинуте пентру тоате пунк-  
теле системулуй, авем

$$\sum (\bar{r}_k \times \bar{F}) + \sum (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) + \sum (\bar{r}_k \times \bar{R}_k) = 0$$

сау

$$\sum \bar{M}_0(\bar{F}_k) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) + \sum \bar{M}_0(\bar{R}_k) = 0.$$

Дакэ проектэм (8) ши (9) пе акселе де координате, атунч обцинем челе шасе кондиций де екилибру але системулуй де форце:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} + \sum \Phi_{kx} + \sum R_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} + \sum \Phi_{ky} + \sum R_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kz} + \sum \Phi_{kz} + \sum R_{kz} &= 0, \\ \sum M_x(\bar{F}_k) + \sum M_x(\bar{\Phi}_k) + \sum M_x(\bar{R}_k) &= 0, \\ \sum M_y(\bar{F}_k) + \sum M_y(\bar{\Phi}_k) + \sum M_y(\bar{R}_k) &= 0, \\ \sum M_z(\bar{F}_k) + \sum M_z(\bar{\Phi}_k) + \sum M_z(\bar{R}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Сэ презентэм акум форца резултантэ, апликатэ ын фиенкаре пункт ал системулуй, ка фиинд алкэтуитэ дин форца екстериоарэ ши дин форца интериоарэ, адикэ

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}.$$

Дин (7) ын мод аналог ку (8) ши (9) пот фи обдинуте ур-мэтореле кондиций але екилибрулуй форцелор екстериоаре ши форцелор де инерције:

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{\Phi}_k &= 0, \\ \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) &= 0, \end{aligned}$$

деоарече конформ проприетэцилор форцелор интериоаре але системулуй, авем

$$\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0, \quad \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k^{(i)}) = 0.$$

Проектынд (11) пе акселе де координате, обцинем шасе кондиций де екилибру, асемэнэтоаре кондициилор (10).

О партикуларитате а кондициилор де екилибру суб форма (11) есте липса ынтр'ынселе а форцелор интериоаре, чея че фаче ка ачесте кондиций сэ фие май комодэ ла резолваря мултор проблеме але динамичий системулуй. Де факт екуацииле (7) ши консечинцеле лор сынт ю формэ деосебитэ а екуациилор динамиче але мишкэрий системулуй. Методеле резолвэрий проблемелор динамиче, базате пе апликаря форцелор де инерције, сынт нумите методе чинетостатиче.

### Проприетэциле форцелор де инерцие

Сэ консидерэм тоталитатя форцелор де инерцие але системулуй де пункте materiale:

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Сэ обдинем експресия векторулуй принципал ал системулуй де форце де инерцие  $\bar{\Phi}^* = \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k$ . Ынлокуинд акцелерация  $\bar{a}_k$  а фиксирэулуй пункт прин  $\ddot{\bar{r}}_k$ , обдинем

$$\bar{\Phi}^* = - \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\bar{r}}_k = - \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = - \sum_{k=1}^N \frac{d^2}{dt^2} (m_k \bar{r}_k) = - \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k.$$

Фолосинд експресия разей вектоаре  $\bar{r}_C$  а чентрулуй маселор системулуй

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k}{M},$$

де унде

$$\sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C,$$

ши, субституинд ултима релацие ын експресия пентру  $\bar{\Phi}^*$ , обдинем

$$\bar{\Phi}^* = -M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = -M \bar{a}_C.$$

Векторул  $(-M \bar{a}_C)$  поате фи нумит форцэ де инерцие а пунктулуй материал конвенционал, каре коинчиде ку чентрул маселор системулуй дат де пункте materiale ши каре аре маса егалэ ку маса  $M$  а ынтрегулуй систем. Нотынд форца де инерцие а чентрулуй маселор ку  $\bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C$ , путем консидера, кэ *векторул принципал ал форцелор де инерцие а системулуй механик есте егал ку форца де инерцие а чентрулуй маселор системулуй*

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi}_C = -M \bar{a}_C.$$

Акум сэ дедучем експресия моментулуй принципал ал системулуй де форце де инерцие ын рапорт ку ун пункт оарекаре  $O$  ал спациулуй.

Авем

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}.$$

Моментул принципал ал тутурор форцелор  $\overline{\Phi}_k$  ын рапорт ку пунктул  $O$  есте

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^N \overline{M}_O(\overline{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^N (\overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k) = - \sum_{k=1}^N (\overline{r}_k \times m_k \ddot{\overline{r}}_k). \quad (a)$$

Дупэ кум ам възут май сус, ла дедучеря теоремей деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй де пункте материала, ынмулцинд векториал амбеле пэрць але екуацией де базэ а динамичий пентру фиекаре пункт  $m_k \ddot{\overline{r}}_k = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}$  (реакциуниле легэтурилор сынт инклузе ын ачесте форце) ку раза вектоаре  $\overline{r}_k$  а пунктулуй ши ынсумынд резултателе ынмулцирий, обцинем екуация

$$\sum_{k=1}^N (\overline{r}_k \times m_k \ddot{\overline{r}}_k) = \sum_{k=1}^N (\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)}). \quad (б)$$

Трансформынд фиекаре продус векториал  $\overline{r}_k \times m_k \ddot{\overline{r}}_k$ , путем обцине теорема деспре вариация моментулуй чинетик, каре се экспримэ прин релация

$$\frac{d \overline{K}_O}{dt} = \overline{L}_O^{(e)}. \quad (в)$$

Аич  $\overline{K}_O = \sum_{k=1}^N \overline{M}_O(m_k \overline{v}_k)$  есте моментул чинетик ал системулуй ын рапорт ку пунктул  $O$ ; векторул  $\overline{L}_O^{(e)}$  есте моментул принципал ал форцелор екстериоре ын рапорт ку ачелаш пункт.

Компарынд експресииле (а), (б) ши (в) обсервэм, кэ моментул принципал  $\overline{L}_O^*$  ал форцелор де инерцие ын рапорт ку ун пункт оарекаре  $O$  есте егал ку векторул, каре экспримэ дери-вата ын рапорт ку тимпул а моментулуй чинетик ал системулуй материал ын рапорт ку ачелаш центру, луат ку семнул опус:

$$\overline{L}_O^* = - \frac{d \overline{K}_O}{dt}; \quad (г)$$

$$L_z^* = - \frac{d K_z}{dt}, \quad (г')$$

унде

$$L_z^* = \sum_{k=1}^N M_z(\overline{\Phi}_k)$$

есте проекция моментулуй принципал ал форцелор де инерцие пе акса  $Oz$ ; експресий аналожиче авем ши пентру алте аксе.

Ын партикулар, дакэ акса  $Oz$  есте акса де ротацие а рижн-

дулуй, атунч, дупэ кум се штие,  $K_z = J_z \omega$ . Субституинд ачастэ валoare пентру  $K_z$  ын ( $\dot{\gamma}$ ), обцинем

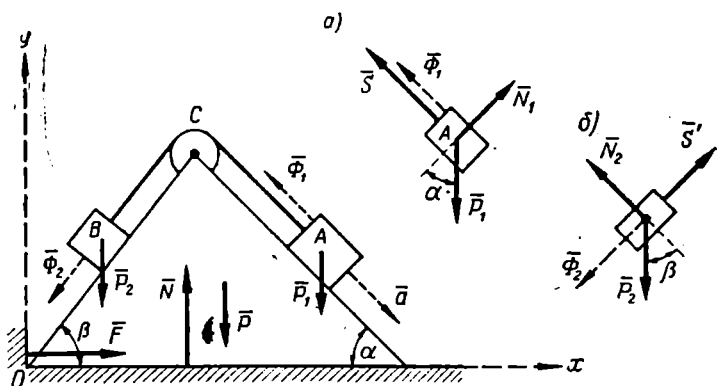
$$\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) = - \frac{dK_z}{dt} = - J_z \frac{d\omega}{dt} = - J_z \varepsilon$$

сау

$$\sum_{k=1}^N M_z(\bar{\Phi}_k) = - J_z \cdot \varepsilon.$$

Ачест момент есте креат де форцеле танженциале де инерции, деoарече форцеле нормале де инерции але фиекэруй пункт ынтретате акса де ротации.

**Екземплул 1.** Корпул  $A$  ку преутатя  $P_1$ , коборынд ын жос пе фаца призмей ку преутатя  $P$ , пуне ын мишкаре корпул  $B$  ку преутатя  $P_2$  прин интермедиул унуй фир, трекут песте скрипете импондерабил  $C$ . Консидерынд, кэ подяуа, фецеле призмей ши але преутэцилор сынт нетеде, сэ се детермине пресиуня призмей асупра поделей ши а сприжинулуй, каре ымпедикэ мишкаря призмей, прекум ши теноиуня фирулуй. Унгюриле де ынклинаре але фецелор латерале але призмей сынт  $\alpha$  ши  $\beta$  (фиг. 248).



Фиг. 248.

**Резолваре.** Сэ апликэм ла системул, компус дин призмэ, корпуры, фир ши скрипете, принципиул луй Даламбер, алкэтуинд кондициите де екилибру але форцелор екстериоаре ши але форцелор де инерции пентру ачест систем механик. Пресупунынд, кэ акцелерация корпулуй  $A$  есте ындрептатэ ын жос ши

есте егалэ ку  $a$ , путем скрие пентру форцеле де инерции але корпусилор  $A$  ши  $B$  кореспунзэтор

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} a; \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g} a.$$

Сенсуриле форцелор  $\bar{\Phi}_1$  ши  $\bar{\Phi}_2$  сынт индикате ын фигура 248. Алкэтуинд кондицииле де екилибру але форцелор екстериоаре  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}, \bar{N}, \bar{F}$  ши але форцелор де инерции  $\bar{\Phi}_1$  ши  $\bar{\Phi}_2$  ын проекций пе акселе де координате  $Ox$  ши  $Oy$ , обцинем:  
пентру акса  $Ox$

$$F - \frac{P_1}{g} a \cos \alpha - \frac{P_2}{g} a \cos \beta = 0;$$

пентру акса  $Oy$

$$N - P_1 - P_2 - P + \frac{P_1}{g} a \sin \alpha - \frac{P_2}{g} a \sin \beta = 0.$$

Де унде

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{a}{g} (P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta), \\ N &= P_1 + P_2 + P - \frac{a}{g} (P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Пентру а детермина тенсиуня  $S$  а фирулуй ши акчелерация греутэцилор  $a$ , апликэм принчипиул луй Даламбер ла фиекаре корп ын парте (фиг. 248,  $a, б$ ). Ын ачест скоп алкэтуим кондицииле де екилибру але форцелор пентру фиекаре корп, инклузив ши але форцелор де инерции ын проекций пе дирекция фирулуй. Обцинем:

$$\left. \begin{aligned} \text{пентру корпусул } A \quad S + \frac{P_1}{g} a - P_1 \sin \alpha &= 0; \\ \text{пентру корпусул } B \quad S - \frac{P_2}{g} a - P_2 \sin \beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

деоарече ын казул скрипетелуй импондерабил  $S' = S$ .

Дин (б), дупэ ексклюдеря луй  $S$  ши детерминаря луй  $a$ , авем

$$a = g \frac{P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta}{P_1 + P_2}. \quad (в)$$

Есте евидент, кэ греутатя  $A$  се ва мишка ын жос, дакэ аре лок кондиция

$$P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta > 0.$$



Субституиנד валораь обцинутэ а акчелерацией  $a$  ын (а), обцинем

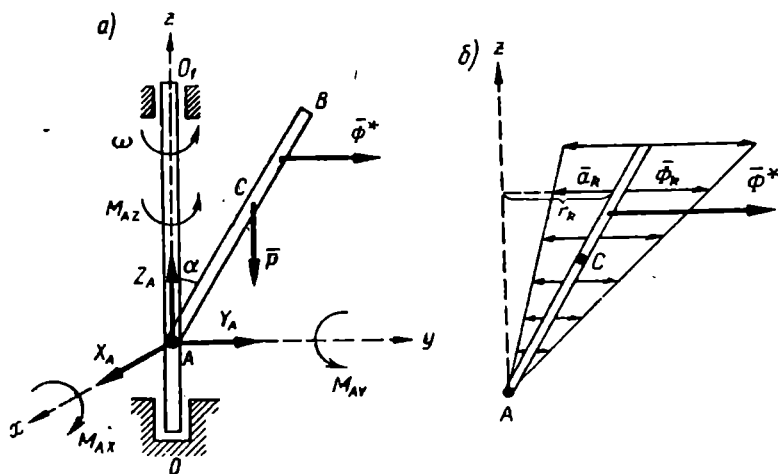
$$F = \frac{(P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta)(P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta)}{P_1 + P_2},$$

$$N = P_1 + P_2 + P - \frac{(P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta)^2}{P_1 + P_2}.$$

Пресиуня призмей  $\bar{F}'$  асупра спржинулуй есте  $\bar{F}' = -\bar{F}$ . Де асеменя, пресиуня призмей  $\bar{N}'$  асупра поделей  $\bar{N}' = -\bar{N}$ .

Пентру а детермина тенсиуня фирулуй  $S$  требуе сэ субституим валораь акчелерацией  $a$  ын уна дин екуацииле (б). Обцинем

$$S = P_2 \sin \beta + \frac{P_2}{g} a = \frac{P_1 P_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{P_1 + P_2}.$$



Фиг. 249.

**Екземплул 2.** О вержэ субцире оможенэ  $AB$  ку греутатя  $P$  ши лунжия  $l$  есте унитэ рижид ку аксул вертикал  $OO_1$  суб унгул  $\alpha$ . Аксул  $OO_1$  се ротеште ымпреунэ ку вержэуа  $AB$  ку витеза унгуларэ  $\omega$ . Сэ се детермине реакциуниле ын пунктул  $A$  ал унирий вержелей ку аксул (фиг. 249).

**Резолваре.** Сэ апликэм принципул луй Даламбер суб форма а шае кондиций де екилибру ла системул де форце екстериоре ши форце де инерции, каре акционязэ асупра вержелей  $AB$ . Дескомпунем мэримиле некуноскуте, реакциуня  $\bar{R}_A$  ши векторул момент  $\bar{M}_A$  ын локул унирий, ын компоненте, ориентате дупэ акселе де координате. Дакэ ымпэрцим тоатэ

вержяуа ын порциунь елементаре де лунжымь егале, акчелерацииле пунктелор де мижлок але ачестор порциунь се репартизязэ ын лунгул вержелей дупэ лежя линиарэ (фиг. 249, б), деоарече акчелерация фиекэруй пункт ал вержелей

$$a_k = r_k \omega^2,$$

унде  $r_k$  есте дистанца динтре пунктул  $k$  ши акса де ротацие.

Прин урмаре, форцеле де инерцие сынт репартизате ын лунгул вержелей дупэ лежя линиарэ а триунгюлуй. Форцеле паралеле, репартизате дупэ лежя линиарэ а триунгюлуй, ау о форце резултантэ, линия де акциуне а кэрея се афлэ ын лунгул вержелей ла дистанца  $\frac{1}{3}l$  де ла база триунгюлуй ши  $\frac{2}{3}l$  де ла вырфул триунгюлуй. Форца резултантэ  $\bar{\Phi}^*$  есте ынтотдяуна егалэ ку векторул принципал  $\bar{\Phi}$  ал форцелор репартизате. Векторул принципал ал форцелор де инерцие есте

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C,$$

унде  $\bar{a}_C$  есте акчелерация чентрулуй маселор вержелей, адикэ а пунктулуй де мижлок ал ей.

Прин урмаре,

$$\Phi^* = \Phi = \frac{P}{g} a_C = \frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Сэ алкэтуим шаге жондиций де екилибру але форцелор, консидерынд, кэ ын моментул дат вержяуа се афлэ ын планул де координате Аyz. Вом авя

$$X_A = 0; Y_A + \Phi^* = 0; Z_A - P = 0;$$

$$M_{Ax} - P \frac{l}{2} \sin \alpha - \Phi^* \frac{2}{3} l \cos \alpha = 0;$$

$$M_{Ay} = 0; M_{Az} = 0.$$

Субституинд ын ачастэ екуацие валора форцей  $\Phi^*$  ши резолвынд екуация фацэ де некуноскуте, обцинем

$$X_A = 0; Y_A = -\frac{P}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha; Z_A = P;$$

$$M_{Ax} = \frac{Pl}{2} \sin \alpha + \frac{P}{g} \frac{1}{6} l^2 \omega^2 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{Pl}{2} \left( \sin \alpha + \frac{l \omega^2}{3g} \sin 2\alpha \right);$$

$$M_{Ay} = 0; M_{Az} = 0.$$

Мэримиле реакциуний ши моментулуй ын локул унтрий се детерминэ дупэ формулеле:

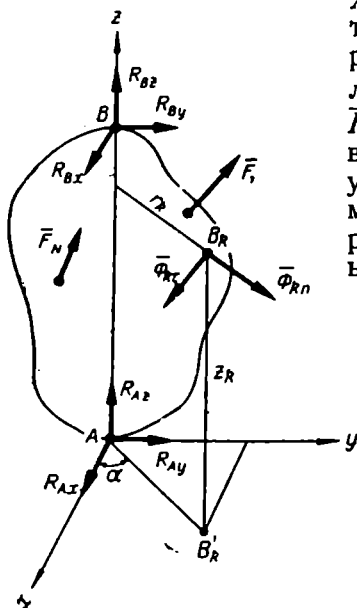
$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = P \sqrt{1 + \frac{l^2 \omega^4}{4g^2} \sin^2 \alpha};$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \frac{Pl}{2} \left( \sin \alpha + \frac{l \omega^2}{3g} \sin 2\alpha \right).$$

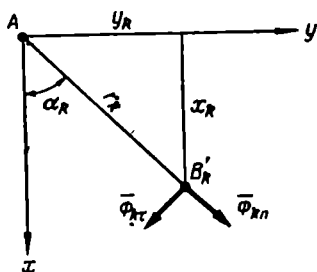
#### § 4. ДЕТЕРМИНАРЯ РЕАКЦИУНИЛОР ДИНАМИЧЕ АЛЕ РУЛМЕНЦИЛОР РИЖИДУЛУЙ КАРЕ СЕ РОТЕШТЕ ЫН ЖУРУЛ УНЕЙ АКСЕ ФИКСЕ

Сэ апликэм принципиул луй Даламбер ла детерминаря реакциунилор рулменцилор рижидулуй, каре се ротеште.

Корпул се ротеште ын журул уней аксе фиксе. Нотэм пунктеле фиксе але корпулуй прин  $A$  ши  $B$ . Ын ачесте пункте сынт ситуаць рулменций, фрекаря ынтр'ынший фиинд неглижабилэ. Дрепт орижине а системулуй де координате хуз луэм пунктул  $A$ . Вом консидера, кэ ачест систем де координате есте легат рижид ку корпул. Асупра корпулуй акциянээ форцеле дате  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N$ . Вом нота ку  $\omega$  ши  $\epsilon$  витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а корпулуй ынтр'ун момент оарекаре. Сэ детерминэм реакциуниле рулменцилор  $A$  ши  $B$  ын ачест момент (фиг. 250).



Фиг. 250.



Фиг. 251.

Ын конформитате ку принципиул луй Даламбер форцеле консидерате, каре акциянээ асупра корпулуй, реакциуниле легэтурилор импуге корпулуй, ши форцеле де инерции але пунктелор корпулуй формээ ун систем де форце, каре се афлэ ын екилибру. Дирекцииле реакциунилор рулменцилор  $A$  ши  $B$  ну

сынт куноските динаинте. Сэ репрезентэм проекцииле лор пе акселе де координате (фиг. 250). Вом нота ачесте проекций респектив прин  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$  ши  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Bz}$ .

Сэ ынтродучем акум форцеле де инерции. Сэ консидерэм ун пункт оарекаре ал корпулуй  $B_k(x_k, y_k, z_k)$ . Вом нота прим  $m_k$  маса ачестуй пункт, яр прин  $r_k$  дистанца ачестуй пункт де ла акса де ротации. Форца танженциалэ де инерции а ачестуй пункт есте  $\Phi_{k\tau} = m_k r_k \epsilon$ , яр форца нормалэ (центрифугэ)  $\Phi_{kn} = m_k r_k \omega^2$ . Ын фигура 250 ачесте форце сынт индикате пресупунынд кэ  $\epsilon > 0$ . Сэ детерминэм проекцииле ачестор форце де инерции пе акселе де координате. Пентру а ынлесни проектаря, май ынтый проектэм пунктул  $B_k$  ши форцеле  $\Phi_{k\tau}$  ши  $\Phi_{kn}$  пе планул  $x_A y$  (фиг. 251).

Дин фигура 251 обцинем урмэтоареле експресиий пентру проекцииле форцелор  $\bar{\Phi}_{k\tau}$  ши  $\bar{\Phi}_{kn}$  пе акселе де координате

$$(\Phi_{k\tau})_x = m_k r_k \epsilon \sin \alpha_k = m_k y_k \epsilon;$$

$$(\Phi_{k\tau})_y = -m_k r_k \epsilon \cos \alpha_k = -m_k x_k \epsilon; \quad (\Phi_{k\tau})_z = 0;$$

$$(\Phi_{kn})_x = m_k r_k \omega^2 \cos \alpha_k = m_k x_k \omega^2; \quad (\Phi_{kn})_y = m_k r_k \omega^2 \sin \alpha_k = m_k y_k \omega^2; \quad (\Phi_{kn})_z = 0.$$

Сэ детерминэм проекцииле векторулуй принципал ал форцелор де инерции але тутурор пунктелор корпулуй пе акселе де координате

$$\begin{aligned} R_x &= \sum (\Phi_{k\tau})_x + \sum (\Phi_{kn})_x = \sum m_k y_k \epsilon + \sum m_k x_k \omega^2 = \\ &= \epsilon \sum m_k y_k + \omega^2 \sum m_k x_k = M y_C \epsilon + M x_C \omega^2, \end{aligned}$$

унде  $M$  есте маса корпулуй;

яр  $x_C$  ши  $y_C$  сынт координателе чентрулуй маселор корпулуй.

Ын мод аналог

$$R_y = -M x_C \epsilon + M y_C \omega^2, \quad R_z = 0. \quad (1)$$

Сэ калкулэм моментеле форцелор  $\bar{\Phi}_{k\tau}$  ши  $\bar{\Phi}_{kn}$  ын рапорт ку акселе де координате

$$M_x(\bar{\Phi}_{k\tau}) = y_k(\Phi_{k\tau})_z - z_k(\Phi_{k\tau})_y = m_k x_k z_k \epsilon;$$

$$M_y(\bar{\Phi}_{k\tau}) = z_k(\Phi_{k\tau})_x - x_k(\Phi_{k\tau})_z = m_k y_k z_k \epsilon;$$

$$M_z(\bar{\Phi}_{k\tau}) = -\Phi_{k\tau} r_k = -m_k r_k^2 \epsilon.$$

Апой

$$M_x(\bar{\Phi}_{kn}) = y_k(\Phi_{kn})_z - z_k(\Phi_{kn})_y = -m_k y_k z_k \omega^2;$$

$$M_y(\bar{\Phi}_{kn}) = z_k(\Phi_{kn})_x - x_k(\Phi_{kn})_z = m_k x_k z_k \omega^2; \quad M_z(\bar{\Phi}_{kn}) = 0.$$

Моментул принципал ал форцелор де инерции але тутурор пунктелор корпулуй ын рапорт ку акса  $x$  есте

$$L_x = \sum M_x(\bar{\Phi}_{kz}) + \sum M_x(\bar{\Phi}_{kn}) = \sum m_k x_k z_k \varepsilon - \sum m_k y_k z_k \omega^2 = \varepsilon \sum m_k x_k z_k - \omega^2 \sum m_k y_k z_k,$$

унде  $\sum m_k x_k z_k = J_{xz}$  есте моментул де инерции центрифугал ал корпулуй ын рапорт ку акселе  $x$  ши  $z$ ;

$\sum m_k y_k z_k = J_{yz}$  — моментул де инерции центрифугал ал корпулуй ын рапорт ку акселе  $y$  ши  $z$ .  
Прин урмаре, авем дефинитив

$$L_x = J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2. \quad (2)$$

Пентру моментеле принципале але форцелор де инерции але корпулуй ын рапорт ку акселе  $y$  ши  $z$  обцинем ын мод аналог

$$\left. \begin{aligned} L_y &= J_{yz} \varepsilon + J_{xz} \omega^2, \\ L_z &= -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -J_z \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Сэ алкэтуим ын кореспундере ку принципиул луй Даламбер шасе екуаций де екилибру (трей екуаций але проекциилор пе акселе де координате ши трей екуаций але моментелор ын рапорт ку акселе де координате) пентру форцеле активе консидерате, реакциуниле легэтурилор ши форцеле де инерции. Сума проекциилор ши сума моментелор форцелор де инерции се детерминэ дупэ формулеле (1), (2) ши (3). Обцинем

$$\left. \begin{aligned} R_{Ax} + R_{Bx} + \sum F_{kx} + M_{y_C} \varepsilon + M_{x_C} \omega^2 &= 0, \\ R_{Ay} + R_{By} + \sum F_{ky} - M_{x_C} \varepsilon + M_{y_C} \omega^2 &= 0, \\ R_{Az} + R_{Bz} + \sum F_{kz} &= 0, \\ -R_{By} h + \sum M_x(\bar{F}_k) + J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 &= 0, \\ R_{Bx} h + \sum M_y(\bar{F}_k) + J_{yz} \varepsilon + J_{xz} \omega^2 &= 0, \\ \sum M_z(\bar{F}_k) - J_z \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Реакциуниле рулменцилор  $A$  ши  $B$  пот фи детерминате дин системул де екуаций (4). Пентру детерминаря а шасе некуноскуте авем нумай чинч екуаций, деоарече ултима екуация ну концине реакциуниле легэтурилор. Ачаста есте екуация дифференциалэ а мишкэрий де ротация а рижидулуй ын журул аксей фиксе. Некуноскутеле  $R_{Az}$  ши  $R_{Bz}$  се концин нумай ын екуация а трея дин системул (4), прин урмаре, пентру детерминаря алтор патру некуноскуте авем патру екуаций. Астфел, некуноскутеле  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  (еле сынт нумите де обцей компоненте трансверсале але реакциунилор артикуляциилор) се детерминэ ын ынтрежме дин системул (4). Компонентеле  $R_{Az}$

ши  $R_{Bz}$  рэмын недетерминате, деоарече ачесте некуноскуте се концин нумай ынтр'о сингурэ екуацие.

Сэ дескомпунем реакциуниле рулменцилор  $A$  ши  $B$  ын реакциунь статиче ши реакциунь динамиче суплиментаре. Прин реакциунь статиче субынцележем реакциуниле, детерминате нумай де форцеле активе консидерате, адикэ пентру  $\omega=0$  ши  $\varepsilon=0$ . Прин реакциунь динамиче суплиментаре субынцележем реакциуниле, детерминате нумай де форцеле де инерции, адикэ ын липса форцелор дате, ынсэ ын презенца мишкэрий де ротации, комуникатэ де ачесте форце.

Пентру реакциуниле статиче але рулментулуй  $B$  дин екуацииле а патра ши а чиня але системулуй (4) авем

$$R'_{Bx} = -\frac{1}{h} \sum M_y(\bar{F}_k), \quad R'_{By} = \frac{1}{h} \sum M_x(\bar{F}_k).$$

Дин ачеляшь екуаций пентру реакциуниле динамиче суплиментаре але рулментулуй  $B$  обцинем

$$R''_{Bx} = -\frac{1}{h} (J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon); \quad R''_{By} = \frac{1}{h} (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2). \quad (5)$$

Модулул реакциуний динамиче суплиментаре а рулментулуй  $B$ , калкулат пе база формулелор (5), есте

$$R''_B = \sqrt{(R''_{Bx})^2 + (R''_{By})^2} = \frac{1}{h} \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2 \cdot \varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (6)$$

Куноскунд реакциуны трановерсалэ а рулментулуй  $B$ , путем детермина дин примеле доуэ екуаций але системулуй (4) реакциуны трансоверсалэ а рулментулуй  $A$ , атыт компонента статицэ, жыт ши чя динамикэ суплиментарэ.

Ынсэ модулул реакциуний динамиче суплиментаре а рулментулуй  $A$  поате фи калкулат ши пе алтэ кале. Дакэ луэм орижина системулуй де координате ын пунктул  $B$ , репетынд калкуле де де май сус, обцинем формула

$$R''_A = \frac{1}{h} \sqrt{J_{x_1z_1}^2 + J_{y_1z_1}^2 \cdot \varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (7)$$

унде  $J_{x_1z_1}$  ши  $J_{y_1z_1}$  сынт моментеле де инерции центрифугале але корпусулуй ын рапорт ку акселе каре ау орижина ын пунктул  $B$ .

Дин дедучеря формулелор (6) ши (7) резултэ, кэ ачесте формуле сынт жусте ын орьче систем де координате — атыт ын системул легат рижид ку корпусу, жыт ши ын системул фикс.

Формулеле (5) детерминэ ын ынтрэжиме модулул ши сенсул реакциуний динамиче суплиментаре а рулментулуй  $B$  ын системул хуз. Системул де координате хуз есте легат ку корпусу, деачея моментеле де инерции центрифугале  $J_{xz}$  ши  $J_{yz}$  ну вариэзэ

ла ротация корпулуй. Дакэ пресупунем, де екземплу, кэ витеза унгюларэ а корпулуй  $\omega$  есте константэ, дин формулеле (5) реесе, кэ реакциуня динамикэ суплиментарэ  $R_B$  есте константэ дупэ модул ши-шь пэстрызэ инвариабил сенсул ын системул  $x_{yz}$ . Де аич резултэ, кэ ачаствэ реакциуне се ротеште ымпреунэ ку корпул, скимбынду-шь сенсул фацэ де системул де реферинцэ фикс, чей че нечеситэ фиксаля ын тоате дирекцииле а рулменцилор. Ла ротация униформэ а корпулуй реакциуниле динамиче суплиментарэ  $R_A$  ши  $R_B$  сынт пропорционале ку патратул витезей унгюларе  $\omega$  а корпулуй. Ын машиниле контемпоранэ витезеле унгюларе атинг валорь дестул де марь. Де аич резултэ, кэ реакциуниле динамиче суплиментарэ але рулменцилор пот фи дестул де марь дупэ модул ши пот депэши де мулте орь реакциуниле статиче. Деачей ла конструиля машинилор ши механизмелор требуе креате астфел де кондиций, ынкыт сэ ну я наштере реакциуниле динамиче суплиментарэ. Ын ачест каз форцеле де инерцие требуе сэ се екилибрезе.

Пентру екилибраля форцелор де инерцие але корпулуй се ынтродук масе суплиментарэ, форцеле де инерцие але кэроа ымпреунэ ку форцеле де инерцие але пунктелор корпулуй репрезинтэ ун систем де форце екилибрат.

Сэ консидерэм кытева казурь партикуларе.

1. Реакциуня динамикэ суплиментарэ а рулментулуй  $B$  есте нулэ:  $R_B = 0$ . Дин формула (6) резултэ, кэ ын ачест каз  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , адикэ акса де ротацие  $z$  есте аксэ принципалэ де инерцие а корпулуй кореспунзэтоаре пунктулуй  $A$ .

2. Реакциуня динамикэ суплиментарэ а рулментулуй  $A$  есте нулэ:  $R_A = 0$ . Дин формула (7) обцинем  $J_{x,z_1} = J_{y,z_1} = 0$ . Акса де ротацие  $z$  есте акса принципалэ де инерцие а корпулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй  $B$ .

3. Реакциуниле динамиче суплиментарэ але [рулменцилор  $A$  ши  $B$  сынт нуле  $R_A = R_B = 0$ .

Ын ачест каз акса де ротацие  $z$  есте акса принципалэ де инерцие а корпулуй, кореспунзэтоаре пунктелор  $A$  ши  $B$ , прин урмаре, есте акса принципалэ чентралэ де инерцие а корпулуй. Де аич реесе, кэ дакэ корпул се ротеште ын журул аксей принципале чентрале де инерцие, атунч ын липса форцелор дате презенца рулменцилор ну есте нечесарэ, деоарече ын ачест каз атыт реакциуниле статиче, кыт ши реакциуниле динамиче суплиментарэ сынт нуле. Дин ачаствэ каузэ акселе принципале чентрале де инерцие але корпулуй сынт нумите десеоь аксе либере де ротацие.

4. Чентрул маселор корпулуй се афлэ пе акса де ротацие, каре ну есте аксэ принципалэ чентралэ де инерцие а корпулуй.

Ын казул де фацэ конформ. теоремей деспре мишкаря чентру-  
луй маселор авем

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^{(e)} = 0,$$

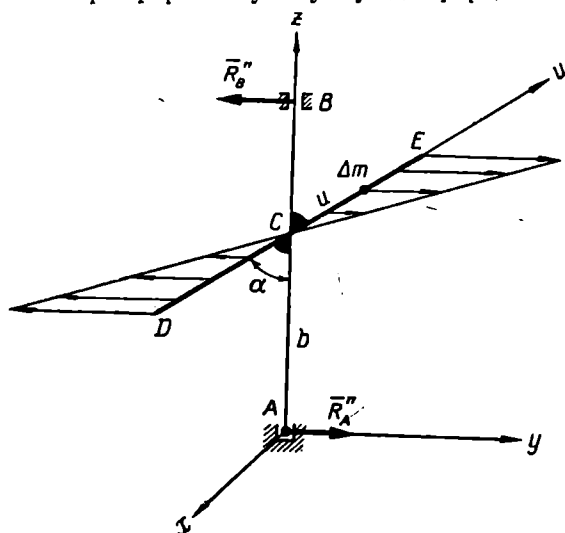
унде  $\bar{R}^{(e)}$  есте векторул принципал ал форцелор екстериоре.  
Прин урмаре,

$$\sum \bar{F}_k + \bar{R}'_A + \bar{R}''_A + \bar{R}'_B + \bar{R}''_B = 0,$$

дар дупэ дефиниция реакциунилор статиче

$$\sum \bar{F}_k + \bar{R}'_A + \bar{R}'_B = 0,$$

де унде  $\bar{R}''_A + \bar{R}''_B = 0$  ши  $\bar{R}''_B = -\bar{R}''_A$ , адикэ реакциуниле дина-  
миче суплиментарё формаэз ун куплу де форце.



Фиг. 252.

**Екземплу.** О вержя оможенэ DE авынд греутатя  $P$  ши лун-  
жимя  $2l$  се ротеште ын журул аксей вертикале ку витеза ун-  
гюларэ константэ  $\omega$ . Унгюл динтре вержя ши акса де ротацие е-  
сте  $\alpha$ . Акса есте фиксатэ ку о краподинэ ын пунктул  $A$  ши ун  
рулмент ын пунктул  $B$ ,  $AB = h$ . Сэ се детермине реакциуниле  
динамиче суплиментаре але краподиней  $A$  ши рулментулуй  $B$ ,  
дакэ чентрул де греутате  $C$  ал вержелей се афлэ пе акса де ро-  
тацие (фиг. 252).

**Резолваре.** Луэм орижиня координателор ын пунктул  $A$ ;  
ориентэм акса  $z$  дупэ акса де ротацие; алежем акса  $y$  ын аша  
фел, ка вержяуа сэ фие ситуатэ ын планул  $yz$ ; луэм акса  $x$   
перпендикулярэ ла планул  $yz$ . Ла о астфел де алежере а аксе-



лор де координате  $J_{xz} = 0$ , деоарече абсчиселе тутурор пунктелор вержелей сынт нуле.

Циньнд конт, кэ  $\epsilon = 0$ , дин формулеле (5) обцинем

$$R'_{Bx} = 0; R'_{By} = -\frac{1}{h} J_{yz} \omega^2.$$

Сэ калкулэм моментул де инерции центрифугал  $J_{yz}$  ал вержелей. Луэм ын ачест скоп ун элемент де масэ а вержелей  $\Delta m$ . Позиция ачестуй элемент пе вержя есте детерминатэ прин координата  $u$ , мэсуратэ ын лунгул вержелей де ла центрул ей. Сенсул позитив ал аксей  $u$  есте индикат ын фигура 252. Координателе элементулуй консидерат сынт

$$y = u \sin \alpha \text{ ши } z = b + u \cos \alpha,$$

унде  $b = AC$ .

Обцинем

$$J_{yz} = \sum \Delta m u \sin \alpha (b + u \cos \alpha) = b \sin \alpha \sum u \Delta m + \sin \alpha \cos \alpha \sum u^2 \Delta m, \\ \sum u \Delta m = M u_c = 0.$$

деоарече  $u_c = 0$ , яр  $\sum u^2 \Delta m = J_c$  есте моментул де инерции ал вержелей ын рапорт ку мижлокул сэу; моментул де инерции  $J_c$  поате фи детерминат дупэ формула куноскутэ

$$J_c = \frac{1}{12} \cdot \frac{P}{g} (2l)^2 = \frac{Pl^2}{3g}.$$

Авем дефинитив

$$J_{yz} = \frac{Pl^2}{3g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{Pl^2}{6g} \sin 2\alpha \text{ ши } R''_{By} = -\frac{Pl^2}{6gh} \omega^2 \sin 2\alpha.$$

Центрул маселор вержелей се афлэ пе акса де ротации, прин урмаре,

$$R''_{Ay} = -R''_{By} = \frac{Pl^2}{6gh} \omega^2 \sin 2\alpha.$$

Реакциуниле динамиче суплиментаре формязэ ун куплу де форце; ачест куплу екилибрияэ куплул, алкэтуит дин форцеле центрифугале де инерции (везь фиг. 252).

## § 5. ЕКУАЦИЯ ЖЕНЕРАЛЭ А ДИНАМИЧИЙ (ПРИНЦИПИУЛ ЛУЙ ДАЛАМБЕР—ЛАГРАНЖ)

### Дедучеря екуацией женерале а динамичий

Сэ консидерэм ун систем де  $N$  пункте материале, кэруя и с'ау импус ниште легэтурь билатерале (неелибераторе). Ын конформитате ку принципул луй Даламбер, системул де форце, конституит дин форцеле активе  $\bar{F}_k (k = 1, 2, \dots, N)$ , апликате

немижлочит ын пунктеле системулуй, дин форцеле де реакциуне  $\bar{R}_k$  але легэтурилол ши дин форцеле де инерциие  $\bar{\Phi}_k$ , сатисфаче кондицииле де екилибру ын орьче момент, адикэ ын орьче позиции. а системулуй мобил. Ку алте кувинте, системул де форце консидерат есте еквивалент ку zero:

$$(\bar{F}_k, \bar{R}_k, \bar{\Phi}_k) \sim 0. \quad (1)$$

Дар ла системул де форце, каре сатисфаче кондицииле де екилибру, путем аплика ши кондиция де екилибру, експриматэ суб форма принципиулуй депласэрилол виртуале. Ка резултат принципиул луй Даламбер поате фи унит ку принципиул депласэрилол виртуале ал луй Лагранж ын казул унуй систем мобил: *сума лукрурилол механиче елементаре але тутурор форцелор активе, апликате немижлочит ын пунктеле системулуй, але реакциунилол легэтурилол ши але форцелор де инерциие есте нулэ пе орьче депласэрь виртуале але системулуй дин позиции, окупате де систем ын моментеле куренте.* Ачаста се поате експрима суб форма екуацией:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (2)$$

Екуация (2) репрезентэ прима формэ а екуацией женерале а динамичий сау а екуацией, каре експримэ принципиул луй Даламбер — Лагранж. Легэтуриле пот фи реономе, даторитэ кондиционалитэций екилибрулуй.

О алтэ формэ а екуацией женерале а динамичий поате фи обцинутэ ынлокуинд форцеле де инерциие прин експресииле лор  $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \bar{a}_k + \bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = 0 \quad (3)$$

сау, деоарече  $\bar{a}_k = \ddot{\bar{r}}_k$ ,

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{\bar{r}}_k + \bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (4)$$

Ын сфыршит, путем презенте екуация де базэ а динамичий ши суб формэ аналитикэ, експримынд тоате продуселе скаларе але векторилол прин проекцииле лор пе акселе системулуй де координате картезиене ректангуларе фикс. Фиекаре вектор поате фи репрезентат ын фелул урмэтор

$$\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k},$$

унде  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  сынт версорий акселор де координате.

$$\begin{aligned}\delta \bar{r}_k &= \delta x_k \bar{i} + \delta y_k \bar{j} + \delta z_k \bar{k}; \quad \ddot{\bar{r}}_k = \ddot{x}_k \bar{i} + \ddot{y}_k \bar{j} + \ddot{z}_k \bar{k}; \\ \bar{F}_k &= F_{kx} \bar{i} + F_{ky} \bar{j} + F_{kz} \bar{k}; \quad \bar{R}_k = R_{kx} \bar{i} + R_{ky} \bar{j} + R_{kz} \bar{k}.\end{aligned}$$

Субституиунд ачесте валорь але векторилор ын екуация (4), обцинем:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \{ (-m_k \ddot{x}_k + F_{kx} + R_{kx}) \delta x_k + (-m_k \ddot{y}_k + F_{ky} + R_{ky}) \delta y_k + \\ + (-m_k \ddot{z}_k + F_{kz} + R_{kz}) \delta z_k \} = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Екуация (5) есте токмай форма аналитикэ а екуацией же-нерале а динамичий.

Акум сэ пресупунем, кэ легэтуриле, импуре системулуй, сынт идеале. Ачаста ынсямнэ, кэ сума лукрурилор механиче елемен-таре але реакциунилор легэтурилор есте идентик егалэ ку зеро пе орьче депласаре виртуалэ а системулуй динтр'о оарекаре по-зицие, окупатэ ын тимпул мишкэрий, адикэ

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0.$$

Ын ачест каз екуацииле (2), (3), (4) ши (5) капэтэ формуле урмэтоаре:

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{r}_k + \bar{F}_k) \delta r_k = 0; \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{a}_k + \bar{F}_k) \delta r_k = 0; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \delta r_k = 0; \quad (8)$$

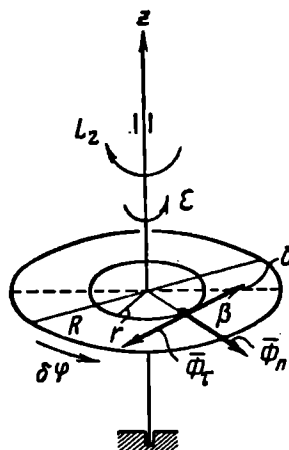
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \{ (-m_k \ddot{x}_k + F_{kx}) \delta x_k + (-m_k \ddot{y}_k + F_{ky}) \delta y_k + \\ + (-m_k \ddot{z}_k + F_{kz}) \delta z_k \} = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

### Екземпле

1. О платформэ ротундэ оризонталэ поате сэ се ротяскэ фэрэ фрекаре ын журул аксей вертикале  $Oz$ , каре трече прин центрул де греутате  $O$  ал платформей. Пе платформэ се мишкэ дупэ о циркумферинцэ де разэ  $r$  ку центрул ын  $O$  ун ом  $B$  ку греутатя  $Q$ , ачелерация танженциалэ  $a_t = b$  а мишкэрий сале

фацэ де платформэ фиинд константэ. Сэ се детермине акчелерация унгуларэ  $\epsilon$  а платформей, консидерынд платформа дрепт ун диск оможен ку греутатя  $P$  ши раза  $R$ .

Резолваре. Сэ апликэм принципул унит ал луй Даламбер—Лагранж. Моментул принципал ал форцелор де инерцие але платформей ын рапорт ку акса де ротации  $Oz$  се детерминэ дупэ формула  $L_z = J_z \epsilon$ , унде  $J_z$  есте моментул де инерцие ал платформей ын рапорт ку акса  $z$  (фиг. 253).



Фиг. 253.

Мишкаря омулуй есте о мишкаре компусэ, алкэтуитэ дин мишкаря фацэ де платформэ ши мишкаря ымпреунэ ку са. Акчелерация танженциалэ а омулуй ын мишкаря абсолюте есте

$$b + r\epsilon,$$

яр форца танженциалэ де инерцие

$$\Phi_\tau = \frac{Q}{g} (b + r\epsilon).$$

Ын фигура 253 сынт индикате форца танженциалэ  $\bar{\Phi}_\tau$  ши форца нормалэ  $\bar{\Phi}_n$  де инерцие але омулуй. Сэ комуникэм платформей о депласаре виртуалэ — ротация платформей ымпреунэ ку омул суб унгул  $\delta\varphi$  ын журул аксей  $Oz$  ын сенсул, индикат ын фигура 253. Лукрул механик пе ачастэ депласаре есте ефектуат де моментул форцелор де инерцие але платформей ши форца танженциалэ де инерцие а омулуй. Дупэ скимбаря сеннулуй

$$\sum \delta A_k = +L_z \delta\varphi + \Phi_\tau r \delta\varphi = 0,$$

де унде

$$+ J_z \epsilon + \frac{Q}{g} (b + r\epsilon)r = 0$$

ши

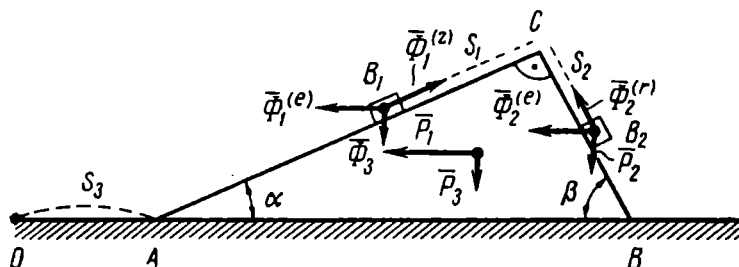
$$\epsilon = - \frac{Qbr}{J_z g + Qr^2} = - \frac{1}{2} \frac{P}{g} \frac{Qbr}{R^2 \cdot g + Qr^2} = - \frac{2Qbr}{PR^2 + 2Qr^2}.$$

Семнул минус аратэ, кэ сенсул акчелерацией унгуларе  $\epsilon$  есте опус сенсулуй пресупус.

2. О призмэ триунгуларэ дряптэ оможенэ ку греутатя  $P_3$  есте пусэ ку фаца латералэ пе ун план оризонтал нетед. Челеалалте доуэ феце латерале формязэ ку планул оризонтал унгуриле  $\alpha$  ши  $\beta$ , унде  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Пе ачесте феце сынт пусе корпу-

риле  $B_1$  ши  $B_2$  авынд греутэциле  $P_1$  ши  $P_2$ ; ачесте корпусь пот алунека пе фецеле латерале фэрэ фрекаре. Центреле де греутате але призмей ши корпусилор се афлэ ынтр'ун план вертикал  $V$ , перпендикулар пе мукиле призмей. Сэ се детермине акчелерация призмей ши акчелерацииле корпусилор фацэ де призмэ.

Резолваре. Ын фигура 254 сынт репрезентате триунгюл дрептунгик  $ABC$  — секциуня призмей ку планул  $V$  ши  $B_1, B_2$  — секциуниле корпусилор ку ачелаш план. Сэ апликэм принципул унит ал луй Даламбер — Лагранж.



Фиг. 254.

Системул аре трей граде де либертате. Ын калитате де координате жeneralизате вом луа дистанца  $OA=s_3$ , унде  $O$  есте ун пункт оарекаре фикс, ши дистанцеле  $CB_1=s_1$  ши  $CB_2=s_2$ .

Сэ алкэтуим трей екуаций индeпенденте, дин каре детерминэм акчелерацииле некуноскуте  $\ddot{s}_3, \ddot{s}_1$  ши  $\ddot{s}_2$ . Мишкаря корпусилор есте о мишкаре компусэ, алкэтуитэ дин мишкаря лор фацэ де призмэ ши мишкаря ымпреунэ ку призма. Ын фигура 254 сынт индикате резултантеле форцелор де инерции: а призмей

$$\Phi_3 = \frac{P_3}{g} \ddot{s}_3;$$

але корпусилор ын мишкаре релативэ ши де транспорт, пресупунынд, кэ акчелерацииле сынт ориентате ын сенсул крештерий координателор жeneralизате

$$\Phi_1^{(r)} = \frac{P_1}{g} \ddot{s}_1, \quad \Phi_1^{(e)} = \frac{P_1}{g} \ddot{s}_3, \quad \Phi_2^{(r)} = \frac{P_2}{g} \ddot{s}_2 \quad \text{ши} \quad \Phi_2^{(e)} = \frac{P_2}{g} \ddot{s}_3.$$

Пентру а обцине екуацииле индeпенденте де екилибру, коммуникэм системулуй аспфел де депласэрь виртуале, ла каре вариязэ нумай уна дин координателе жeneralизате.

Сума лукрурилор механиче елементаре але форцелор консидерате ши але форцелор де инерции ла вариация координатей  $s_1$  есте нулэ. Ын ачест каз

$$P_1 \sin \alpha \delta s_1 - \Phi_1^{(r)} \delta s_1 + \Phi_1^{(e)} \cos \alpha \delta s_1 = 0,$$

де унде

$$P_1 \sin \alpha - \frac{P_1}{g} \ddot{s}_1 + \frac{P_1}{g} \ddot{s}_3 \cos \alpha = 0$$

ши

$$g \sin \alpha - \ddot{s}_1 + \ddot{s}_3 \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Ла вариация нумай а координатей  $s_2$  ын мод аналог обцинем

$$g \cos \alpha - \ddot{s}_2 - \ddot{s}_3 \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Пентру а обцине екуация а трея комуникэм системулуй о аша депласаре виртуалэ, ла каре вариация нумай координата  $s_3$ .

Екуация лукрурилор механике капэтэ форма

$$-\frac{P_3}{g} \ddot{s}_3 \delta s_3 - \frac{P_1}{g} \ddot{s}_3 \delta s_3 - \frac{P_2}{g} \ddot{s}_3 \delta s_3 + \frac{P_1}{g} \ddot{s}_1 \cos \alpha \delta s_3 - \frac{P_2}{g} \ddot{s}_2 \sin \alpha \delta s_3 = 0$$

ши, прин урмаре,

$$-(P_1 + P_2 + P_3) \ddot{s}_3 + P_1 \cos \alpha \ddot{s}_1 - P_2 \sin \alpha \ddot{s}_2 = 0. \quad (3)$$

Дин екуацииле (1) ши (2)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{s}_1 &= g \sin \alpha + \ddot{s}_3 \cos \alpha, \\ \ddot{s}_2 &= g \cos \alpha - \ddot{s}_3 \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Субституинд ачесте валорь ын екуация (3), обцинем

$$\ddot{s}_3 = \frac{(P_1 - P_2) g \sin \alpha \cos \alpha}{P_1 \sin^2 \alpha + P_2 \cos^2 \alpha + P_3}.$$

Апой дин екуацииле (4) авем

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= \frac{P_1 + P_3}{P_1 \sin^2 \alpha + P_2 \cos^2 \alpha + P_3} g \sin \alpha, \\ \ddot{s}_2 &= \frac{P_2 + P_3}{P_1 \sin^2 \alpha + P_2 \cos^2 \alpha + P_3} g \cos \alpha. \end{aligned}$$

## § 6. ЕКУАЦИИЛЕ ЛУЙ ЛАГРАНЖ ДЕ СПЕЦА А ДОУА

Екуация жёнералэ а динамичий, каре експримэ принципиул унит ал луй Даламбер — Лагранж, дэ посибилитатя де а дедуче екуацииле мишкэрий системелор ын координателе жёнерализате сау аша нумителе екуаций але луй Лагранж де специа а доуа\*.

\* Екуацииле луй Лагранж де специа ынтыя сынт експусе ын курсурь де механикэ май амэнуңците.

Сэ консидерэм ун систем механик ку легэтурь олономє идеале ши билатерале. Фие  $n$  есте нумэрул граделор де либертате але ачестуй систем. Ачаста ынсымнэ, кэ путем алежє  $n$  координате жєнерализатє  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , каре детерминэ конфигурация жєометрикэ а системулуй, адикэ позиция ачестуй систем ын спациу. Ку алте кувинте, координателе картезиєне але тутурор пунктелор системулуй механик, каре детерминэ позиция ачестуй систем ынтр'ун оарекаре систем ректангулар, пот фи експримате прин координате жєнерализатє. Вом нота ку  $N$  нумэрул пунктелор системулуй. Алте лимитэрь асупра легэтурилор системулуй ну се импун; путем консидера, кэ ачесте легэтурь сынт реономє, адикэ се експримэ прин екуаций але легэтурилор, каре концин експличит тимпул  $t$ . Атунч ын формулеле, каре експримэ координателе картезиєне прин чєлє жєнерализатє, тимпул  $t$  поате сэ се концинэ ын мод експличит. Прин урмарє, ачестє формуле ау форма

$$\begin{aligned}x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t).\end{aligned}\quad (1)$$

Деч, ши раза вектоаре а фиекэруй пункт де асеменя есте о функции де ачестє вариабилє

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (2)$$

Апликынд екуация жєнералэ а динамичий (6) дин § 5, обцинем

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{\bar{r}}_k + \bar{F}_k) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3)$$

Сэ експримэм депласаря виртуалэ а пунктулуй, адикэ векторул  $\delta \bar{r}_k$ , прин координателе жєнерализатє. Ын ачест скоп сэ калкулэм дифференциала тоталэ а векторулуй  $\bar{r}_k$ , конформ релацией (2). Деоарече се детерминэ векторул депласэрий виртуале, адикэ а депласэрий ынкипuite ын моментул  $t$  фиксат

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \delta q_n \quad (4)$$

сау ынтр'о формэ прєскуртатэ

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (5)$$

Требує сэ авем ын ведере, кэ ынсумаря дулэ индичєлє  $k$  есте екстинсэ асупра пунктелор системулуй, де ла уну пынэ ла  $N$ ;

ынсумаря дупэ индичеле  $i$  есте екстинсэ асупра тутурор координатор жєнерализате, адикэ де ла уну пынэ ла  $n$ . Субституинд (5) ын (3) ши скимбынд ординя ынсумэрий, обцинем

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^N \left( -m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0. \quad (6)$$

Сэ апликэм идентитатя

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (7)$$

Дупэ ачаста пребуе сэ апликэм унеле релаций, каре ау лок нумай пентру системеле механиче олономе. Пентру а дедуче ачесте релаций сэ алжэтуим май ынтый деривата тоталэ а векторулуй  $\bar{r}_k$  ын рапорт ку тимпул, експриматэ прин координателе жєнерализате ши тимп конформ формулей (2), адикэ сэ калкулэм векторул витезей пунктулуй ку индичеле  $k$ :

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \quad (8)$$

Сэ луэм де ла амбеле пэрць але екуацией (8) деривателе парциале ын рапорт ку витезеле жєнерализате. Ын ачест каз

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Екуация (9) есте токмай уна дин релацииле кэутате. Пентру а обцине о алтэ релацие, луэм деривата парциалэ де ла амбеле пэрць але егалитэций (8) ын рапорт ку  $q_i$ . Ын партя дряптэ а екуацией (8) коефициенций витезелор жєнерализате депинд де вариабилы  $q_i$ , адикэ сынт функцииле векториале  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}$ . Ла дериваря лор ын рапорт ку о оарекаре координатэ жєнерализатэ  $q_i$  обцинем деривателе парциале секунде.

Астфел,

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}. \quad (10)$$

Сэ калкулэм пе де алтэ парте деривата тоталэ ын рапорт ку тимпул де ла функция  $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ , каре депинде ын мод експлицит де тоате координателе жєнерализате ши де тимпул  $t$ . Атунч апар деривателе парциале секунде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \quad (11)$$



Компарынд егалитэциле (10) ши (11) обсервэм, кэ експрессиеле лор дин партя дряптэ сынт ачеляшь, деоарече деривателе парциале секунде ын рапорт ку доуэ вариабиле ну депинд де ординя деривэрий ын рапорт ку ачесте вариабиле.

Обцинем астфел а доуа релацие кэутатэ, нечесарэ пентру челе че урмязэ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_l}. \quad (12)$$

Субституинд експрессиеле дин партя дряптэ але релациилор (9) ши (12) ын (7), авем

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l} \right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_l}. \quad (13)$$

Сэ субституим партя дряптэ а екуацией (13) суб семнул примей суме интериоре (6), презентынд ачастэ сумэ суб форма а доуэ суме. Ын ачест каз

$$\sum_{k=1}^N \left( -m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l} \right) = - \left( \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^N m_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_l} \right). \quad (14)$$

Сэ трансформэм май департе експрессия дин партя дряптэ а екуацией (14). Сэ консидерэм ын ачест скоп експрессия енергийней чинетиче а системулуй:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (m_k \bar{v}_k^2)$$

сау, деоарече патратул скалар ал векторулуй есте егал ку патратул модулулуй луй ши  $\bar{v}_k = \dot{\bar{r}}_k$ , авем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (m_k \bar{v}_k^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\bar{r}}_k)^2. \quad (15)$$

Дупэ кум индикэ екуация (8) функция  $\dot{\bar{r}}_k$  депинде ын жене-рал де тоате координателе  $q_l$  ши де  $\dot{q}_l$  (депенденца де вариабилеле  $\dot{q}_l$  есте линиарэ). Сэ алкэтуим деривателе парциале де ла  $T$  ын рапорт ку вариабилеле  $\dot{q}_l$  ши  $q_l$ , апликынд регула деривэрий функциилор компусе ши деривынд май ынтый продусул скалар:

$$\frac{\partial (\dot{\bar{r}}_k)^2}{\partial \dot{q}_l} = 2 \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_l}.$$

Ын ачест каз

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{r}_k \frac{\partial \dot{r}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{r}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i}. \quad (17)$$

Субституинд (16) ши (17) ын (14), обцинем

$$\sum_{k=1}^N \left( -m_k \ddot{r}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right) = - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \quad (18)$$

Сума а доуа интериоарэ дин партя дряптэ а екуацией (6)  $\sum_{k=1}^N \ddot{F}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$  есте форца жёнерализатэ  $Q_i$ , адикэ

$$\sum_{k=1}^N F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = Q_i. \quad (19)$$

Прин урмаре, екуация (6) капэтэ урмэтоаря формэ

$$\sum_{i=1}^n \left\{ - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + Q_i \right\} \delta q_i = 0. \quad (20)$$

Екуация (20) есте токмай екуация жёнералэ а динамичий ын координате жёнерализате. Сэ менционэм, кэ сума лукрурилор механиче елементарэ але тутурор форцелор де инерцие але системулуй пе депласаря виртуалэ, каре кореспунде тоталитэций де валорь але вариациилор координателор жёнерализате  $\delta q_i$ , есте експриматэ ын екуация (20) ын фелул урмэтор

$$- \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (21)$$

#### Дедучеря екуациилор луй Лагранж де специ а доуа

Екуация (20) есте жустэ пентру орьче мулциме де мэримь индипенденте ( $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ ). Апликынд ачаствэ екуацие пе рынд ла аша валорь але ачестей мулцимь, ын каре вариация уней сингуре координате есте диферитэ де zero, яр вариацииле челорлалте координате сынт нуле, адикэ ну вариазэ, обцинем  $n$  екуаций де фелул урмэтор

$$- \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

сау дефинитив

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (22)$$

Екуацииле (22) сынт нумите екуацииле луй Лагранж де специа а доуа. Еле сервиск дрепт базэ де дезволтаре ну нумай а механикий теоретиче ши а апликацийлор ей, чи ши а алтор ра-муре але физичий теоретиче.

### Структура екуацийлор луй Лагранж де специа а доуа

Екуацииле луй Лагранж суб форма (22) репрезентэ, ын есенца, регула компунерий екуацийлор динамиче дифференциале але мишкэрий системулуй ын координателе жёнерализате. Пентру а алкэтуи екуацииле мишкэрий есте нечесар сэ ефектуэм тоате операцииле асупра енержийей чинетиче, индикате ын екуацииле (22), ши сэ калкулэм експресиеле форцелор жёнерализате конформ кондицийлор проблемей. Прин урмаре, форма финалэ а екуацийлор мишкэрий се детерминэ прин релация дин-тре енержия чинетикэ а системулуй, координателе ши витезеле жёнерализате, кыт ши форцеле, каре акциянызэ асупра систе-мулуй.

Пентру а експрима енержия чинетикэ  $T$  прин координателе жёнерализате есте нечесар сэ субституим ын експрессия ей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2$$

патрателе витезелор

$$v_k^2 = \dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 \quad (23)$$

пунктелор системулуй прин експрессиеле лор ын координателе ши витезеле жёнерализате.

Сэ ынлокуим  $x_k, y_k, z_k$  ку експрессиеле лор прин координателе ши витезеле жёнерализате. Сэ деривам ын ачест скоп лэрииле дрепте але екуацийлор каре експримэ координателе кар-тезиене прин челе жёнерализате ын рапорт ку тимул:

$$x_k = x_k(q_1, \dots, q_n, t) \text{ ш. а. м. д.,} \quad (24)$$

де унде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t}; & \dot{y}_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial y_k}{\partial t}; \\ \dot{z}_k &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial z_k}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

Сэ ридикэм ла патрат експрессииле дин партя дряптэ а екуациилор (24') ши сэ ле субституим ын експрессия енержіей чинетиче. Апой сэ сепарэм термений де градул дой фацэ де витезеле жєнерализате, адикэ термений, каре концин патрателе витезелор ши продукул лор ку диферите комбинаций але индицилор; ын мод аналог сепарэм термений де градул ынтый ал витезелор жєнерализате ши термений, каре ну концин витезеле.

Експрессия енержіей чинетиче ва кэлэта форма:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} c, \quad (25)$$

унде коэффициенций  $a_{ij}$ ,  $b_i$  ши  $c$  депинд де тоате координателе жєнерализате  $q_i$  ши де тимпул  $t$ .

Ын казул легэтурилор, че ну депинд де тимп,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (26)$$

Ла алкэтуиря екуациилор луй Лагранж (22) требуе сэ ефектуэм урмэтоареле операций:

1. Калкулэм деривата парциалэ а енержіей чинетиче ын рапорт ку витеза жєнерализатэ; обцинем ын ачест каз експрессия

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + a_i. \quad (27)$$

2. Калкулэм деривата тоталэ а експрессией дин партя дряптэ а екуацией (27) ын рапорт ку тимпул; ачаствэ дериватэ концине деривателе секунде  $\dot{q}_i$  але координателор жєнерализате ын рапорт ку тимпул, адикэ акчелерацииле жєнерализате. Деоарече коэффициенций  $a_{ij}$  депинд де  $q_i$  ши  $t$ , есте евидент, кэ дупэ дериваре вор апаре ши витезеле жєнерализате. Акчелерацииле жєнерализате де градул ынтый се концин линиар, пе кынд витезеле жєнерализате ын казул жєнерал се концин нелиниар; нелиниар се вор концине ши координателе жєнерализате  $q_i$  ын функции де форма коэффициенцилор  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  ши ай форцелор жєнерализате.

3. Калкулэм деривата парциалэ а енержіей чинетиче ын рапорт ку координата жєнерализатэ  $\frac{\partial T}{\partial q}$ , каре де асеменя се концине ын екуация луй Лагранж, деривынд коэффициенций  $a_{ij}$ ,  $b_i$  ши  $c$  ын рапорт ку  $q_i$ .

4. Афлэм експрессииле форцелор жєнерализате, кунюскынд форцеле, аппликате ын пунктеле системулуй.

Системул де екуаций ал луй Лагранж де специа а доуа презентэ ун систем де  $n$  екуаций дифференциале ординаре де градул

дой фацэ де координателе жэнерализате (нумэрул де екуаций есте егал ку нумэрул координателор жэнерализате, адикэ ку нумэрул граделор де либертате ын казул системулуй олоном).

Ын урма интегрэрий екуациилор луй Лагранж се обцин координателе жэнерализате ка функций де тимп; аич апар  $2n$  константе арбитраре:

$$q_i = q_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Константеле арбитраре се детерминэ куноскынд кондициле инициале, адикэ фиинд дате валориле координателор жэнерализате  $(q_i)_0$  ши але витезелор жэнерализате  $(\dot{q}_i)_0$  ын моментул инициал.

Дакэ детерминэм координателе ши витезеле жэнерализате ка функций де тимп, атунч пе база екуациилор (24) ши (24') путем афла координателе картезиене але тутурор пунктелор системулуй ши витезеле лор ын функции де тимп. Аша се резолвэ проблема детерминэрий мишкэрий системулуй, дакэ куноаштем легэтуриле ши форцеле активе.

#### Екуациле луй Лагранж ын казул форцелор потенциале

Ын ачест каз, форцеле, каре акциянызэ асупра системулуй механик, пот фи експримате прин функция де форцэ  $U$ ; форцеле жэнерализате се експримэ прин формула

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Екуациле луй Лагранж капэтэ форма

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Тречем  $\frac{\partial U}{\partial q_i}$  ын партя стынгэ а екуациилор (29) ку семнул опус. Сэ фолосим фактул, кэ функция де форцэ депинде нумай де позиция системулуй, адикэ еа депинде нумай де координателе жэнерализате  $q_i$  ши ну депинде де витезеле жэнерализате  $\dot{q}_i$ , прин урмаре, путем сэ консидерэм, кэ  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \equiv 0$ . Деч

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (30)$$

Ка урмаре фиекаре екуацие а луй Лагранж капэтэ форма

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (31)$$

Сэ ынтродучем функция  $L = T + U$ , нумитэ функции а луй Лагранж, унде  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Екуацииле луй Лагранж капэтэ форма финалэ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

Ачастэ формэ а екуациилор луй Лагранж есте май комодэ ла студия унор проприетэць але ачестор екуаций. Функция  $L$  ну есте енержія механикэ  $E$  а системулуй, пентру каре авем

$$E = T - U = T + P.$$

### Координате циклические ши интеграле циклические

Се нумеште координатэ жєнерализатэ цикликэ а системулуй механик координатэ  $q_k$ , каре ну се концине експлицит ын функция луй Лагранж  $L = T + U$ .

Ачастэ координатэ жєнерализатэ ну се концине нич ын експресия функцией де форцэ  $U$ , нич ын експресия енержіей чинетиче  $T$ . Ын експресия енержіей чинетиче фигурызэ нумай витеза жєнерализатэ  $\dot{q}_k$ , кореспунзэтоаре ачестей координате. Ын ачесте кондиций  $\frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0$  ши екуация луй Лагранж, каре кореспунде координатей дате, капэтэ форма

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0.$$

Де аич

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = C_k = \text{const}, \quad (33)$$

унде  $C_k$  есте о мэриме константэ.

Десфэшурынд експресия дин партя стынгэ а екуацией (33), путем с'о презентэм суб форма

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = C_k, \quad (34)$$

деоарече функция де форцэ  $U$  ну депинде де витезеле жєнерализате.

Експресия пентру  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$  поате фи обцинутэ, деривынд енержія чинетикэ  $T$  суб форма (25) ын рапорт ку  $\dot{q}_k$ .

Екуация (33) капэтэ форма

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \dot{q}_i + b_k = C_k. \quad (35)$$

Астфел, с'а обцинут о интегралэ примэ а екуациилор луй Лагранж, интегралэ, каре кореспунде координатей чикличе да-те  $q_k$  дин каре каузэ есте нумитэ интегралэ чикликэ. Интегра-ла чикликэ есте о функции линиарэ де витезеле женерализате.

Пентру интеграря комплектэ а системулуй де екуаций але луй Лагранж есте нечесар ши суфициент сэ обцинем  $2n$  инте-прале приме але ачестуй систем, адикэ  $2n$  релаций де форма

$$f_s(q_i, q_i, t) = C_s (s=1, 2, \dots, 2n), \quad (36)$$

каре сатисфак екуацииле луй Лагранж.

Дин интегралеле (36) детерминэм тоате  $q_i, \dot{q}_i$  ын функ-ции де тимп ку ун нумэр суфициент де константе арбитраре.

### Интеграла енержий

Дупэ кум штим дин теоремеле женерале але динамичий, пен-тру о класэ маре де системе механике — системе консервативе — екзистэ интеграла енержийей, конформ кэрея енержия механикеэ тоталэ а системулуй ын тимпул мишкэрий рэмыне константэ

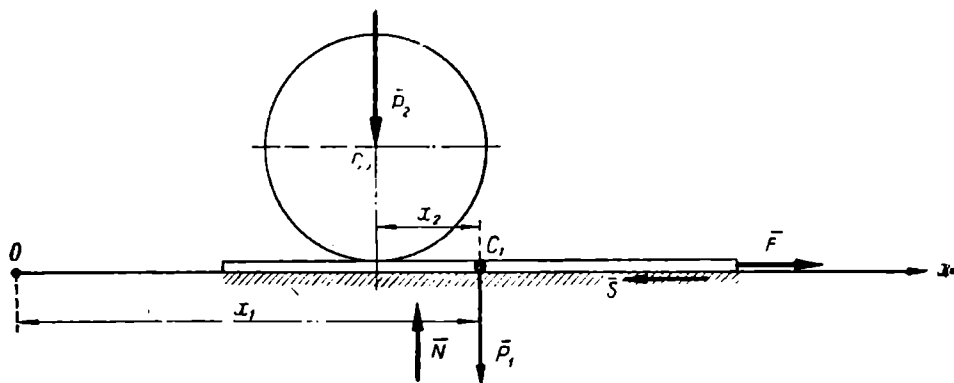
$$T + P = h.$$

Ачаствэ интегралэ поате фи дедусэ намижлочит ши дин екуа-цииле луй Лагранж ын казул системулуй ку легэтурь идеале, каре ну депинд де тимп, ши каре се мишкэ суб акциуня фор-целор активе, че поседэ о функции де форцэ де асемenea инде-пендентэ де тимп.

**Екземплу.** Пе ун план фикс ку асперитэць ашезат оризон-тал се афлэ о платформэ. Пе платформэ есте ашезат ун чи-линдру. Ынтр'ун момент оарекаре ла платформэ есте апликатэ форца константэ оризонталэ  $\vec{F}$ , каре акцияэзэ ын лунгул дреп-тей, че трече прин центрул де греутате ал платформей ши прин проекция пе платформэ а центрулуй де греутате ал чилинд-рулуй, перпендикуляр пе женератоаря де-а лунгул кэрея чилин-друл се атинже де платформэ. Сэ се детермине мишкаря сис-темулуй, пресупунынд, кэ чилиндрул се ростогаеште пе плат-формэ фэрэ алунекаре ши negliжынд гросимя платформей (фиг. 255).

**Резолваре.** Се дэ:  $P_1$  есте форца де греутате а платфор-мей,  $P_2$  — форца де греутате а чилиндрулуй,  $R$  — раза чилин-друлуй,  $k$  — коэффицентул де фрекаре динтре платформэ ши планул оризонтал фикс.

Дин кондицииле проблемей резултэ, кэ мишкаря системулуй констэ дин мишкаря де трансляции а платформей ши мишкаря де ростогири а чилиндрлуй пе платформэ. Ын калитате де координате жєнерализате але системулуй есте комод сэ луэм: координата  $x_1$  а центрулуй де греутате  $C_1$  ал платформей; координата  $x_2$  а центрулуй де греутате ал чилиндрлуй ын рапорт ку центрул де греутате ал платформей ши унгул де ротации  $\varphi$  ал чилиндрлуй ла ростогирия са пе платформэ. Алунекаря чилиндрлуй липсеште, прин урмаре, ынтре ултимеле доуэ координате екзистэ о легатурэ олономэ, каре се експримэ прин релация интеграбилэ  $x_2 = R\varphi$ , де унде  $\dot{x}_2 = R\dot{\varphi}$  (константа де интеграре поате фи консидератэ егалэ ку zero).



Фиг. 255.

Астфел, системул поседэ нумай доуэ граде де либертате ши позиция луй се детерминэ прин доуэ координате индепенденте:

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2.$$

Компунем екуацииле луй Лагранж

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$

Пентру а афла форца жєнерализатэ  $Q_1$  детерминэм сума лукрурилор механиче еламентаре але тутурор форцелор пе депласаря виртуалэ а системулуй, каре кореспунде вариацией координатей жєнерализате  $x_1$ . Ачест лукру механик есте

$$(-S + F) \delta x_1 = [- (P_1 + P_2) k + F] \delta x_1,$$

унде  $S$  есте форца де фрекаре

$$S = (P_1 + P_2)k.$$



Прин урмаре, форца жєнерализатэ

$$Q_1 = -(P_1 + P_2)k + F.$$

Форца жєнерализатэ  $Q_2$  кореспунзэтоаре координатей жєнерализате  $x_2$ , есте егалэ ку zero, деоарече чилиндрул се ростоголэште пе платформэ фэрэ алунєкаре, яр форца де фрекаре дин-тре чилиндру ши платформэ ну ефектуязэ лукру меканик.

Сэ калкулэм єнержія чинетикэ а ынтрегулуй систем:

$$T = T_n + T_r$$

унде  $T_n$  есте єнержія чинетикэ а платформей,  $T_r$  — єнержія чинетикэ а чилиндрлуй.

$$\text{Єнержія чинетикэ а платформей } T_n = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{x}_1^2.$$

Єнержія чинетикэ а чилиндрлуй поате фи калкулатэ дупэ теорема луй Кьониг.

Єнержія чинетикэ  $T_{C_1}$  а чентрулуй де греутате ал чилиндрлуй ын мишкаря абсолутэ есте

$$T_{C_1} = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Єнержія чинетикэ  $T'$  а чилиндрлуй ын мишкаре фацэ де чен-трул сэу  $C_1$  ал маселор есте

$$T' = \frac{1}{2} J_{C_1} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2^2;$$

атунч

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2^2$$

(вич с'а фолосит екуация легэтурий).

Деч

$$T = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{4} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2^2$$

сау

$$T = \frac{P_1 + P_2}{2g} \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2^2 + \frac{P_2}{g} \dot{x}_1 \dot{x}_2.$$

Прин урмаре

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{P_1 + P_2}{2g} \dot{x}_1 + \frac{P_2}{g} \dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2} \frac{P_2}{g} \dot{x}_2 + \frac{P_2}{g} \dot{x}_1.$$

Субституинд  $T$  ын екуацииле луй Лагранж ши ефектуынд гоате операцииле (калкулэм май ынтый деривателе парциале,

апой дөривателе тотале ын рапорт ку тимпул), обцинем урмэ-  
тоареле екуаций дифференциале:

$$\frac{P_1+P_2}{g} \ddot{x}_1 + \frac{P_2}{g} \ddot{x}_2 = -(P_1+P_2)k + F,$$

$$\frac{P_2}{g} \ddot{x}_1 + \frac{3}{2} \frac{P_2}{g} \ddot{x}_2 = 0.$$

Де унде

$$\ddot{x}_2 = -\frac{2}{3} \ddot{x}_1.$$

Субституиנד ын прима екуацие, обцинем

$$\ddot{x}_1 = b = \text{const.}$$

Интегрынд де доуэ орь ын рапорт ку тимпул  $t$ , детерминэм мишкаря системулуй. Калкулэм константеле арбитраре дупэ кондицииле инициале.

Ачест өкземплу поате фи анализат ши жу ажуторул теоремелор жєнерале але динамичий.

## § 7. ЕКУАЦИИЛЕ КАНОНИЧЕ

Екуацииле луй Лагранж формязэ ун систем де екуаций дифференциале де градул дой фацэ де функцииле  $q_i(t)$ . Ачест систем поате фи трансформат ынтр'ун систем еквивалент де екуаций де градул ынтый фацэ де  $2n$  функций ын рапорт ку координателе жєнерализате  $q_i$  ши импулсуриле жєнерализате  $p_i$ .

Се нумеште импулс жєнерализат ын динамика аналитикэ мэримя динамикэ  $p_i$ , каре се експримэ прин функция луй Лагранж  $L$  сау прин енержия чинетикэ  $T$  а системулуй ын фелул урмэтор:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

сау

$$p_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Системул де екуаций (2) поате фи резолват фацэ де  $\dot{q}_i$ , експримынду-ле прин  $p_i$ , прин урмаре, функция  $L$  поате фи експриматэ прин  $p_i$  ши  $q_i$ .

Сэ алкэтуим ынкэ о функции:

$$H = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i. \quad (3)$$

Сэ ексcludем дин  $H$  тоате  $\dot{q}_i$  ку ажуторул екуациилор (2) ши сэ калкулэм вариация функцией

$$H(p_i, q_i, t).$$

Пе де алтэ парте, луынд  $H$  ын форма инициалэ (3), обцинем

$$\delta H = - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum \delta p_i \dot{q}_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i.$$

Ын виртутя релацией (1) сума терменилор ал дойля ши ал патруля есте егалэ ку zero. Екуацииле луй Лагранж пермит сэ субституим ын примул термен

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{dp_i}{dt} \equiv \dot{p}_i.$$

Прин урмаре,

$$\delta H = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \delta p_i \dot{q}_i. \quad (4)$$

Сэ алкэтуим ын партя стынгэ а екуацией (4) експресия пентру  $\delta H$  консидерынд  $\delta H$  о функцие де  $p_i, q_i$ , обцинутэ дин (3) дупэ ексcludеря мэримилор  $q_i$ :

$$\delta H(p_i, q_i, t) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \quad (4')$$

Егалэм (4) ку (4'):

$$\sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \dot{q}_i \delta p_i. \quad (5)$$

Деоарече ын казул системулуй олоном тоате вариацииле  $\delta p_i$  ши  $\delta q_i$  сынт индепенденте ши екуация (5) аре лок пентру орьче вариаций  $\delta p_i$  ши  $\delta q_i$ , коефициенций луй  $\delta q_i$  ши  $\delta p_i$  дин партя стынгэ ши чя дряптэ але екуацией (5) сынт егалэ

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6)$$

Екуацииле (6) се нумеск екуацииле канониче але луй Хамилтон.

*Екземплу.* Сэ черчетэм проблема луй Ньютон деспре миш-каря унуй пункт материал ку маса  $m$  ын кымпул чентрал ал форцелор де атракцие але луй Ньютон дин партя унуй корп фикс ку маса  $M$ .

*Резолваре.* Фие корпул фикс есте о сферэ оможенэ, адикэ форцеле кымпулуй де атракцие сынт ындрептате спре чентрул  $O$  ал корпулуй фикс. Ын конформитате ку лежя грави-

таший универсале а луй Ньютон форца, каре акцияныз асупра пунктулуй мобил, есте:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r^0},$$

унде  $\gamma$  есте ун коэффициент констант,  $r$  — дистанца динтре пунктул мобил ши чентрул фикс,  $\vec{r^0}$  — версорул разей вектоаре  $\vec{r}$  а пунктулуй мобил дусэ дин чентрул де атракције.

Пентру а афла функция де фърцэ а кымпулуй сэ компунем експрессия лукрулуй механик элементар ал форцей. Лукрул механик есте диферит де зеро нумай пе депласаря радиалэ а пунктулуй

$$\vec{F} d\vec{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr.$$

Сэ егалэм ачест лукру механик ку диференциала функцией де фърцэ.

Ын ачест каз

$$dU = -\gamma \frac{Mm}{r^2},$$

де унде

$$U = +\gamma \frac{Mm}{r} + C.$$

Консидерынд  $U=0$  пентру  $r=\infty$ , авем

$$C=0,$$

адикэ

$$U = \gamma \frac{Mm}{r}. \quad (7)$$

Дин теорема деспре вариация моментулуй кантитэций де мишкаре резултэ, кэ траектория пунктулуй материал, каре се мишкэ суб акциуня уней форце чентрале, есте о курбэ планэ, планул кэрея трече прин чентрул форцей. Сэ тречем ла координателе поларе ын ачест план  $q_1=r$  ши  $q_2=\varphi$  (координателе жёнерализате але пунктулуй). Енергия чинетикэ а пунктулуй

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (8)$$

Импульсуриле жёнерализате сынт

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (9)$$

Дин ачесте релаций експримэм витезеле жёнерализате прин импульсуриле жёнерализате:

$$\dot{r} = \frac{p_1}{m}; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_2}{mr^2}. \quad (10)$$

Сэ алкэтуим функция луй Хамилтон, експриматэ прин  $q_1, q_2, p_1, p_2$ :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \right) - \gamma \frac{Mm}{r}, \quad (10)$$

обсервэм, кэ  $H = T - U^*$ .

Екуацииле канониче але мишкэрий сынт

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}; & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial r}; \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}; & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Сау, калкулынд деривателе парциале дин (12), обцинем екуацииле канониче

$$\dot{r} = \frac{p_1}{m}; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_2}{mr^2}; \quad \dot{p}_1 = \frac{1}{m} \frac{p_2^2}{r^3} + \gamma \frac{Mm}{r^2}; \quad \dot{p}_2 = 0. \quad (13)$$

Дин екуацииле (13) детерминэм  $r, \varphi, p_1, p_2$  ка функций де тимп. Дин ултима екуацие а системулуй (13) резултэ:

$$p_2 = C_1,$$

сау

$$r^2 \dot{\varphi} = C, \quad (14)$$

адикэ ам обцинут интеграла ариилор.

Дупэ ексклудеря импулсурилор  $p_1$  ши  $p_2$  дин прима ши а трея екуаций але системулуй (13) обцинем екуация диференциалэ ын рапорт нумай ку координата  $r$ .

Детерминынд  $r(t)$  дин (13) ши  $\varphi(t)$  дин (14), обцинем екуацииле чинематиче але мишкэрий пунктулуй. Алэтурынд ла (14) интеграла енержией  $\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \gamma \frac{Mm}{r} = h$ , ши елиминынд тимпул  $t$  дин ачесте интеграле, обцинем траектория пунктулуй  $r = f(\varphi)$  ын координателе поларе.

## § 8. ПРИНЦИПИУЛ ЛУЙ ХАМИЛТОН

Се нумеште *акциуне дупэ Хамилтон* мэримя динамикэ  $S$ , каре се експримэ прин функция луй Лагранж ын фелул урмэтор:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L = T + U = T - \Pi. \quad (1)$$

---

\*  $H = -(T + U) + p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 = -(T + U) + 2T = T - U$ .

Прин урмаре, мэрия  $S$  карактеризязэ релация динтре енер-  
 жия чинетикэ ши потенциалэ а системулуй ла мишкаря луй. Ал-  
 тэ релация резултэ дин лежя консервэрий енержией механиче  
 а системулуй консерватив:

$$T + P = h.$$

Дименсиуна акциуний есте егалэ ку дименсиуна продусулуй  
 динтре лукрул механик ши тимп. Мэрия  $L$  депинде де  $q_1$  ши

$\dot{q}_1$ , каре ла мишкаря системулуй сынт функций де тимп, прин  
 урмаре, мэрия  $S$  депинде ну нумай де интервалул де тимп  
 $t_1 - t_0$ , чи ши де карактерул функциилор  $q_1$  ши  $\dot{q}_1$ , адикэ де  
 карактерул мишкэрий системулуй.

Концинутул принципулуй луй Хамилтон есте урмэторул: функ-  
 цииле  $q_1$  ши  $\dot{q}_1$ , каре сатисфик екуацииле луй Лагранж, адикэ  
 каре експримэ мишкаря адевэратэ а системулуй суб акциуна  
 форцелор консидерате, сатисфак ын ачелаш тимп ши конди-  
 цииле нечесаре пентру ка валоаря акциуний дупэ Хамилтон  
 сэ фие екстремалэ (максималэ сау минималэ) ын компарация ку  
 валоаря акциуний ын тоате мишкэриле посибиле, каре транс-  
 ферэ системул дин позиция инициалэ а луй (пентру  $t = t_0$ ) ын  
 позиция финалэ ( $t = t_1$ ).

Сэ демонстрэм амэнунцит афирмация де май сус ын казул  
 системулуй ку ун сингур град де либертате. Сэ консидерэм  
 функция  $q^* = q + \alpha \eta(t)$ , каре карактеризязэ о мишкаре вечинэ  
 посибилэ оарекаре а системулуй. Вом нота функция луй Лаг-  
 ранж ын ачастэ мишкаре ку  $L^*$ , кондицииле инициале пентру  
 координате фиинд ачеляшь  $q^*_0 = q_0$ ,  $\dot{q}^*_1 = \dot{q}_1$ ; терменул  $\alpha \eta(t)$   
 презентэ вариация  $\delta q$  а функцией  $q$ . Функция  $\eta(t)$  есте о функ-  
 цие арбитрарэ финитэ, егалэ ку zero ла маржиниле интервалу-  
 луй ( $t_0$ ,  $t_1$ ). Валоаря  $\alpha = 0$  кореспунде мишкэрий адевэрате а  
 системулуй. Валориле мичь але мэрий  $\alpha$  кореспунд мишкэри-  
 лор вечине апропияте. Прин урмаре, акциуна  $S$ , калкулатэ  
 пентру диферите мишкэрь есте функция де параметрул  $\alpha$  пентру  
 интервалул консидерат де тимп  $t_1 - t_0$ :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L [q + \alpha \eta(t), \dot{q} + \alpha \dot{\eta}(t)] dt.$$

Сэ демонстрэм, кэ пентру  $q$  ши  $\dot{q}$ , каре сатисфак екуация  
 луй Лагранж, адикэ пентру  $\alpha = 0$ , деривата луй  
 $S$  ын рапорт ку  $\alpha$  есте нулэ, адикэ валоаря акциуний  
 $S$  кынд  $\alpha = 0$  поате атинже сау максимум сау минимум ын  
 компарация ку тоате мишкэриле апропияте пентру алте валорь  
 але луй  $\alpha$ , диферите де zero, дар мичь.

Сэ калкулэм  $\frac{dS}{d\alpha}$  дупэ регула деривэрий интегралей дефините

ын рапорт ку  $\alpha$  (ку лимителе интегрэрий индепенденте де  $\alpha$ ).  
 Ын ачест каз

$$S'(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial [q + \alpha \dot{\eta}(t)]} \frac{\partial [q + \alpha \dot{\eta}(t)]}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial [\dot{q} + \alpha \dot{\eta}(t)]} \times \right. \\
\left. \times \frac{\partial [\dot{q} + \alpha \dot{\eta}(t)]}{\partial \alpha} \right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial [q + \alpha \dot{\eta}(t)]} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial [\dot{q} + \alpha \dot{\eta}(t)]} \times \dot{\eta}(t) \right\} dt.$$

Сэ калкулэм  $S'(0)$ , консидерынд песте тот суб семнул интегралей  $\alpha = 0$ :

$$S'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t) \right\} dt. \quad (2)$$

Сэ трансформэм терменул ал дойля де суб семнул интегралей, фолосинд релация

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right] = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t).$$

де унде

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta}(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right] - \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (3)$$

Субституиунд (3) ын интеграла дин (2), обцинем

$$S'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \eta(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right] dt \quad (4)$$

сау

$$S'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \eta(t) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (5)$$

Ын конформитате ку кондиция де май сус пентру  $t=t_1$  ши  $t=t_0$  функция  $\eta(t)$  есте нулэ (тоате мишкэриле, че се компарэ, ау капете комуне, адикэ атыт конфигурация инициалэ а системулуй меканик консидерат, кыт ши конфигурация финалэ сынт комуне пентру тоате мишкэриле). Прин урмаре, терменул ал дойля дин (5) есте егал ку зеро. Дар ын мишкаря реалэ, консидератэ конвенционал пентру  $\alpha=0$ , функцииле  $q$  ши  $\dot{q}$  сатисфак екуация луй Лагранж

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

деч, ши интеграла дин (5) есте нулэ, адикэ  $S'(0)=0$ . Есте жустэ ши афирмация речипрокэ:  $S'(0)=0$  пентру орьче функции  $\eta(t)$  атунч, кынд факторул де суб семнул интегралей де пе лын-

гэ  $\eta(t)$  есте де асеменя егал ку зеро. Пентру а детермина, че валoare екстремалэ обцине  $S$  — максималэ сау минималэ сау ын женерал нич уна, нич алта (чея че е посибил пентру  $S'(0) = 0$ ) есте нечесар сэ фолосим кондицииле суфициенте але екстремулуй функционалелор, адикэ а интегралелор, че депинд де линиеле, ын лунгул кэра елe се калкулязэ. Ачесте проблеме пот фи резолвате прин методеле калкулулуй вариационал, апликаря кэруя ын механикэ не дэ посибилитате сэ резолвэм, принтре алтеле, проблема калкулэрий траекториилор космиче оптимале, диферите проблеме оптимале ын аутоматикэ, економикэ ш. а. м. д.

## § 9. СИСТЕМЕ МЕКАНИЧЕ НЕОЛОНОМЕ

### Дедучеря екуациилор луй Апел

Адмитем, кэ системулуй механик, алкэтуит дин  $N$  пункте материале и с'ау импус, ын примул рынд,  $m$  легэтурь олономе, даторитэ кэра конфигурация жеометрике а системулуй се детерминэ де координателе женерализате  $q_1, q_2, \dots, q_n$  унде  $n = 3N - m$ .

Ку алте кувинте, координателе тутурор пунктелор системулуй, прин урмаре, ши разеле вектоаре але лор, се експримэ ын-тр'ун мод анумит прин ачесте координате женерализате ши тимп, дакэ легэтуриле сынт реономе:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (1)$$

Депласэриле реале ши виртуале але пунктелор системулуй се експримэ де асеменя прин координателе женерализате, диференциалеле ши вариацииле лор дупэ формулеле

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt \quad (2)$$

ши

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2')$$

Адмитем, кэ системулуй и с'ау импус суплиментар легэтурь неолономе, линиаре фацэ де витезеле женерализате, каре се експримэ прин екуацииле легэтурилор де форма

$$\sum_{i=1}^n a_{pi} \dot{q}_i + a_p = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, l), \quad (3)$$

нумэрул екуациилор финнд егал ку  $l$ .



Екуацииле легэтурилор фацэ де компонентеле депласэрилор реале сынт

$$\sum_{i=1}^n a_{pi} dq_i + a_p dt = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, l). \quad (4)$$

Кондицииле, импуге вариацилор координателор  $\delta q_i$ , капэтэ форма

$$\sum_{i=1}^n a_{pi} \delta q_i = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, l). \quad (5)$$

Прин урмаре,  $n$  диференциале  $dq_i$  ши  $n$  вариаций  $\delta q_i$  сынт легате ынтре еле прин  $l$  кондиций (линиаре). Ачаста ынсямнэ, кэ нумэрул вариацилор индепенденте але координателор жене-рализате есте  $p = n - l$ . Диференциалеле сау вариацииле депенденте пот фи експримате прин  $p = n - l$  диференциале сау вариаций индепенденте:

$$dq_h = \sum_{\alpha=1}^p b_{h\alpha} dq_\alpha + b_h dt, \quad (6)$$

де асемения

$$\delta q_h = \sum_{\alpha=1}^p b_{h\alpha} \delta q_\alpha \quad (h = p+1, p+2, \dots, p+l = n) \quad (6')$$

Прин урмаре, диференциалеле ши вариацииле се ымпарт ын доуэ класе: индепенденте  $dq_\alpha$ ,  $\delta q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ) ши депенденте  $dq_h$ ,  $\delta q_h$  ( $h = p+1, p+2, \dots, n$ ). Координателе жене-рализате  $q_i$  ле вом нуми респектив координате индепенденте  $q_\alpha$  ши координате депенденте  $q_h$ .

Субституинд ын (2) ши (2') експресииле диференциалелор ши вариацилор координателор жене-рализате депенденте, вом обцине  $d\bar{r}_j$  ши  $\delta\bar{r}_j$  експримате прин диференциалеле  $dq_\alpha$  ши вариацииле  $\delta q_\alpha$  але координателор жене-рализате индепенденте. Ачесте експресий фиинд функций линиаре фацэ де диференциале ши вариаций ку ниште коефициенць, че сынт функций де тоате  $q_i$  ши  $t$ :

$$d\bar{r}_k = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_h} \left( \sum_{\alpha=1}^p b_{h\alpha} dq_\alpha + b_h dt \right) + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt$$

сау

$$d\bar{r}_k = \sum_{\alpha=1}^p \left\{ \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_\alpha} + \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_h} b_{h\alpha} \right\} dq_\alpha + \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_h} b_h dt + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt.$$

Нотынд

$$\bar{A}_{k\alpha} = \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_h} b_{h\alpha} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_\alpha} \text{ ши } \bar{A}_k = \sum_{h=p+1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_h} b_h + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}, \quad (6'')$$

авем

$$d\bar{r}_k = \sum_{\alpha=1}^p \bar{A}_{k\alpha} dq_{\alpha} + \bar{A}_k dt \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

ши аналог

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{\alpha=1}^p \bar{A}_{k\alpha} \delta q_{\alpha}. \quad (7')$$

Пентру а дедуче екуацииле мишкэрий системулуй механик ку легэтурь неолономе апликэм екуация жэнералэ а динамичий, каре експримэ принципиул луй Даламбер—Лагранж (ын казул де фацэ ачаста есте дестул де конвенацил). Ачастэ екуациие арэ форма (легэтуриле се консидерэ идеале)

$$\sum_{k=1}^N (-m_k \ddot{\bar{r}}_k + \bar{F}_k) \delta\bar{r}_k = 0. \quad (8)$$

Ынлокуинд  $\delta\bar{r}_k$  дин (8) прин експрессия са дин (7') ши ынтро-дукуинд факторий ку индичеле  $k$  суб семнул сумей дупэ  $\alpha$ , об-цинем

$$\sum_{k=1}^N \left\{ - \sum_{\alpha=1}^p m_k \ddot{\bar{r}}_k \bar{A}_{k\alpha} \delta q_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^p \bar{F}_k \bar{A}_{k\alpha} \delta q_{\alpha} \right\} = 0.$$

Скимбынд ординя сумэрий дупэ  $\alpha$  ши  $k$ , авем

$$\sum_{k=1}^p \left\{ - \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\bar{r}}_k \bar{A}_{k\alpha} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \bar{A}_{k\alpha} \right\} \delta q_{\alpha} = 0. \quad (9)$$

Сэ ымпэрцим ла  $dt$  амбеле пэрць але екуацией (7)

$$\dot{\bar{r}}_k = \sum_{\alpha=1}^p \bar{A}_{k\alpha} \dot{q}_{\alpha} + \bar{A}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9')$$

Деривэм амбеле пэрць але ачестей екуаций ын рапорт ку тимпул  $t$ ; авынд ын ведере, кэ  $\bar{A}_{k\alpha} = \bar{A}_{k\alpha}(q_i, t)$ , обцинем

$$\ddot{\bar{r}}_k = \sum_{\alpha=1}^p \bar{A}_{k\alpha} \ddot{q}_{\alpha} + \bar{R}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

унде функция векториалэ  $\bar{R}$  ну концине деривателе секунде але координателор жэнерализате ын рапорт ку тимпул.

Дин фиекаре екуациие (10) резултэ

$$\frac{\partial \ddot{\bar{r}}_k}{\partial \ddot{q}_{\alpha}} = \bar{A}_{k\alpha}. \quad (11)$$

Субституинд (11) ын (9), обцинем екуация урмэтоаре

$$\sum_{k=1}^p \left\{ - \sum_{k=1}^N m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \ddot{\bar{r}}_k}{\partial \ddot{q}_{\alpha}} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \bar{A}_{k\alpha} \right\} \delta q_{\alpha} = 0. \quad (12)$$

Сэ консидерэм функция луй Апел, пе каре о вом нота прин  $S$  ши каре есте егалэ ку семисума продуселор маселор пунктелор системулуй прин патрателе акчелерациилор лор. Патратул фиенкэрей акчелераций поате фи репрезентат ка продусул скалар ал векторулуй акчелерацией прин сине ынсушь (патратул склар ал акчелераций), адикэ

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\bar{a}_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k (\ddot{r}_k)^2. \quad (13)$$

Вом нуми енержіе а акчелерациилор функция луй Апел, прин аналожіе ку енержія чинетикэ а системулуй де пункте materiale. Ын конформитате ку (10) енержія акчелерациилор концине ын экспресия са  $\ddot{q}_\alpha, q_\alpha, \dot{q}_\alpha, q_h, \dot{q}_h, t$ . Есте евидент, кэ прима сумэ интериорэ дин парантезеле фигурате але экспресией (12) есте ну алтчева декыт деривата парциалэ а функцией  $S$  ын рапорт ку  $\ddot{q}_\alpha$ , калкулатэ дупэ регула деривэрий функциилор компусе де май мулте аргументе:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{r}_k \frac{\partial \ddot{r}_k}{\partial \ddot{q}_\alpha}. \quad (14)$$

А доуа сумэ интериорэ дин екуация (12) о вом нуми форцэ жгенерализатэ, каре кореспунде координатей индипенденте консидерате  $q_\alpha$ . Даторитэ екзистенцей легэтурилор неолономе фиече форцэ жгенерализатэ  $Q_\alpha$  се експримэ май компликат декыт ын казул системелор олономе, адикэ

$$Q_\alpha = \sum_{k=1}^N \bar{F} \bar{A}_{k\alpha}. \quad (15)$$

Ын фавоаря екуациилор (14) ши (15) екуация жгенералэ (12) а динамичий системулуй ку легэтурь неолономе се ва експрима прин енержія акчелерациилор ын фелул урмэтор:

$$\sum_{\alpha=1}^p \left\{ -\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha} + Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha = 0. \quad (16)$$

Мэримиле  $\delta q_\alpha$ —вариацииле координателор индипенденте, сынт индипенденте ынтре еле, прин урмаре, екуация (16) се редуче ла  $p$  екуаций сепарате (пе база рационаментелор, аналожиче челора, каре с'ау фэкут ла дедучеря екуациилор луй Лагранж де специа а доуа)

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, p). \quad (17)$$

Екуацииле (17) сынт токмай екуацииле класиче але мишкэрий системулуй ку легэтурь неолономе линиаре, екуаций, дедусе де кэтре Апел.

Адэугынд ла (17) екуацииле легэтурилор (3), обцинем системул комплект де екуаций дифференциале, нечесаре пентру детерминаря тутурор координателор жєнерализате ын функции де тимпул  $t$ , адикэ пентру детерминаря мишкэрий системулуй де пункте.

Пентру а калкула енержія акчелерациилор системулуй се поате аплика формула, аналожикэ формулей луй Кьониг пентру енержія чинетикэ а системулуй.

Дупэ кум реесе дин дедучере, екуацииле луй Апел пот фи апликате ши ын казул системелор ку легэтурь олономе. Ын казул системелор ку легэтурь идеале, реакциуниле ачестор легэтурь ну фигурызэ нич ын екуацииле луй Лагранж пентру системеле ку легэтурь олономе, нич ын екуацииле луй Апел але системелор ку легэтурь неолономе. Ынсэ десеорь ын диферите проблеме техниче есте нечесар сэ детерминэм реакциуниле легэтурилор. Пентру а ле детермина требуе сэ апликэм теоремеле жєнерале але динамичий системулуй, адикэ пе база ачестор теореме требуе алкэтуите екуацииле мишкэрий системулуй, ын каре се концин реакциуниле легэтурилор; субституинд ын ачесте екуаций координателе жєнерализате ын функции де тимп, обцинуте ла резолваря екуациилор луй Апел, детерминэм реакциуниле кэутате. Май жос сынт формулате екуацииле мишкэрий системулуй ку легэтурь неолономе, екуаций, каре пермит детерминаря ну нумай а мишкэрий системулуй, чи ши а реакциунилор легэтурилор.

#### Формула луй Кьониг пентру енержія акчелерациилор

Ла алкэтуиря експресией пентру енержія акчелерациилор поате фи апликатэ формула, аналожикэ формулей луй Кьониг пентру енержія чинетикэ, адикэ енержія акчелерациилор  $S$  а системулуй де пункте материале ын мишкаря абсолутэ а са (фацэ де ун систем де координате оарекаре фикс) поате фи презентатэ ка сума а дой термень  $S = S_c + S'$ . Вом нуми примул термен  $S_c$  енержіе а акчелерацией центрулуй маселор систе-

мулуй  $S_c = \frac{1}{2} M a_c^2$ . Терменул ал дойля  $S' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{a'_k}{2} \right)^2$ ,

унде  $a'_k$  есте акчелерация релативэ а пунктулуй  $k$  ал системулуй, репрезинтэ енержія акчелерациилор системулуй ын мишкаря луй релативэ фацэ де системул де координате мобил, каре ефектуызэ о мишкаре де трансляție, орижина кэруя се афлэ ын центрул маселор системулуй.

Екуацииле де ачест тип ау фост дедусе ын анул 1877 (Фер-ерс), май ынаинте декыт екуацииле де алт тип. Екуацииле ку факторь недетерминаць жоакэ ши акум ун рол импортант ын диферите проблеме практиче але теорией системелор неолономе, де екземплу, ла калкулул траекториилор оптимале але зборулуй.

Сэ пресупунем, кэ циньынд конт нумай де легэтуриле олономе позиция жеометрике а системулуй де  $N$  пункте материала се детерминэ де  $n$  координате жeneralизате  $q_i$ . Афарэ де ачаста вом пресупуне, кэ системулуй и с'ау импус де асеменя легэтурь неолономе (реономе), каре се репрезинтэ прин  $s$  екуаций диференциале:

$$A_{p1}\dot{q}_1 + A_{p2}\dot{q}_2 + A_{pn}\dot{q}_n + A_p = 0 \quad (p=1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

унде  $A_{pk}$  сынт функций нумай де  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ши  $t$ .

Вом пресупуне де асеменя, кэ легэтуриле сынт идеале. Форцеле активе, каре акцияныэ асупра системулуй, се консидерэ куноскуте. Се чере сэ детерминэм мишкаря системулуй, адикэ  $q_i$  ка функции де тимпул  $t$ .

Ла дедучеря екуациилор мишкэрий системулуй ку легэтурь неолономе вом аплика о алтэ методэ, опре деосебире де метода, апликацэ ла дедучеря екуациилор луй Апел.

Дакэ системул н'аре легэтурь неолономе, екуация жeneralэ а динамичий, каре експримэ принципиул луй Даламбер—Лагранж, калэцэ форма урмэтоаре:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0. \quad (2)$$

Дакэ легэтуриле неолономе липсеск ши тоате мэримиле  $\delta q_i$  сынт индепенденте, атунч дин екуация датэ се обцин екуацииле обишнуите але луй Лагранж де спеца а доуа пентру системеле олономе. Ынсэ ын казул де фацэ, кынд авем легэтуриле (1), каре пот фи експримате прин диференциале, обцинем:

$$A_{p1}dq_1 + A_{p2}dq_2 + \dots + A_{pn}dq_n + A_p dt = 0 \quad (p=1, 2, \dots, s); \quad (3)$$

депласэриле виртуале  $\delta q_i$ , ну май сынт индепенденте, сатисфэ-кынд кондицииле

$$A_{p1}\delta q_1 + A_{p2}\delta q_2 + \dots + A_{pn}\delta q_n = 0 \quad (p=1, 2, \dots, s) \quad (4)$$

(депласэриле виртуале се консидерэ ынтр'ун момент фиксат  $t$  ши пентру  $dt=0$ ).

Пентру а дедуче екуацииле мишкэрий динтр'о сингурэ екуацие (2), вом ынмулци фиекаре екуацие (4) ку ун фактор оарекаре  $(-\lambda_p)$  ( $p=1, 2, \dots, s$ ), каре есте о функции некуноскутэ де тимп. Дупэ ынмулцире адунэм тоате ачесте екуаций ку екуация (2).

Группынд термений ку ачелаш индиче  $p$ , вом обцине екуация:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{p=1}^s \lambda_p A_{pi} \right\} \delta q_i = 0. \quad (5)$$

Сэ прочедэм ын фелул урмэтор: вом алеже факторий некуноскуць ын аша фел, ка экспресииле дин  $s$  аколаде сэ девинэ егале ку zero, адикэ луэм  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  астфел, ынкыт сэ фие сатисфэкуте  $s$  екуаций

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{p=1}^s \lambda_p A_{pj} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (6)$$

Ын партя стынгэ а екуацией (5) вор рэмыне нумай  $n-s=p$  термень, каре концин нумай вариацииле индепенденте  $\delta q_{i+1}, \delta q_{i+2}, \dots, \delta q_n$ .

Даторитэ индепенденцей лор екуация (5) се дескомпуне ын  $p$  екуаций

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{i+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{i+k}} - Q_{i+k} - \sum_{p=1}^s \lambda_p A_{p, i+k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p). \quad (6')$$

Екуацииле (6) ымпреунэ ку екуацииле (6') алкэтуеск тот системул де екуаций але мишкэрий системулуй механик консидерат:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{p=1}^s \lambda_p A_{pi} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Алэтурын де екуацииле легэтурилор (1) ла системул (7), обцинем  $n+s$  екуаций пентру детерминаря тутурор  $n+s$  функций некуноскуте де тимп: координателе жэнерализате  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ши факторий недетерминаць  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ .

Есте евидент, кэ фиекаре термен суплиментар дин партя дряптэ а екуациилор (7) експримэ форца жэнерализатэ кондиционатэ де реакциуниле легэтурилор, адикэ одатэ ку детерминаря факторилор  $\lambda_p$  се детерминэ ши реакциуниле легэтурилор.

Се поате верифика ушор кэ легэтуриле сынт идеале: дакэ алкэтуим сума лукрурилор механиче але реакциунилор пе орьче депласаре виртуалэ  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ , каре сатисфаче легэтуриле—екуацииле (4), адикэ дакэ ынмулцим фиекаре сумэ

$\sum_{p=1}^n \lambda_p A_{pi}$  ку  $\delta q_i$  ши челе обцинуте ле адунэм, атунч ын конформитате ку (4) ачастэ сумэ а лукрурилор механиче есте егалэ ку зеро.

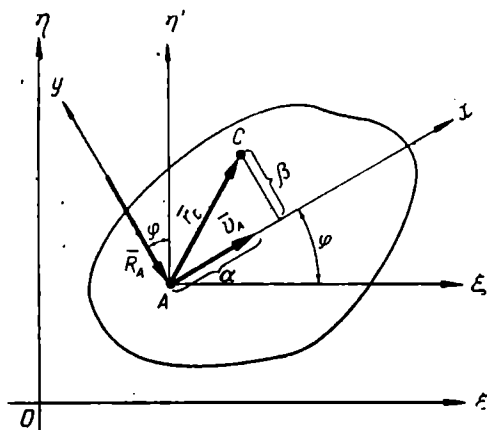
### Проблема луй Чаплыгин—Каратеодори

Сэ консидерэм ын калитате де апликаре а екуациилор луй Апел проблема мишкэрий план-паралеле неолономе, проблемэ формулатэ пентру прима датэ де кэтре С. А. Чаплыгин.

Ачастэ проблемэ а фост резолватэ ын каз женерал де кэтре Чаплыгин ын анул 1898. Ун каз партикулар, дар тотуш дестул де интересант ши де о маре импортацэ практикэ ал ачестей проблеме а фост черчетат мулт май тырziu (ын а. 1933) де кэтре савантул нямц К. Каратеодори (С. Caratheodory).

Концинутул проблемей есте урмэторул. Сэ пресупунем, кэ уней фигур, каре се мишкэ ын планул сэу, и с'а импус легэтура урмэтоаре: пунктул А ал фигурий интеракционязэ ку планул, пе каре се мишкэ фигура, прин интермедиул унуй аскуциш, каре се ынфиже ын планул фикс (фиг. 256). Ачест аскуциш, авынд о anumитэ дирекция, нупермите пунктулуй дат ал фигурий сэ се миште ын дирекция перпендикулярэ пе аскуциш. Вом пресупуне аскуцишул, ын сэ, атыт де скурт, ынкыт реакциуня легэтурий, адикэ форца, каре акционязэ дин партя планулуй асупра аскуцишулуй, поате фи консидератэ дрепт о форцэ концентратэ ын пунктул А. Ын тоате челеалате пункте але фигурий атинжеря ей ку планул фикс аре лок фэрэ фрекаре. Се чере сэ се детермине мишкаря фигурий.

Вом нота ку  $O\xi\eta$  системул де координате фикс. Вом луй орижиня системулуй де координате мобил ын пунктул А: вом ориента акса  $Ax$  ын лунгул аскуцишулуй. Ын калитате де координате женерализате але системулуй механик дат пот фи луате координателе  $(\xi, \eta)$  але пунктулуй А ши унгул  $\varphi$  динтре акса мобилэ  $Ax$  ши акса фиксэ  $O\xi$ . Легэтура кинематикэ, импурсэ системулуй, констэ ын ачея, кэ витеза пунктулуй А ын-тотдяуна есте ориентатэ де-а лунгул аксей мобиле  $x$ , адикэ



Фиг. 256.

$v_{Ay}=0$ . Сэ экспримэм ачастэ легэтурэ прин координателе жене-  
рализате. Проекцииле витезей пунктулуй  $A$  пе акселе де  
координате фиксе сынт

$$v_{A\xi}=\dot{\xi}, \quad v_{A\eta}=\dot{\eta};$$

ын ачест каз

$$v_{Ay}=-v_{A\xi} \sin \varphi + v_{A\eta} \cos \varphi = -\dot{\xi} \sin \varphi + \dot{\eta} \cos \varphi.$$

Екуация легэтурий есте

$$-\dot{\xi} \sin \varphi + \dot{\eta} \cos \varphi = 0$$

сау

$$\dot{\eta} = \dot{\xi} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Есте евидент, кэ легэтура есте неолономэ, деоарече екуация  
(1) есте неинтеграбилэ. Сэ нотэм ку  $(\alpha, \beta)$  координателе цент-  
рулуй де греутате  $C$  ал фигурий ын системул де координате мобил  
 $Axy$  легат ку фигура, адикэ каре се роташте ымпреунэ ку еа  
(фиг. 256). Сэ пресупунем, кэ  $\beta=0$ , адикэ центрул де греутате  
есте ситуат пе дряпта  $Ax$ , ын лунгул кэрея есте ориентат аску-  
цишул, прин урмаре, дирекция витезей пунктулуй ку аскуциш  
 $A$  трече ынтоддяуна прин центрул де греутате ал корпусулуй.

Ачастэ проблемэ жоакэ ун рол импортант ын техникэ. Май  
ынтыт, о аша мишкаре ефектуязэ сания ку тэлпиле скурте ши  
ку спринжине суплиментаре нетеде, каре се мишкэ пе гяцэ, кыт  
ши буерул. Путем индика де асемения мишкаря авионулуй пе о  
фьппине де гяцэ. Дакэ ынсэ ситуэм ын  $A$  о ротичикэ ку маржиня  
аскуцитэ, атулч екземплеле анализате пот фи апликате ку о оа-  
рекаре апроксимации ын конструкция де апарате ши ын мека-  
ника транспортулуй, ын партикулар ын теория аутомобилулуй.  
Ын сфыршит, унеле проблеме дин теория апарателор де збор  
(де екземплу, проблема деопре урмэрире) се резолвэ прин ме-  
тоде асемэнэтоаре ынтр'о мэсурэ оарекаре.

Сэ алкэтуим експресиия енержийей акчелерациилор систему-  
луй фэрэ а цине конт де легэтура (1). Апликынд формула луй  
Кьониг, обцинем.

$$S = \frac{1}{2} M a_C^2 + S', \quad (2)$$

унде  $\bar{a}_C$  есте акчелерация центрулуй маселор, яр функция  $S'$   
репрезинтэ енержия акчелерациилор системулуй ын мишкаря  
релятивэ а са фацэ де системул де координате мобил, каре аре  
орижиня ын центрул маселор ши ефектуязэ о мишкаре де  
транслации (де екземплу, аша ка акселе  $A\xi'\eta'$  сэ рэмынэ пара-  
леле ку акселе фиксе  $\xi, \eta$ ). Векторул  $\bar{a}_C$  поате фи експримат



прин акчелерация пунктулуй  $A$ , апликынд формула луй Ривалс  
ла мишкаря план-паралелэ

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C - \bar{r}_C \omega^2, \quad (3)$$

унде  $\bar{\varepsilon}$  есте акчелерация унгюларэ,

$\bar{\omega}$  — витеза унгюларэ а фигурий,

$\bar{r}_C$  — векторул  $\overline{AC}$ .

Сэ експримэм {векторул  $\bar{r}_C$  прин версорий  $\bar{i}$  ши  $\bar{j}$  ай систе-  
мулуй де координате мобил ши прин версорий  $i_1, j_1$  ай систему-  
луй фикс

$$\bar{r}_C = a\bar{i}; \quad \bar{r}_C = \xi_C \bar{i}_1 + \eta_C \bar{j}_1,$$

дар

$$\xi_C = a \cos \varphi; \quad \eta_C = a \sin \varphi,$$

прин урмаре

$$\bar{r}_C = a \cos \varphi \bar{i}_1 + a \sin \varphi \bar{j}_1. \quad (4)$$

Вом нота ку  $\bar{k}_1$  версорул, перпендикулар пе планул мишкэ-  
рий. Ын ачест каз

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k}_1, \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \bar{k}_1.$$

Апой

$$\bar{a}_A = \ddot{\xi} \bar{i}_1 + \ddot{\eta} \bar{j}_1. \quad (5)$$

Сэ алкэтуим продусул векториал

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_C = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \ddot{\varphi} \\ a \cos \varphi & a \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Проектынд (3) пе акселе системулуй де координате фикс ши  
фолосинд егалитэциле (4), (5) ши (6), обцинем

$$a_{C\xi} = \ddot{\xi} - a \sin \varphi \ddot{\varphi} - a \cos \varphi \dot{\varphi}^2; \quad a_{C\eta} = \ddot{\eta} + a \cos \varphi \ddot{\varphi} - a \sin \varphi \dot{\varphi}^2. \quad (7)$$

Тот одатэ  $a_C^2 = a_{C\xi}^2 + a_{C\eta}^2$ . Пентру а детермина енержія ак-  
челерациилор ын мишкаря релативэ фацэ де центрул маселор  $C$   
сэ калкулэм май ынтый акчелерация унуй пункт оарекаре  $B_k$   
ал фигурий ын мишкаря са де ротацие ын журул пунктулуй  $C$ .  
Ын ачест каз

$$\bar{a}_{B_k C} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}'_k - \omega^2 \bar{r}'_k, \quad (8)$$

унде  $\bar{r}'_k$  есте раза вектоаре а пунктулуй  $B_k$  дусэ дин пункт  $C$ .

Патратул акчелерацией релативе а ачестуй пункт есте

$$a_{B_k C}^2 = r_k'^2 \ddot{\varphi}^2 = r_k'^2 \dot{\varphi}^4.$$

Атунч

$$S' = \frac{1}{2} \ddot{\varphi}^2 \sum m_k r_k'^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^4 \sum \dot{m}_k r_k'^2.$$

Ынсэ  $\sum m_k r_k'^2 = J_C$  есте моментул де инерции ал фигурий ын рапорт ку чентрул маселор. Прин урмаре,

$$S' = \frac{1}{2} J_C \ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^4. \quad (9)$$

Сэ експримэм  $J_C$  прин раза де инерции  $k$  а фигурий фазэ де  $C$

$$J_C = M k^2.$$

Ын ачест каз

$$S' = \frac{1}{2} M k^2 (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4), \quad (9')$$

унде  $M$  есте маса корпулуй.

Пентру а алкэтуи екуацииле луй Апел есте нечесар сэ експримэм тоате деривателе секунде але координателор депенденте прин деривателе секунде але координателор индепенденте. Вом консидера, кэ  $\eta$  есте координата жэнерализатэ депендентэ, яр  $\xi$  ши  $\varphi$  сынт координате индепенденте. Деривынд екуация легэтурий (1) ын рапорт ку тимпул, обцинем

$$\ddot{\eta} = \ddot{\xi} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\dot{\xi} \dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi}, \quad (10)$$

Сэ субституим (10) ын а доуа екуацие (7). Апой сэ алкэтуим енержия интегралэ а акчелерациилор системулуй, цинынд конт де (7), (9), (10)

$$S = \frac{1}{2} M (a_{C\xi}^2 + a_{C\eta}^2) + S'. \quad (11)$$

Вом евиденция термений, каре концин експлицит функцииле  $\xi$ ,  $\varphi$ . Обцинем дефинитив урмэтоаря експресиe а енержией акчелерациилор дупэ Апел (експресиe есте трансформатэ, цинынд конт де екуация легэтурий):

$$S = \frac{M}{2 \cos^2 \varphi} (\ddot{\xi}^2 + n^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi}^2 - 2 \alpha \ddot{\xi} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 2 \ddot{\xi} \dot{\xi} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi + 2 \alpha \ddot{\varphi} \dot{\xi} \dot{\varphi} \cos \varphi) + S^*, \quad (12)$$

унде  $S^*$  ну концине деривателе секунде ( $\xi$ ,  $\varphi$ ), яр

$$n^2 = \alpha^2 + k^2. \quad (13)$$

Сэ консидерэм чел май симплу каз ал мишкэрий фигурий пе планул оризонтал, ануме казул, кынд липсеск форцеле ексте-

риоре, афарэ де форца де греутате, каре есте екилибратэ де реакциуня нормалэ а планулуй нетед (реакциуня оризонталэ я наштере нумай ын пунктул де контакт ал планулуй ку аскуцишул). Ачастэ реакциуне а легэтурий детерминэ карактерул мишкэрий фигурий, каре депинде ынкэ де кондицииле инициале але мишкэрий, адикэ де валориле инициале але координателор ши витезей пунктулуй  $A$ , а унгулуй  $\varphi_0$  ши витезей унгуларе  $\dot{\varphi}_0$ . Сэ ремаркэм, кэ легэтура, импусэ системулуй дат, есте о легэтурэ идеалэ, деоарече орьче депласаре виртуалэ а пунктулуй де апликаре а реакциуний легэтурий  $\bar{R}_A$  есте перпендикулярэ пе реакциуне ши лукрул механик элементар ал реакциуний легэтурий пе депласаря виртуалэ есте егал ку зеро ( $\bar{R}_A$  есте ынтодьяуна перпендикулярэ пе  $\bar{v}_A$ ).

Сэ алкэтуим екуацииле мишкэрий. Ын казул де фацэ екуацииле луй Апел ау аспект

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0,$$

деоарече фиекаре форцэ женерализатэ есте нулэ дин кауза липсей форцелор мотоаре екстериоре, яр легэтура есте идеалэ. Калкулынд деривателе парциале але функцией  $S$  ын рапорт ку  $\xi$  ши  $\varphi$  алкэтуим урмэтоареле екуаций динамиче але мишкэрий:

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \alpha \dot{\varphi}^2 \cos \varphi = 0; \quad n^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + \alpha \cos \varphi \dot{\xi} \dot{\varphi} = 0. \quad (14)$$

Ачест систем аре о интегралэ примэ—интеграла енержией

$$T = \text{const} = h, \quad (15)$$

унде  $T$  есте енергия чинетикэ а системулуй.

Ын казул де фацэ енергия потенциалэ есте константэ идентик. Константа  $h$  поате фи детерминатэ дин кондицииле инициале. Сэ репрезентэм интеграла (15) ын формэ десфэшуратэ, детерминиынд ын ачест скоп експресия енержией чинетиче а системулуй план мобил. Апликынд теорема луй Кьониг реферитоаре ла енергия чинетикэ, обцинем

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \quad (16)$$

Авем

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_C$$

сау

$$\bar{v}_C = \dot{\xi} \bar{i}_1 + \dot{\eta} \bar{j}_1 + \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \alpha \cos \varphi & \alpha \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}. \quad (16')$$

Де унде

$$v_{C\xi} = \dot{\xi} - a \sin \varphi \dot{\varphi}; \quad v_{C\eta} = \dot{\eta} + a \cos \varphi \dot{\varphi},$$

прин урмаре,

$$T = \frac{1}{2} M \{ [\dot{\xi} - a \sin \varphi \dot{\varphi}]^2 + [\dot{\eta} + a \cos \varphi \dot{\varphi}]^2 + k^2 \dot{\varphi}^2 \}. \quad (17)$$

Цинынд конт де екуация легэтурий  $\dot{\eta} = \dot{\xi} \operatorname{tg} \varphi$  ши ынтроуду-кынд  $\frac{1}{2}$  ын константа  $h$ , консидерынд де асеменя  $h = \frac{1}{2} M h_0^2$  ши ефектуынд тоате калкулеле дин (17), путем презента интеграла энержией суб форма урмэтоарей екуаций дифференциале де ординул ынтый:

$$\dot{\xi}^2 + n^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - h_0^2 \cos^2 \varphi = 0. \quad (18)$$

Пресупунынд, кэ  $\cos \varphi \neq 0$ , дин екуация а доуа (14) дупэ симплификаря прин  $\cos \varphi$ , обцинем

$$(a^2 + k^2) \cos \varphi \ddot{\varphi} + a \dot{\varphi} \dot{\xi} = 0. \quad (19)$$

Сэ экспримэм  $\dot{\xi}$  дин екуация (18):

$$\dot{\xi} = \pm \sqrt{h_0^2 - (a^2 + k^2) \dot{\varphi}^2} \cos \varphi. \quad (20)$$

Субституинд (20) ын (19) ши симплификынд экспресия обцинутэ, авем

$$(a^2 + k^2) \ddot{\varphi} \pm a \sqrt{h_0^2 - (a^2 + k^2) \dot{\varphi}^2} = 0. \quad (21)$$

Вом пресупуне, кэ кондицииле инициале пермит сэ студиём мишкаря, каре кореспунде семнулуй плус ын фаца рэдэчиний. Сэ нотэм витеза унгуларэ  $\omega = \dot{\varphi}$  ши

$$a^2 + k^2 = n^2.$$

Атунч екуация (21) капэтэ форма

$$- \frac{n^2 d\omega}{\sqrt{h_0^2 - n^2 \omega^2}} = a d\varphi. \quad (22)$$

Интегрынд (22), обцинем ынкэ о интегралэ а екуацилор мишкэрий — релация динтре витеза унгуларэ  $\omega$  ши унгул  $\varphi$ :

$$n \arccos \frac{n}{h_0} \omega = a\varphi + C, \quad (23)$$

унде

$$C = n \arccos \frac{n}{h_0} \omega_0 - a\varphi_0.$$

Апой дин (23) авем

$$\frac{n}{h_0} \omega = \cos \frac{C + \alpha \varphi}{n},$$

де унде

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h_0}{n} \cos \frac{C + \alpha \varphi}{n}. \quad (23')$$

Сепарэм вариабилеле ын екуация (23') ши обцинем

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \frac{C + \alpha \varphi}{n}} = \frac{h_0}{n} t + C'_1.$$

Де унде, нотынд

$$\frac{C'_1}{n} = \frac{1}{2} C_1, \quad \frac{\alpha h_0}{n^2} = \frac{1}{2} C_2$$

ши ефектуынд куадратура обцинем

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \frac{C + \alpha \varphi}{n}}{1 - \sin \frac{C + \alpha \varphi}{n}} = C_2 t + C_1. \quad (24)$$

Трекынд де ла логаритмий натураль ла нумере ши резол-  
вынд апой екуация фацэ де  $\sin \frac{C + \alpha \varphi}{n}$ , обцинем прима екуацие  
чинематикэ а мишкэрий — депенденца координатей  $\varphi$  де тимп

$$\sin \frac{C + \alpha \varphi}{n} = \frac{e^{C_2 t + C_1} - e^{-(C_2 t + C_1)}}{e^{C_2 t + C_1} + e^{-(C_2 t + C_1)}}$$

сау

$$\sin \frac{C + \alpha \varphi}{n} = \text{th} (C_2 t + C_1). \quad (25)$$

Пентру а детермина алте доуэ координате жєнерализате  $\xi$   
ши  $\eta$  ка функций де тимп, адикэ пентру а афла екуация тра-  
екторией пунктулуй ку аскуциш А ал фигурий афлэм май ын-  
тый дин (25)

$$\cos \frac{C + \alpha \varphi}{n} = \frac{1}{\text{ch} (C_2 t + C_1)}. \quad (26)$$

Апой требуе сэ деривэм (26) ын рапорт ку тимпул. Дин (23'),  
(25), (26) ши (20) детерминэм  $\dot{\xi}(t) = \Phi(t)$  ка функции де тимп,  
де унде

$$\xi = \int \Phi(t) dt + C_3.$$

Дин екуация легэтурий неолономе афлэм  $\dot{\eta} = f(t)$  ши  $\eta =$   
 $= \int f(t) dt + C_4.$

Пентру валориле партикуларе  $\omega_0$  ши  $\varphi_0$ , пентру каре  $C = \frac{\alpha}{n} \varphi_0$  формула (25) капэтэ форма

$$\sin \frac{\alpha}{n} (\varphi_0 + \varphi) = \operatorname{th} (C_2 t + C_1),$$

унде

$$\frac{\alpha}{n} := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}.$$

Ын казул жєнерал ал проблемей луй Каратеодори, кынд  $\alpha \neq 0$  ши  $\beta \neq 0$ , партя де ротацие а мишкэрий, адикэ мэримиле  $\omega$ ,  $\varphi$ , е ну депинд де координата  $\beta$ . Ын алт каз партикулар, кынд  $\alpha = 0$ , ши  $\beta \neq 0$ , центрул де греутате се афлэ пе дряпта, перпендикуларэ пе дирекция аскуцишулуй (сау а ротицей аскуците), яр витеза пунктулуй ку аскуциш (сау а центрулуй ротицей) есте ынтотдяуна ындрепатэ перпендикулар пе дряпта, каре унеште пунктул ачеста ку центрул де греутате. Ачест каз а фост анализат пынэ ла сфыршит де кэтре С. А. Чаплыгин.

Ачест каз партикулар се ынтылнэште ын кытева апарате, де екземплу, ын планиметреле пентру калкуларя ариилор.

Ын сфыршит, есте посибил ши ун аша каз, кынд маса ынтрегулуй систем есте репартизатэ атыт де апроапе де центрул маселор, ынкыт моментул де инерции ын рапорт ку центрул маселор поате фи неглижат. Атунч центрул маселор се ва мишка ректилину, яр траектория пунктулуй ку аскуциш ва фи трактрича, асимптота кэрея есте траектория центрулуй маселор.

#### Мишкаря унуй вагонет пе ун друм ректилину

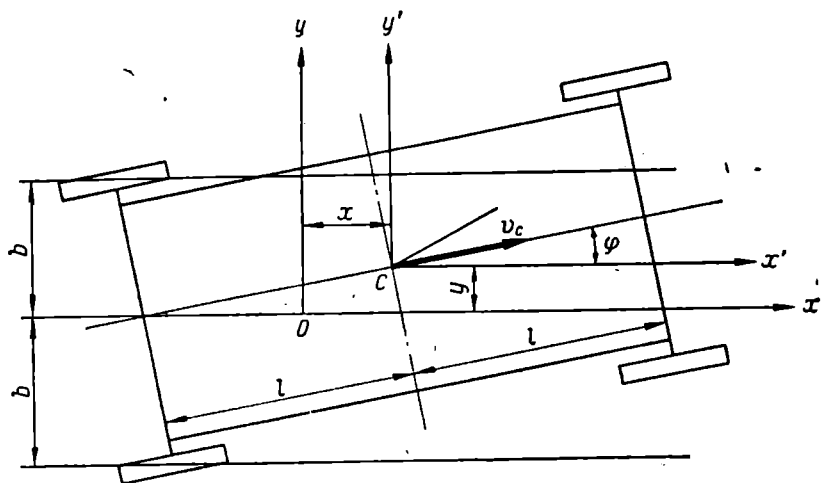
Легэтура неолономэ, дин проблема луй Каратеодори деспре мишкаря санией, се ынтылнэште ши ын проблема мишкэрий вагонетулуй ку доуэ осий, кяр ши пе друмул ректилину. Даторитэ фаптулуй, кэ унгюл ынклинэрий супрафешей кониче а ротицелор фацэ де супрафаца планэ атинже валорь де апроксиматив  $\arctg (0,05)$ , прекум ши даторитэ витезей дестул де марь ши а алтор факторь, вагонетул ефектуязэ депласэрь латерале дестул де мичь, осчилян. Пе фигура 257 есте репрезентатэ позиция вагонетулуй ынтр'ун момент оарекаре де тимп. Пресупунынд кэ вагонетул есте симетрик, вом луа дрепт координате жєнерализате але луй координателе  $x$ ,  $y$  але центрулуй де греутате ал вагонетулуй ши унгюл абатерий  $\varphi$  фацэ де центрул де греутате. Ын прима апроксимацияе путем неглижа депласэриле латерале либере, адикэ путем консидера, кэ координата  $y$  есте легатэ ку  $x$  ши  $\varphi$ . Есте евидент, кэ легэтура импуне кондиция ка векторул витезей центрулуй де греутате  $v_C$  сэ фие ситуат ын пла-

нул роцилор, адикэ суб унгул  $\varphi$  фацэ де планул вертикал, каре трече прин акса  $Ox$ . Алтфел

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Консидерынд унгул  $\varphi$  дестул де мик, обцинем урмэтоаря кондичие а легэтурий неолономе

$$\dot{y} - \dot{x}\varphi = 0. \quad (2)$$



Фиг. 257.

Сэ алкэтуим екуацииле мишкэрий каре концин факторий луй Лагранж (аич вом авя нумай ун сингур фактор  $\lambda$ , деорече авем о сингурэ екуацие а легэтурий). Сэ алкэтуим, ын примул рынд, експресия енержіей чинетиче а системулуй. Вом нота ку  $m_1$  маса фиекэрей перекь де роць, ку  $m_2$ —маса рамей вагонетулуй, ку  $J_1$ —моментул де инерции ал фиекэрей перекь де роць ын рапорт ку акса жеометрике, ку  $J_2$ —моментул де инерции ал перекий де роць ын рапорт ку акса вертикалэ трансверсалэ, ку  $J_3$ —моментул де инерции ал рамей вагонетулуй ын рапорт ку акса вертикалэ. (Ынклинаря латералэ ши осцилацииле вагонетулуй ын планул вертикал се неглижазэ.) Атунч енержія чинетикэ а вагонетулуй есте

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + C\dot{\varphi}^2)^*. \quad (3)$$

Форца жєнерализатэ  $Q_x = 0$  (мишкаря ын дирекция аксей  $x$  аре лок фэрэ алунекаре).

\*  $A = (2m_1 + m_2) + \frac{2J_1}{r^2}$ ;  $B = 2m_1 + m_2$ ;  $C = 2(J_2 + m_1 l^2) + J_3$ .

Дупэ формулеле теорией еластичитэций ын казул легэтурий дате челелалте форце жёнерализате сынт

$$Q_y = -4f \left( \frac{dy}{dx} - \varphi \right),$$

$$Q_\varphi = -4f \left( h^2 \frac{d\varphi}{dx} + \frac{bi}{r} y \right),$$

унде  $f$  есте аша нумитул коэффициент де алуэкаре еластикэ,

$i$  — коничитатя роцилор,

$2b$  ши  $2l$  — дименсиуниле линиаре: лэцимя ши лунжия вагонетулуй,  $h^2 = l^2 + b^2$ ,

$r$  — раза роцилор.

Ал дойля термен дин експресия форцей жёнерализате  $Q_\varphi$  поате фи неглижат даторитэ фаптулуй, кэ мэрия  $i$  у есте де-стул де микэ. Сэ ынмулцим екуация легэтурий ку  $\lambda$  ши сэ алэ-кэтуим екуацииле мишкэрий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x - \lambda \varphi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y + \lambda, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

сау

$$A\ddot{x} = -\lambda\varphi; \quad B\ddot{y} = \lambda; \quad C\ddot{\varphi} = -4f h^2 \frac{d\varphi}{dx}.$$

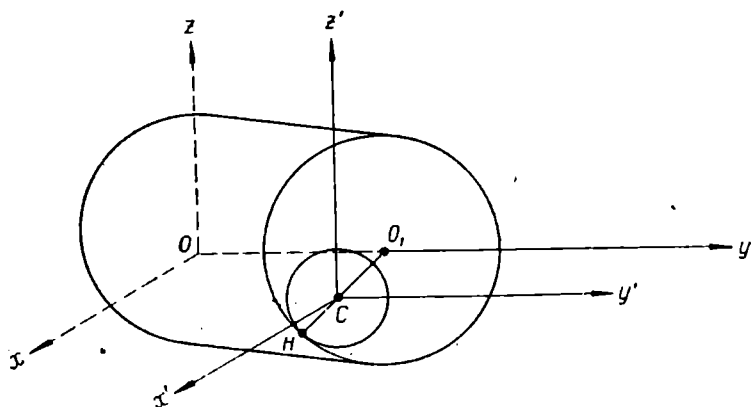
Ын фавоаря релацией (2)  $Q_y = 0$ ; екуацииле мишкэрий сынт нелиниаре [15].

### Мишкаря уней сфере ын интериорул унуй чилиндру

Сэ студием мишкаря (фэрэ алуэкаре) уней сфере де разэ  $R_2$  пе супрафаца интериорэ а унуй чилиндру де разэ  $R_1$  ( $R_2 < R_1$ ). Вом нота ку  $H$  пунктул де контакт ал сферей ку чилиндрул ын-тр'ун момент оарекаре (фиг. 258). Консидерэм мишкаря абсо-лутэ а сферей ын рапорт ку системул де координате  $Oxyz$ , ори-жия кэруя есте луатэ ынтр'ун пункт оарекаре  $O$  ал аксей чи-линдрулуй. Акса  $y$  есте ориентатэ дупэ акса чилиндрулуй. Сэ конструим де асеменя ун систем де координате  $Cx'y'z'$ , каре ефек-туяэ о мишкаре де трансляcie, авынд орижия ын центрул сферей  $C$ , акселе кэруя сынт паралеле ку акселе системулуй  $Oxyz$ . Атунч мишкаря сферей фацэ де системул  $Oxyz$  поате фи привитэ ка о мишкаре, компусэ дин мишкаря де трансляcie, ка-



рактеризатэ де мишкаря пунктулуй  $C$ , ши мишкаря де ротацие ын журул пунктулуй  $C$ .



Фиг. 258.

Аша дар, позиция жеометрике а сферей се детерминэ де шасе координате женерализате:  $x_C, y_C, z_C$  (координателе пунктулуй  $C$ ) ши  $\psi, \theta, \varphi$  — унгиуриле луй Ейлер фацэ де системул  $Cx'y'z'$ . Ынтрукыт сфера се мишкэ фэре алунекаре, витеза пунктулуй  $H$  ал ей есте егалэ ку zero:

$$\bar{v}_H = 0. \quad (1)$$

Сэ експримэм ачастэ витезэ дупэ формула луй Ейлер прин витеза пунктулуй  $C$  ши витеза унгиуларэ а мишкэрий де ротацие ын журул пунктулуй  $C$ :

$$\bar{v}_H = \bar{v}_C + (\bar{\omega} \times \overline{CH}). \quad (2)$$

Сэ репрезентэм

$$\bar{v}_C = \dot{x}_C \bar{i} + \dot{y}_C \bar{j} + \dot{z}_C \bar{k}, \quad (3)$$

унде  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  сынт версорий акселор системелор  $Oxyz$  ши  $Cx'y'z'$ .

Векторул  $\overline{CH}$  есте ындрептат дин центрул де греутате ал сферей ын пунктул де контакт  $H$  ал сферей ку чилиндрул Прин урмаре, ачест вектор есте ориентат дупэ нормала комун. а амбелор супрафеце, каре трече ши прин центрул сферей  $C$ , ши прин пунктул кореспунзэтор  $O_1$  де пе акса чилиндрului,

ши се афлэ деч, ын планул  $Cx'z'$ . Есте евидент, кэ векторул  $\overline{CH}$  есте колиниар ку векторул  $\overline{O_1C}$  ши

$$\overline{CH} = R_2 \frac{x_C \bar{i} + z_C \bar{k}}{R_1 - R_2}, \quad (4)$$

унде факторул де пе лынгэ  $R_2$  есте версорул векторулуй  $\overline{O_1C}$ . Сэ нотэм  $R_1 - R_2 = \delta$ . Сэ дедучем пе база релациилор (4) екуация легэтурий (2):

$$\bar{v}_C + \frac{R_2}{\delta} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_C & 0 & z_C \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

унде  $p_1, q_1, r_1$  сынт проекцииле витезей унгуларе инстантанеэ  $\omega$  пе акселе фиксе  $Cx'y'z'$ , фацэ де каре аре лок мишкаря де ротации а сферей. Луынд експрессиеле ачестор проекций дин чинематикэ ши проектын д амбеле пэрцэ але екуацией векториале (5) пе акселе системулуй  $Cx'y'z'$ , обцинем трей екуаций аналитиче але легэтурилор ( $\omega_{x1} \equiv p_1, \omega_{y1} \equiv q_1, \omega_{z1} \equiv r_1$ ):

$$\dot{x}_C + \frac{R_2}{\delta} q_1 z_C = 0, \quad \dot{y}_C + \frac{R_2}{\delta} (r_1 x_C - p_1 z_C) = 0,$$

$$\dot{z}_C + \frac{R_2}{\delta} (-q_1 x_C) = 0$$

сау, експримынд  $p_1, q_1, r_1$  прин унгуриле луй Ейлер

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_C + \frac{R_2}{\delta} (-\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi) z_C &= 0, \\ \dot{y}_C + \frac{R_2}{\delta} [(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) x_C - (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) z_C] &= 0, \\ \dot{z}_C + \frac{R_2}{\delta} (-\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi) x_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Дин прима ши а трея екуаций але системулуй (6) обцинем урмэоаря екуацие интеграбилэ а легэтурий олономе

$$\dot{x}_C x_C = -\dot{z}_C z_C,$$

де унде

$$x_C^2 + z_C^2 = \text{const} = \delta^2.$$

Прин урмаре, нумэрул координателор жеометриче але сферей есте ну шаце, чи чинч, ынсэ нумэрул граделор де либертате есте егал нумай ку трей, деоарече май авем ынкэ доуэ екуаций але легэтурилор неолономе, де екземплу, прима ши а доуа екуаций але системулуй (6).

Сэ консидерэм казул партикулар ал ачестей проблеме, кынд супрафаца чилиндрикэ се трансформэ ын супрафаца планэ ху.

Ын ачест каз есте комод сә луэм орижиня  $O$  а системулуй де координате фикс ын ачест план. Координателе пунктулуй де танженцә  $H$  ын системул  $Sx'y'z'$  сынт  $(0, 0, -R)$ , унде  $R$  есте раза сферей; екуацииле легәтурий неолономе капәтә форма

$$\dot{x}_c - q_1 R = 0, \quad \dot{y}_c + p_1 R = 0 \quad \text{ши} \quad \dot{z}_c = 0,$$

де унде

$$z_c = \text{const} = R,$$

Ачастә теорие поате фи апликатә ла черчетаря прочеселор, че ау лок ын рулменций ку биле. Студиинд о парте ну пря маре а мишкэрий фиекэрей биле путем консидера апроксиматив, кә сфера се афлэ пе супрафаца интериорә а унуй чилиндру скурт.

## ТЕОРИЯ ОСЦИЛАЦИЛОР

Осцилацииле жоакэ ун рол импортант ын техника модернэ, ын деосебь ын теория регулэрий аутомате. Ын ултимеле деченый теория осцилациилор а девенит о рамурэ дестул де вастэ а механикий, фолосинд ун аппарат математик дестул де компликат.

Сэ консидерэм диферите типурь де осцилаций але унуй пункт материал ши але унуй систем де пункте материале. Мишкаря пунктулуй материал се нумеште *осцилаторие*, дакэ ачест пункт се мишкэ ын сенсул директ ши опус, адикэ ел ефектуязэ мишкэрь директе ши инверсе. Осцилация се нумеште *периодикэ* атунч, кынд дупэ ун интервал оарекаре де тимп мишкаря се репетэ ын тотул. Се нумеште *периодадэ а осцилациилор* интервалул минимал де тимп, дупэ каре мишкаря се репетэ, адикэ интервалул, дупэ каре пунктул се реынтоарче ын ачеш позицие ку ачеш витезэ. Се ынтылнеськ ши аша казурь, кынд мишкаря пунктулуй аре ун карактер осцилатор, ынсэ ну се репетэ ынтокмай. Ын асеменя казурь се ынтродуче периодада конвенционалэ а осцилациилор.

Вом студия урмэтоареле фелурь де мишкэрь осцилаторий але системулуй де пункте материале: осцилацииле мичь але системелор ку ун град ши ку доуэ граде де либертате. Мишкэриле осцилаторий але пунктулуй ши але системулуй де пункте ау лок ын журул позицией де екилибру стабил ши деачея вом студия ши кондицииле стабилизаций екилибрулуй.

Екуацииле диференциале ши солуцииле лор ау ачеш формэ, атыт пентру диферите типурь де осцилаций механиче, кыт ши пентру осцилаций де алтэ натурэ, де екземплу, электрикэ.

## § 1. ОСЦИЛАЦИИЛЕ АРМОНИЧЕ ЛИБЕРЕ АЛЕ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Сэ консидерэм мишкаря ректилиние а унуй пункт ку маса  $m$ . Дряпта, не каре се мишкэ пунктул о луэм дрепт акса де координате  $x$ . Орижия системулуй де координате о луэм ын позиция де екилибру а ачестуй пункт. Се нумеште *позицие де екилибру* о астфел де позиция а пунктулуй, ын каре форцелэ че акциязэ асупра луй, се екилибрызэ. Резултэ, кэ пунктул материал, фиинд ситуат ын позиция де екилибру, ва континуа сэ рэмынэ ши май департе ын ачастэ позиция, дакэ луй ну и се комуникэ витезэ. Сэ пресупунем, кэ форцелэ, каре акциязэ асупра пунктулуй ын орьче позиция а луй, сэ редук ла о форцэ резултантэ  $F$ , ориентатэ ынтоддяуна спре орижия системулуй де координате, адикэ спре позиция де екилибру а пунктулуй (фиг. 259).

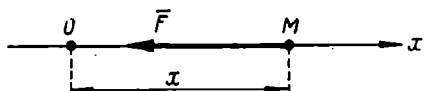
Фие модулул форцей  $\bar{F}$  есте пропорционал ку депласаря пунктулуй дин позиция де екилибру

$$F = c|x|,$$

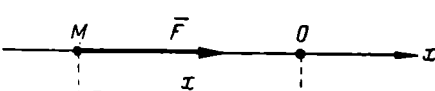
унде  $c > 0$  есте ун коефициент де пропорционалитате, яр  $x$  координата пунктулуй. Форца  $\bar{F}$  есте нумитэ форцэ квазиеластикэ. Фиинд ындрептатэ ын орьче момент спре позиция де екилибру, форца суснумитэ тинде сэ ынтоаркэ пунктул материал ын ачастэ позиции. Натура физикэ а форцей квазиеластиче поате фи диферитэ, чел май дес фиинд форцэ еластикэ.

Екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй есте

$$m\ddot{x} = F = -cx. \quad (1)$$



Фиг. 259.



Фиг. 260.

Ачастэ екуацие есте жустэ пентру орьче позиции а пунктулуй пе траектория са (фиг. 260). Астфел, дакэ пунктул материал се афлэ ын с'ынга орижиний системулуй де координате, атунч форца  $\bar{F}$  есте ындрептатэ ын сенсул позитив ал аксей  $x$ , проекция ей пе ачастэ аксэ фиинд позитивэ. Пентру ачастэ проекие авем  $F_x = F = -cx$ , деоарече координата  $x$  а пунктулуй есте негативэ.

Ымпэрцинд амбеле пэрць але екуацией (1) ла маса пунктулуй  $m$ , обцинем  $\ddot{x} = -\frac{c}{m}x$ . Мэримя позитивэ  $\frac{c}{m}$  поате фи презентатэ ка патратул унуй нумэр оарекаре  $k$ :

$$\frac{c}{m} = k^2; \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (2)$$

Обцинем дефинитив урмэтоаря екуацие диференциалэ а мишкэрий пунктулуй материал

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (3)$$

Сэ стабилим дименсиуны мэримий  $k$ :

$$[c] = \frac{\kappa\Gamma}{m}, \quad [k^2] = \frac{\kappa\Gamma \cdot m}{m \kappa\Gamma \text{ сек}^2} = \frac{1}{\text{сек}^2}, \quad [k] = \frac{1}{\text{сек}}.$$

Мэримя  $k$  се мэсоарэ ын унитэць де витезэ унгюларэ.

Сэ интегрэм екуация (3), каре есте о екуацие линиарэ омо-

Женэ де градул дой ку коефициенць констанць. Екуация карактеристикэ аре аспектул

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

унде  $\lambda$  есте некуноскута екуацией карактеристиче.

Рэдэчинице ачестей екуаций сынт  $\lambda = \pm ki$ ; адикэ сынт пур имажинаре. Дупэ кум се штие дин курсул де математичь ын ачест каз солуция екуацией дифференциале есте

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (4)$$

Пентру а детермина константеле арбитраре  $C_1$  ши  $C_2$  есте нечесар сэ консидерэм кондицииле инициале: пентру  $t=0$ ,  $x=x_0$ ,  $\dot{x}=v_0$ . Дупэ ачесте кондиций инициале афлэм:

$$x_0 = C_1, \quad v_0 = C_2 k, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Екуация чинематикэ а мишкэрий пунктулуй капэтэ форма финалэ

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (5)$$

Пентру а студия карактерул мишкэрий пунктулуй есте комод сэ презентэм солуция (4) а екуацией дифференциале суб о алтэ формэ. Сэ нотэм

$$C_1 = A \sin \alpha \text{ ши } C_2 = A \cos \alpha,$$

унде  $A$  ши  $\alpha$  сынт константе арбитраре ной. Ын ачест каз

$$x = A \sin \alpha \cos kt + A \sin kt \cos \alpha$$

сау

$$x = A \sin(kt + \alpha). \quad (6)$$

Сэ експримэм константеле арбитраре  $A$  ши  $\alpha$  прин  $C_1$  ши  $C_2$

$$C_1^2 = A^2 \sin^2 \alpha, \quad C_2^2 = A^2 \cos^2 \alpha$$

ши, прин урмаре

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ ши } \sin \alpha = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{A}. \quad (7)$$

Сэ консидерэм, кэ мэрия  $A$  есте позитивэ. Унгюл  $\alpha$  вариязэ ын лимителе 0 ши  $2\pi$ . Субституинд ын формулеле (7) валориле константелор  $C_1$  ши  $C_2$ , обцинем

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{v_0}{Ak}. \quad (8)$$

Ын конформитате ку екуация чинематикэ а мишкэрий пунктулуй (6)  $x = A \sin(kt + \alpha)$  мишкаря есте периодикэ, деоарече ын ачестэ екуацие а мишкэрий се концине функция периодикэ

$\sin(kt + \alpha)$ . Пунктул материал се мишкэ пе сегментул ( $-A, A$ ), деоарече  $\sin(kt + \alpha)$  вариэзэ ын лимите де ла  $-1$  пынэ ла  $+1$ . Мишкаря континуэ вешник, деоарече екуация (6) рэмыне жуствэ пентру валорь орькыт де марь але тимпулуй  $t$ .

Мишкаря, детерминатэ де екуация (6), есте нумитэ *мишкаре осцилаторие армоникэ*. Прин урмаре, пунктул материал суб акциуня форцей квазиеластиче, пропорционале ку абатеря пунктулуй дин позиция де екилибру, ефектуэзэ осцилаций армониче. Ачесте осцилаций сынт нумите *осцилаций армониче либере*.

Мэримя  $A$ , каре детерминэ абатеря максимэ а пунктулуй дин позиция са де екилибру, есте нумитэ *амплитудине а осцилациилор*. Мэримя  $k$  есте фреквенца чикликэ сау чиркуларэ а осцилациилор;  $kt + \alpha$  — фаза осцилациилор,  $\alpha$  — фаза инициалэ.

Екуация (6) есте нумитэ форма амплитудикэ а екуацией осцилациилор армониче.

Сэ детерминэм периоада осцилациилор  $T$ . Ын конформитате ку дефиниция периоадей осцилациилор, пунктул материал ын моментеле  $t$  ши  $t + T$  окупэ ачеш позицие, авынд уна ши ачеш витезэ. Позиция пунктулуй се детерминэ прин екуация

$$x = A \sin(kt + \alpha),$$

яр витеза

$$v_x = \dot{x} = Ak \cos(kt + \alpha).$$

Позиция ши витеза пунктулуй сынт ачеляшь, дакэ ын моментеле  $t$  ши  $t + T$  валориле функциилор  $\sin(kt + \alpha)$  ши  $\cos(kt + \alpha)$  сынт унеле ши ачеляшь. Фазеле, кореспунзэтоаре ачестор валорь але тимпулуй  $t$ , се деосебеск ку  $2\pi n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Валоаря периоадей осцилациилор  $T$  се обцине консидерынд  $n = 1$ . Атунч

$$k(T + t) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$$

ши

$$T = \frac{2\pi}{k} \quad (9)$$

сау, субституинд  $k$  дин формула (2),

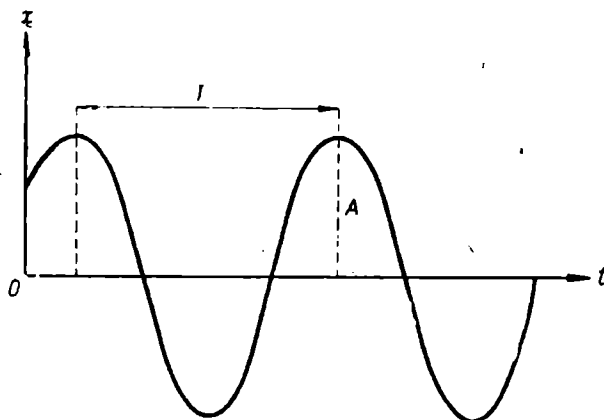
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (9')$$

Се нумеште *фреквенцэ* нумэрул де осцилаций ынтр'о унитате де тимп. Фреквенца  $\nu$  есте  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$ . Фреквенца се мэсоарэ ын херць ( $хц$ ). Фреквенца егалэ ку  $1 хц$  есте о осцилацие пе секундэ.

Дин експресииле периоадей осцилациилор  $T$ , амплитудиний  $A$  ши фазей инициале  $\alpha$  путем траже конклузия: периоада осцилациилор ну депинде де кондицииле инициале ши де амплиту-

дине; амплитудиня ши фаза инициалэ депинд де кондицииле инициале. Осцилацииле; периоада кэрора ну депинде де кондицииле инициале, сынт нумите *осцилаций изокроне*. Прин урмаре, мишкаря пунктулуй материал суб акциуня форцей квазиэластиче есте мишкаре изокроникэ.

Графикул дистанцелор ын мишкаря осцилаторие армоникэ есте о синусоидэ (фиг. 261).



Фиг. 261.

**Екземплу.** О спиралэ вертикалэ, екстремитатя де сус а кэрея есте фиксатэ, общинё ын урма суспендэрий корпулуй ку греутатя  $P$  ла чялалтэ екстремитате а ей алунжиря статикэ  $f_{ст}$ . Ынтр'ун момент оарекаре спирала недеформатэ есте алунжитэ ку  $\Delta l$ , де екстремитатя де жос есте суспендат ачест корп  $P$ , комуникынду-и-се ын жос витеза инициалэ  $v_0$ . Сэ се афле екуация мишкэрий ултериоаре а корпулуй, дакэ:  $P = 20 \text{ н}$ ,  $f_{ст} = 5 \text{ чм}$ ,  $\Delta l = 8 \text{ чм}$ ,  $v_0 = 10 \text{ чм/сек}$ .

**Резолваре.** Вом консидера, кэ форца де еластичитате а спиралей есте пропорционалэ ку мэримя алунжирий сау компримэрий.

Май ынтый де тоате требуе сэ алкэтуим екуация дифференциалэ а мишкэрий корпулуй. Вом луа дрепт аксэ  $x$  вертикала, ын лунгул кэрея се мишкэ центрул де греутате ал корпулуй. Сенсул позитив ал аксей  $x$  ыл луэм ын жос.

Орижиня координателор  $O$  о луэм ын позиция де екилибру а корпулуй. Ачастэ пбзицие де екилибру о вом общине, дакэ вом делуне мэримя  $f_{ст}$  ын жос де ла позиция центрулуй де греутате ал корпулуй, суспендат де спирала недеформатэ, деоарече прин алунжиря статикэ а спиралей се субынцележе алунжиря спиралей атунч, кынд корпул суспендат се афлэ ын екилибру (фиг. 262).



Ын фигура 262 есте репрезентатэ о позиции арбитражэ  $M$  а корпусулуй, детерминатэ де координата  $x$ . Асупра корпусулуй акциязэ форцелле: форца де греутатэ  $\vec{P}$  ориентатэ ын жос ши форца де еластичитатэ а спиралей  $\vec{F}$  ориентатэ ын сус.

Конформ ипотезей, форца де еластичитатэ а спиралей есте пропорционалэ ку алуңжиря ши, прин урмаре, ын позиция арбитражэ консидератэ а корпусулуй

$$F = c(f_{ct} + x),$$

унде  $c$  есте ун коэффициент де пропорционалитатэ.

Мэримя  $c$  поате фи детерминатэ дин кондицииле екилибрулуй статик. Ын позиция де екилибру  $P = F$ , адикэ  $P = cf_{ct}$ , де унде

$c = \frac{P}{f_{ct}}$ . Мэримя  $c$ , каре детерминэ форца, нечесарэ пентру алуңжиря статикэ а спиралей ку о унитатэ де луңжиме, есте о карактеристикэ а спиралей, нумитэ *коэффициент де еластичитатэ*.

Екуация дифференциалэ а мишкэрий корпусулуй есте

$$m\ddot{x} = P_x + F_x$$

сау

$$m\ddot{x} = P - c(f_{ct} + x) = P - cf_{ct} - cx,$$

дар

$$P - cf_{ct} = 0,$$

прин урмаре

$$m\ddot{x} = -cx, \quad \ddot{x} + k^2x = 0, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

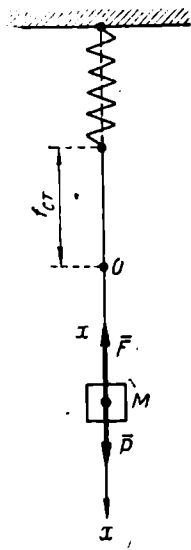
Сэ менционэм, кэ ын партя дряптэ а екуацией дифференциалэ а мишкэрий ну фигурызэ форца де греутатэ  $P$ . Ачаста аре лок даторитэ фаптулуй, кэ орижия координателор есте луатэ ын позиция де екилибру.

Солуция екуацией дифференциалэ се афлэ дупэ формула (4)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Сэ стабилим кондицииле инициале, нечесаре пентру детерминаря константелор  $C_1$  ши  $C_2$ . Есте евидент, кэ координата  $x$  а позицией инициале а корпусулуй есте  $x_0 = \Delta l - f_{ct} = 3$  чм, прин урмаре, кондицииле инициале ын моментул  $t=0$  сынт,

$$x = 3 \text{ чм}, \quad \dot{x} = v_0 = 10 \text{ чм/сек.}$$



Фиг. 262.

Сэ детерминэм  $k$ :

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{P}{f_{\text{ср}} m}} = \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ср}}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Пентру  $C_1$  ши  $C_2$  авем:

$$C_1 = x_0 = 3, \quad C_2 = \frac{v_0}{k} = \frac{10}{14} = 0,71.$$

Екуация чинематикэ а мишкэрий корпулуй есте

$$x = 3 \cos 14t + 0,71 \sin 14t \text{ чм.}$$

Сэ адучем екуация обцинутэ а мишкэрий ла форма амплитудикэ. Дин формулеле (7) обцинем

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{9 + 0,50} = 3,08, \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{A} = \frac{3}{3,08} = 0,974, \\ \cos \alpha = \frac{C_2}{A} > 0.$$

Унгюл  $\alpha$  се афлэ ын примул кадран; дин табелэ афлэм  $\alpha = 1,34 \text{ рад}$ .

Екуация мишкэрий корпулуй ын форма амплитудикэ есте

$$x = 3,08 \sin(14t + 1,34) \text{ чм.}$$

Корпул ефектуязэ ын журул позицией де екилибру осцилаций армониче ку амплитудиня де 3,08 чм ши периода

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = 0,45 \text{ сек.}$$

## § 2. ОСЦИЛАЦИИЛЕ АМОРТИЗАТЕ АЛЕ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Сэ студием инфлуенца резистенцей асулра осцилациилор армониче либере але пунктулуй материал. Вом пресупуне, кэ пунктул се мишкэ ректилиниу. Форца квазиэластикэ есте пропорционалэ ку абатеря пунктулуй де ла позиция де екилибру  $O$ .

Вом консидера форца де резистенцэ  $\bar{R}$  пропорционалэ ку витеза пунктулуй ла путеря ынтыя, адикэ  $\bar{R} = -\mu \bar{v}$ . Мэримя  $\mu > 0$  есте нумитэ коэффициент де резистенцэ. Семнул минус индикэ фаптул, кэ форца  $\bar{R}$  есте ориентатэ ын сенсул опус витезей пунктулуй.

Ын фигура 263 есте репрезентатэ о позицияе арбитрарэ  $M$  а пунктулуй мобил, детерминатэ де координата  $x$ . Сэ пресупунем, кэ витеза пунктулуй  $v$  ын ачастэ позицияе есте ориентатэ ын сенсул позитив ал аксей  $x$ . Асулра пунктулуй акционязэ фор-

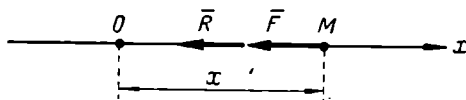
цэле урмэтоаре: форца квазиэластикэ  $F = c|x|$  ши форца де резистенцэ  $R = \mu v$ . Амбеле форце  $\bar{F}$  ши  $\bar{R}$  сынт ориентате ын сенсул негатив ал аксей  $x$ .

Екуация дифференциалэ а мишкэрий пунктулуй есте

$$m\ddot{x} = F_x + R_x,$$

адикэ

$$m\ddot{x} = F_x + R_x = -cx - \mu v_x$$



сау

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}. \quad (10)$$

Фиг. 263.

Витеза пунктулуй ын позиция  $M$ , кореспунзэтоаре унуй момент оарекаре  $t$ , поате фи оризонтатэ атыт ын сенсул позитив, кыт ши ын сенсул негатив ал аксей  $x$ . Дакэ витеза есте ориентатэ ын сенсул негатив ал ачестей аксе, форца де резистенцэ  $\bar{R}$  есте ындрептатэ ын сенсул позитив ал аксей  $x$  ши, прин урмаре, проекция ей пе акса  $x$  есте позитивэ. Сэ менционэм, кэ ануме ын ачест каз проекция форцей де резистенцэ пе акса  $x$   $R_x = -\mu \dot{x}$  дин партя дряптэ а екуацией (10) есте позитивэ, деоарече проекция витезей  $v_x = \dot{x}$  есте негативэ атунч, кынд витеза есте ындрептатэ ын сенсул негатив ал аксей  $x$ .

Циынд конт де екуация дифференциалэ а осцилациилор армониче либере, путем траже конклузия: екуация дифференциалэ (10) есте жустэ пентру орьче позиции а пунктулуй мобил ын орьче сенс а витезей луй ын ачастэ позиции.

Сэ ымпэрцим амбеле пэрць але екуацией (10) ла маса пунктулуй  $m$  ши сэ нотэм

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n, \quad \text{унде } n > 0.$$

Трекынд апой тоць термений ын партя стынгэ, обцинем

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (11)$$

Пентру а интегра ачастэ екуации линиарэ сэ алкэтуим екуация карактеристикэ ши сэ афлэм рэдэчиниле ей. Вом обцине

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0, \quad \lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Дин експресия рэдэчинилор екуацией карактеристиче реесе, кэ пентру  $n \geq k$  ачесте рэдэчинь сынт реале, яр пентру  $n < k$  еле сынт комплексе. Казул  $n \geq k$  вом нуми казул резистенцей марь, яр казул  $n < k$  — казул резистенцей мичь.

Ын курсул де математичь с'а демонстрат, кэ солуция екуацией дифференциале (11) концине функцииле периодиче синусул ши косинусул нумай ын казул рэдэчинилор комплексе але

екуацей карактеристиче, адикэ мишкаря есте периодикэ нумай ын казул резистенцей мичь.

Ын ачест каз рэдэчинице екуацией карактеристиче сынт

$$\lambda = -n \pm \sqrt{k^2 - n^2}i.$$

Сэ нотэм

$$\sqrt{k^2 - n^2} = k_1. \quad (12)$$

Ын ачест каз

$$\lambda = -n \pm k_1 i.$$

Пентру солуция екуацией (11) обцинем:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (13)$$

Константеле интегрэрий  $C_1$  ши  $C_2$  пот фи детерминате дин кондицииле инициале: пентру  $t=0$ ,  $x=x_0$ ,  $\dot{x}=v_0$ .

Ын ачесте кондиций инициале, субституинд  $t=0$  ши  $x=x_0$ , авем  $x_0=C_1$ ; сэ калкулэм деривата  $\dot{x}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -n e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ & + k_1 e^{-nt}(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t). \end{aligned}$$

Субституинд аич  $t=0$  ши  $\dot{x}=v_0$  обцинем

$$v_0 = -nC_1 + C_2 k_1, \text{ де унде } C_2 = \frac{v_0 + nC_1}{k_1} = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}.$$

Сэ субституим валорице обцинуте  $C_1$  ши  $C_2$  але константе-лор интегрэрий ын експресия (13). Екуация чинематикэ а мишкэрий пунктулуй есте

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (14)$$

Субституинд ын екуация (13)

$$C_1 = A_1 \sin \alpha, \quad C_2 = A_2 \cos \alpha,$$

унде  $A$  ши  $\alpha$  сынт константе арбитраре ной, обцинем о алтэ формэ а солуцией екуацией дифференциале

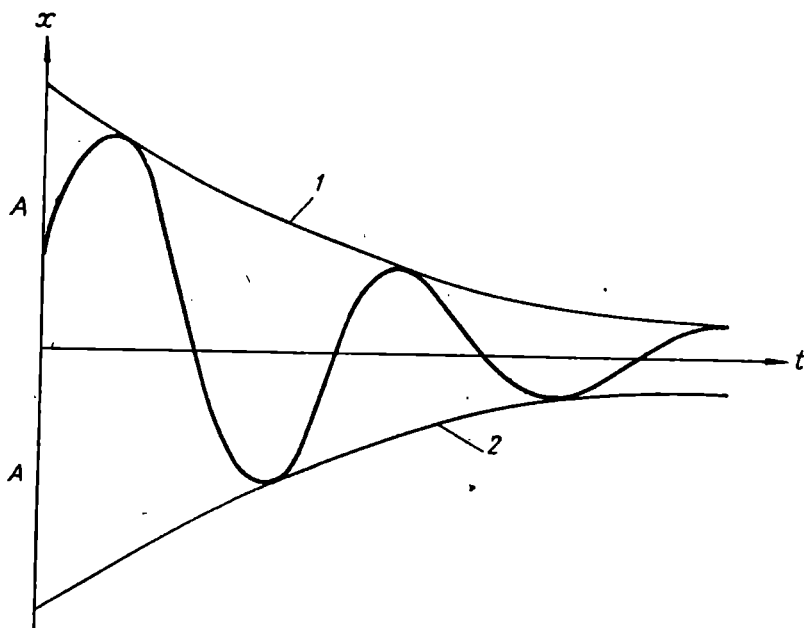
$$x = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (15)$$

Мэримиле  $A$  ши  $\alpha$  се експримэ прин  $C_1$  ши  $C_2$  ын фелул урмэтор

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{A}.$$

Мэримя  $A$  есте позитивэ, яр унгул  $\alpha$  се афлэ ын интервалул де ла zero пынэ ла  $2\pi$ .

Прин урмаре, мишкаря пунктулуй материал суб акциуна форцей квазиэластиче, пропорционале ку абатеря пунктулуй де ла позиция де екилибру ши а форцей де резистенцэ, пропорционале ку витеза ла путеря ынтыя (пентру  $n < k$ ), есте дескрисе де екуацииле (14) сау (15). Фолосинд екуация (15), сэ конструим графикул дистанцелор ын ачастэ мишкаре.



Фиг. 264.

Карактерул графикулуй функцией  $x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$  поате фи stabilit пе база консидерациилор урмэтоаре. Дакэ конструим графичеле функциилор  $x = Ae^{-nt}$  (фиг. 264, курба 1) ши  $x = -Ae^{-nt}$  (фиг. 264, курба 2), атунч пунктеле графикулуй кэутат вор фи ситуате ын режииунэ, мэржинитэ де курбеле 1 ши 2, деоарече модулул мэримий  $\sin(k_1 t + \alpha)$  ну есте май маре декыт унитатя. Графикул кэутат аре о инфинитате де пункте пе курбеле 1 ши 2, деоарече  $\sin(k_1 t + \alpha)$  обцине периодик валориле  $+1$  ши  $-1$ .

Графикул есте репрезентат ын фигура 264. Ел презинтэ о синусоидэ, ынскрисэ ын режииунэ, мэржинитэ де курбеле 1 ши 2.

Модулий максималэ ай абатерилор консекутиве але пунктулуй де ла позиция де екилибру ынтр'о парте ши ын алта ле вом нуми амплитудинь консекутиве але осцилацииилор пунктулуй.

Дин графикул дистанцелор (фиг. 264) се веде, кэ ла крештерэ тимпулуй, мэримиле амплитудинилор консекутиве се мик-

шорязэ, тинзынд спре зеро, адикэ ку тимпул осцилацииле се стинг.

Осцилацииле, детерминате де екуация (15), сынт нумите *осцилаций амортизате*.

Акум сэ детерминэм моментеле, ын каре пунктул окупэ позицииле екстремале. Витеза пунктулуй ын позицииле екстремале есте нулэ. Деривынд екуация (15) ши егалынд витеза ку зеро, обцинем екуация пентру детерминаря моментелор кэутате:

$$v = \dot{x} = Ae^{-nt} [-n \sin(k_1 t + \alpha) + k_1 \cos(k_1 t + \alpha)] = 0.$$

Продусул есте егал ку зеро, прин урмаре, унул дин факторы есте егал ку зеро.

Пентру  $t = \infty$  факторул  $e^{-nt} = 0$ . Ын ачест каз ши

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) = 0.$$

Ачест резултат афирмэ, кэ осцилацииле се стинг дупэ ун интервал де тимп инфинит де маре, дупэ каре пунктул материал се афлэ ын позиция де екилибру (фиг. 264).

Сэ егалэм експресииле дин парантеза патратэ ку зеро

$$-n \sin(k_1 t + \alpha) + k_1 \cos(k_1 t + \alpha) = 0$$

сау

$$\operatorname{tg}(k_1 t + \alpha) = \frac{k_1}{n}.$$

Пентру а детермина тимпул  $t$  авем о екуации тригонометри-кэ, дин каре обцинем о инфинитате де валорь але луй  $t$ . Периоа-да тангентей есте егалэ ку  $\pi$ , прин урмаре, валориле консекути-ве але тимпулуй  $t$  се деосебеск ку аша о мэриме, пентру каре фаза  $k_1 t + \alpha$  се мэреште ку  $\pi$ .

Фие  $t_1$  есте уна дин валориле кэутате але мэримий  $t$ .

Валоаря урмэтоаре  $t$  поате фи обцинутэ дин кондиция

$$k_1 t_2 + \alpha = k_1 t_1 + \alpha + \pi, \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k_1}.$$

Дупэ кум се веде дин формуле, фиекаре валoare ултериоа-рэ а луй  $t$  есте егалэ ку валoаря пречедентэ плус  $\frac{\pi}{k_1}$ . Обцинем о serie де моменте, ын каре пунктул окупэ позицииле екст-ремале:

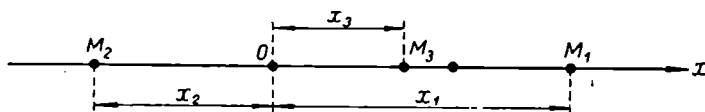
$$t_1, \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k_1}, \quad t_3 = t_2 + \frac{\pi}{k_1} = t_1 + 2 \frac{\pi}{k_1}.$$

Вом нота ку  $M_1$  позиция пунктулуй ын моментул  $t_1$ . Дин екуация (15) гэсим, кэ координата пунктулуй  $M_1$  есте  $x_1 =$

$= Ae^{-nt_1} \sin(k_1 t_1 + a)$ . Фие  $x_1 > 0$ , адикэ  $M_1$  есте позиция екстремалэ дин партя дряптэ (фиг. 265).

Позиция  $M_2$  ын моментул  $t_2$  есте

$$\begin{aligned} x_2 &= Ae^{-nt_2} \sin(k_1 t_2 + a) = Ae^{-n\left(t_1 + \frac{\pi}{k_1}\right)} \sin\left[k_1\left(t_1 + \frac{\pi}{k_1}\right) + a\right] = \\ &= -Ae^{-nt_1} e^{-n\frac{\pi}{k_1}} \sin(k_1 t_1 + a) = -e^{-n\frac{\pi}{k_1}} x_1, \quad |x_2| < x_1. \end{aligned}$$



Фиг. 265.

Дин ултима инекуацые реесе, кэ  $x_2 < 0$ , деоарече  $x_1$  есте о мэриме позитивэ, адикэ  $M_2$  есте позиция екстремалэ а пунктулуй дин стынга.

Дин релация  $x_2 = -x_1 e^{-n\frac{\pi}{k_1}}$  реесе, кэ координата позицией екстремале ултериоре а пунктулуй есте егалэ ку координата позицией екстремале пречеденте, луатэ ку семнул минус, ынмулцитэ ку мэримя  $e^{-n\frac{\pi}{k_1}}$ .

Пентру позиция екстремалэ  $M_3$  ын моментул  $t_3 = t_2 + \frac{\pi}{k_1}$  авем

$$x_3 = -x_2 e^{-n\frac{\pi}{k_1}} = x_1 e^{-n\frac{2\pi}{k_1}}.$$

Аич  $x_3 > 0$  есте позиция екстремалэ дин дряпта ши  $x_3 < |x_2|$ .

Ын интервалул де тимп де ла моментул  $t_1$  пынэ ла моментул  $t_2$ , егал ку  $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{k_1}$ , пунктул трече дин позиция екстремалэ дин дряпта  $M_1$  ын позиция екстремалэ дин стынга  $M_2$ , сау пунктул ефектуязэ о осцилацие максималэ, егалэ ку амплитудиня.

Ын интервалул де тимп де ла моментул  $t_2$  пынэ ла моментул  $t_3$ , егал ку  $t_3 - t_2 = \frac{\pi}{k_1}$ , пунктул се депласязэ дин позиция екстремалэ дин стынга  $M_2$  ын позиция екстремалэ дин дряпта  $M_3$ , адикэ пунктул ефектуязэ ынкэ о осцилацие максимэ, егалэ ку амплитудиня. Дурата динтре доуэ осцилаций максиме есте нумитэ периоадэ кондиционалэ, сау периоадэ а осцилацилор амортизате

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \text{ сау } T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (16)$$

Дупэ формула (16)

$$T_1 > T,$$

унде  $T = \frac{2\pi}{k}$  есте периоада осцилацилор ын липса резистенций.

Периоада осцилацилор амортизате ну депинде де кондицииле инициале ши рэмыне константэ ын прочесул мишкэрий.

Координателе позициилор екстремале але пунктулуй сынт

$$x_1; x_2 = -e^{-n\frac{\pi}{k_1}} x_1 = -e^{-\frac{nT_1}{2}} x_1; x_3 = e^{-2\frac{nT_1}{2}} x_1.$$

Прин урмаре, мэримиле амплитудинилор консекутиве формязэ серия

$$h_1; h_1 e^{-\frac{nT_1}{2}}; h_1 e^{-2\frac{nT_1}{2}}; h_1 e^{-3\frac{nT_1}{2}},$$

унде  $h_1$  есте мэримя примей амплитудинь.

Сэ формулэм лежя вариацией амплитудинилор: *мэримиле амплитудинилор консекутиве формязэ о прогрессие жео-метрикэ инфинит декрескэтоаре ку рация  $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ .*

Мэримя

$$D = e^{-\frac{nT_1}{2}} \quad (17)$$

есте нумитэ *декремент де амортизаре*.

Логаритмул натурал ал рапортулуй динтре доуэ амплитудинь консекутиве есте нумит декремент логаритмик де амортизаре. Обцинем

$$\eta = \ln \frac{h_k}{h_{k+1}} = \ln \frac{h_k}{h_k e^{-\frac{nT_1}{2}}} = \ln \left( e^{\frac{nT_1}{2}} \right) = \frac{nT_1}{2}. \quad (18)$$

Коефициентул  $n = \frac{\nu}{2m}$  есте нумит *коэффициент де амортизаре*.

*Екземплу.* О плакэ гря есте суспендатэ де о спиралэ вертикалэ, форца де еластичитате а кэрея есте пропорционалэ ку алунжиря ей. Периоада осцилацилор плэчий ын аер есте  $T = 0,5\pi = 1,57$  сек. Ачэстэ плакэ, фиинд суспендатэ де ачеш спиралэ, осцилязэ ын ликид, форца де резистенцэ дин партя ликудулуй фиинд пропорционалэ ку витеза ла путеря ынтыя. Амплитудиня осцилацилор плэчий куфундате ын ликид се микшорязэ де 10 орь ын тимпул, жынд плака ефектуязэ патру осцилаций комплекте. Сэ се детермине периоада осцилацилор плэчий ын ликид ши декрементул логаритмик де амортизаре. Резистенца аерулуй се negliжазэ.



Резолваре. Ын аер плака ефектуязэ осцилаций армониче либере ын журул позицией де екилибру. Дин формула периоадей осцилациилор армониче либере  $T = \frac{2\pi}{k}$  гэсим

$$0,5\pi = \frac{2\pi}{k}, \quad k = 4 \frac{1}{сек}$$

Ын ликвид плака ефектуязэ осцилаций амортизате. Ынтр'о периоадэ комплекта амплитудиня се микшорязэ ын рапортул  $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ , прин урмаре, ын опт периоаде комплекте амплитудиня се микшорязэ ын рапортул  $e^{-8 \frac{nT_1}{2}}$ .

Кондицииле проблемей не пермит сэ алкэтуим екуация

$$e^{-8 \frac{nT_1}{2}} = \frac{1}{10},$$

де унде

$$\eta = \frac{nT_1}{2} = \frac{1}{8} \ln 10 = 0,288.$$

Астфел, ам детерминат декрементул логаритмик де амортизаре.

Конформ формулей (16) периоада осцилациилор амортизате есте

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Аич  $k$  есте мэриме куноскутэ, яр  $n$  се експримэ прин декрементул логаритмик де амортизаре  $\eta$  ши атунч  $n = \frac{2\eta}{T_1}$ .

Дин експресия периоадей  $T_1$

$$k^2 - n^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

сау

$$k^2 - \frac{4\eta^2}{T_1^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2},$$

де унде

$$T_1 = \frac{2}{k} \sqrt{\pi^2 + \eta^2}.$$

Субституинд валориле мэримилор  $k$  ши  $\eta$ , обцинем

$$T_1 = \frac{2}{4} \sqrt{\pi^2 + 0,0829} = 1,58 \text{ сек.}$$

Менционэм, кэ периоада осцилацилор амортизате ын казул уней резистенце дестул де мичь диферэ фоарте пущин де периоада осцилацилор либере.

### § 3. МИШКАРЯ АПЕРИОДИКЭ АМОРТИЗАТЭ

Екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй материал суб акциуня форцей квазиэластиче ши а форцей де резистенцэ, пропорционале ку витеза ла путеря ынтыя, есте

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0.$$

Сэ студиём казул резистенцей марь  $n \geq k$ .

Ын ачест каз рэдэчиниле екуацией карактеристиче сынт реале

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}; \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Есте евидент, кэ амбеле рэдэчинь сынт негативе:  $\lambda_1 < 0$  ши  $\lambda_2 < 0$ .

Ын казул кынд  $n > k$  солуция екуацией диференциале, ади-кэ екуация чинематикэ а мишкэрий, есте.

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (19)$$

Константеле  $C_1$  ши  $C_2$  се детерминэ дин кондицииле инициале. Деоарече  $\lambda_1$  ши  $\lambda_2$  сынт мэрымь негативе, есте евидент кэ атвнч кынд  $t \rightarrow \infty$   $x \rightarrow 0$  пентру орьче валорь але константелор  $C_1$  ши  $C_2$ . Ачаста ынсямнэ, кэ ку тимпул пунктул материал се апропие инфинит де апроапе де позиция де екилибру.

Сэ нотэм  $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$ . Рэдэчиниле екуацией карактеристиче сынт

$$\lambda_1 = -n + k_2, \quad \lambda_2 = -n - k_2.$$

Субституинд ачесте валорь але рэдэчинилор  $\lambda_1$  ши  $\lambda_2$  ын екуация (19), обцинем

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}).$$

Сэ детерминэм акум моментеле, ын каре пунктул окупэ позицииле екстремале. Ын ачесте позиций витеза пунктулуй есте нулэ. Сэ калкулэм витеза ши с'о егалэм ку зеро:

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= -n e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}) + e^{-nt} (C_1 k_2 e^{k_2 t} - C_2 k_2 e^{-k_2 t}) = \\ &= e^{-nt} [(C_1 k_2 - C_1 n) e^{k_2 t} - (C_2 k_2 + C_2 n) e^{-k_2 t}] = 0. \end{aligned}$$

Екуация, каре детерминэ моментеле кэутате, есте

$$C_1 (k_2 - n) e^{k_2 t} - C_2 (k_2 + n) e^{-k_2 t} = 0.$$

Сэ нотэм ын ачастэ екуацие  $e^{kt} = z$ . Атунч

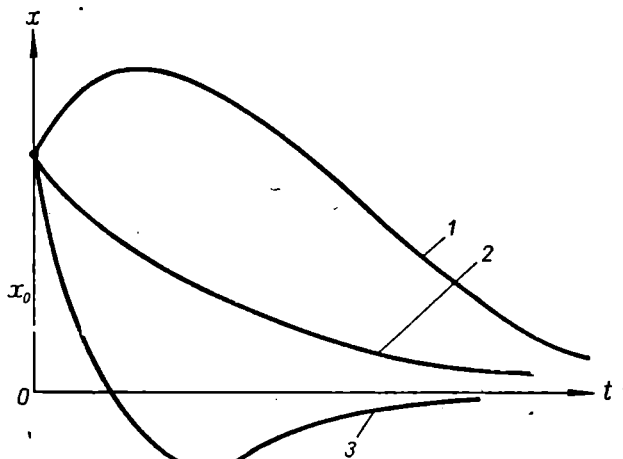
$$C_1(k_2 - n)z - C_2(k_2 + n)\frac{1}{z} = 0$$

сау

$$C_1(k_2 - n)z^2 - C_2(k_2 + n) = 0.$$

Пентру детерминаря мэримий  $z$  ам обцинут'о екуацие патратэ некомплектэ. Тимпул  $t$  обцине валорь реале ши позитиве нумай атунч, кынд  $z > 1$ , дар мэримя  $z$  ын депенденцэ де константеле  $C_1$  ши  $C_2$  обцине сау нумай'о сингурэ валoare, сау нич уна.

Прин урмаре, авем о сингурэ позиции екстремалэ сау нич уна, адикэ аша о позиции, ын каре витеза пунктулуй ла мишкаря са есте нулэ.



Фиг. 266.

Ын фигура 266 сынт репрезентате графичеле мишкэрилор лосибиле але пунктулуй ын функции де кондицииле инициале пентру  $x_0 > 0$ . Курба 1 кореспунде витезей инициале, ориентатэ ын сенсул позитив ал аксей  $x$ ; курба 2 кореспунде уней витезе инициале релатив мичь, ындрептате ын сенсул негатив ал аксей  $x$ ; курба 3 кореспунде витезей инициале дестул де марь, ындрептате ын сенсул негатив ал аксей  $x$ .

Ын казул, кынд  $n = k$  рэдэчиниле екуацией карактеристиче сынт

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Солуция екуацией дифференциале капэтэ форма

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t).$$

Қарактерул мишкэрий есте ачелаш, ка ши пентру  $n > k$ . Ын казул уней резистенце, релатив марь  $n > k$  осцилацииле липсеск. О аша мишкаре есте нумитэ *мишкаре амортизатэ аperiодикэ*.

#### § 4. ОСЦИЛАЦИИЛЕ ФОРЦАТЕ АЛЕ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ ЫН ЛИПСА РЕЗИСТЕНЦЕЙ

Фие асупра унуй пункт материал ын мишкаря ректилиние а са, афарэ де форца квазиэластикэ  $\bar{F}$  акционяэ форца  $\bar{S}$ , каре вариязэ периодик дупэ мэриме ши дирекције. Ачаствэ форцэ се нумеште *форцэ пертурбатoare*. Сэ пресупунем, кэ проекция форцей  $\bar{S}$  пе акса  $x$  вариязэ дупэ лежя синусулуй

$$S_x = H \sin(pt + \delta).$$

Аич  $H$  есте валoаря максималэ а ачестей форце, яр  $p$  — фреквенца вариацией ей.

Дакэ форца  $\bar{S}$  вариязэ дупэ о леже май компликатэ, атунч експресия ей поате фи дескомпусэ ын серия луй Фурье ын синусурь ши косинусурь ши атунч ачаствэ форцэ поате фи репрезентатэ ка о комбинация а форцелор, каре вариязэ дупэ лежя симплэ а синусулуй.

Ын ачест каз (чел май симплу) екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй есте

$$m\ddot{x} = -F_r + S_x$$

сау

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta). \quad (20)$$

Сэ ымпэрчим амбеле пэрць але екуацией ла маса пунктулуй  $m$  ши сэ нотэм  $\frac{c}{m} = k^2$  ши  $\frac{H}{m} = h$ . Авам дефинитив урмэтоаря екуацие диференциалэ

$$x + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (21)$$

Екуация диференциалэ (21) есте о екуацие неоможенэ де ординул дой ку коэффициент констанць. Ын курсул де математичь сэ демонстрат кэ солуция уней аша екуаций есте егалэ ку сума динтре солуция женералэ а екуацией оможене ши о солуция партикулярэ оарекаре а екуацией неоможене. Вом нота прин  $x_1$  солуция женералэ а екуацией оможене, яр прин  $x_2$  — солуция партикулярэ.

Екуация оможенэ есте екуация диференциалэ а осцилациилор армониче либере. Солуция ей есте куноскутэ

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

сау суб форма амплитудикэ

$$x_1 = A_1 \sin(kt + \alpha).$$

Сэ афлэм солуция партикуларэ. Форма солуцией партикуларе есте диферитэ ын функции де мэримя  $p$ . Сэ консидерэм май ынтый казул  $p \neq k$ . Ын ачест каз солуция партикуларэ поате фи обцинутэ суб форма пэрций дрепте

$$x_2 = D \sin(pt + \delta),$$

унде  $D$  есте ун коефициент, че требуе детерминат.

Ын екуация диференциалэ (21) субституим  $x$  прин  $x_2$  ши калкулэм превентив деривателе  $\dot{x}_2$  ши  $\ddot{x}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Dp \cos(pt + \delta), \quad \ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \delta), \\ -Dp^2 \sin(pt + \delta) + k^2 D \sin(pt + \delta) &= h \sin(pt + \delta). \end{aligned}$$

Сэ ымпэрцим амбеле пэрць але екуацией ла  $\sin(pt + \delta)$  ши сэ детерминэм  $D$ :

$$D = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Солуция партикуларэ есте

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta).$$

Пентру солуция екуацией (21) авем  $x = x_1 + x_2$ ,

сау

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (22)$$

сау

$$x = A_1 \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (22')$$

Константеле арбитраре  $C_1$ ,  $C_2$  сау  $A_1$  ши  $\alpha$  пот фи детерминате дин кондицилие инициале, субституинд валориле инициале ын екуация (22) сау (22').

Екуация чинематикэ (22') аратэ, кэ мишкаря пунктулуй есте о суперпозицие а доуэ мишкэрь осцилаторий. Осцилацилие, детерминате де примул термен  $x_1 = A_1 \sin(kt + \alpha)$  ау фреквенца, егалэ ку фреквенца осцилацийлор либере, ши сынт нумите *осцилаций проприй але пунктулуй материал*.

Осцилацилие, детерминате де ал дойля термен  $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ , ау фреквенца, егалэ ку фреквенца форцей пертурбатоаре, ши сынт нумите *осцилаций форцате але пунктулуй материал*.

Аша дар, екуация осцилациилор форцате есте

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (23)$$

Амплитудиня осцилациилор форцате  $A_2$  (о мэриме позитивэ) есте

$$A_2 = \left| \frac{h}{k^2 - p^2} \right|. \quad (24)$$

Екуация осцилациилор форцате суб форма амплитудикэ аре аспектүл:

пентру  $k > p$

$$x_2 = A_2 \sin(pt + \delta),$$

пентру  $k < p$

$$x_2 = A_2 \sin(pt + \delta - \pi).$$

Дупэ кум се веде, пентру  $k > p$  осцилацииле форцате ши форца пертурбатоаре се афлэ ын ачеяш фазэ, адикэ  $x_2$  ши  $s$  ау симултан максимум сау минимум. Ын казул кынд  $p > k$  осцилацииле форцате ши форца пертурбатоаре се афлэ ын фазе опусе.

Есте евидент, кэ пентру а афла екуация осцилациилор форцате требует сэ гэсим нумай солуция партикуларэ а екуацией дифференциале авынд партя дряптэ периодикэ. Солуция партикуларэ ну концине константеле арбитраре, детерминате дин кондицииле инициале, прин урмаре, осцилацииле форцате ну депинд де кондицииле инициале.

Сэ консидерэм акум казул  $p = k$ . Ын ачест каз фреквенца осцилациилор проприй коинчиде ку фреквенца форцей пертурбатоаре. Ачест феномен есте нумит *резонанцэ*. Ын казул де фазэ екуация (21) капэтэ форма

$$x + k^2 x = h \sin(kt + \delta). \quad (25)$$

Сэ афлэм екуация осцилациилор форцате. Ын ачест скоп гэсим солуция партикуларэ а екуацией (25).

Ын курсул де математичь с'а демонстрат, кэ ын казул дат солуция партикуларэ аре форма

$$x_2 = t [D \cos(kt + \delta) + E \sin(kt + \delta)].$$

Сэ субституим  $x$  прин  $x_2$  ын екуация (25), калкулынд ын преабил деривателе  $\dot{x}_2$  ши  $\ddot{x}_2$ . Ын ачест каз

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= [D \cos(kt + \delta) + E \sin(kt + \delta)] + \\ &+ kt [-D \sin(kt + \delta) + E \cos(kt + \delta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= 2k [-D \sin(kt + \delta) + E \cos(kt + \delta)] - \\ &- k^2 t [D \cos(kt + \delta) + E \sin(kt + \delta)], \end{aligned}$$

$$2k [-D \sin(kt + \delta) + E \cos(kt + \delta)] - k^2 t [D \cos(kt + \delta) + E \sin(kt + \delta)] + E \sin(kt + \delta) + k^2 t [D \cos(kt + \delta) + E \sin(kt + \delta)] = h \sin(kt + \delta).$$

Ын ултима екуацие дой термень, каре концин факторул  $t$ , се редук речипрок. Егалынд коефициенций луй  $\sin(kt + \delta)$  ши  $\cos(kt + \delta)$  дин амбеле пэрць алё екуацией, обцинем

$$-2Dk = h, 2Ek = 0.$$

Де аич

$$D = -\frac{h}{2k}, E = 0.$$

Прин урмаре, екуация осцилациилор форцате ла резонанцэ есте

$$x_2 = -\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$$

сау

$$x_2 = \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (26)$$

Дин екуация (26) резултэ, кэ факторул дин фаца синусулуй креште одатэ ку крештеря тимпулуй ши поате атинже валорь орькыт де марь. Дин ачеш екуацие резултэ, кэ ла резонанцэ осцилацииле форцате рэмын ын урмэ дупэ фазэ фацэ де форца пертурбатоеаре ку  $\frac{\pi}{2}$ .

Графикул дистанцелор ын казул осцилациилор форцате ла резонанцэ есте о курбэ синусоидалэ, ынскрисэ ын режиуня, мэр-жинитэ де дрептеле  $x_2 = \frac{h}{2k} t$  ши  $x_2 = -\frac{h}{2k} t$ , деоарече модулул  $\sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$  ну есте май маре декыт унитатя. Дакэ  $\sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ , атунч пунктеле кореспунзэтоаре сё афлэ пе ачесте дрепте; екзистэ о инфинитате де пункте де ачест фел. Графикул дистанцелор есте репрезентат ын фигура 267. Дин график (фигура 267) се веде, кэ одатэ ку мэрия тимпулуй амплитудиня осцилациилор креште.

Резонанца, апэрутэ ынтымплэтор ын пьеселе уней конструкторь оарекаре (подурь, поделеле ателиерелор ш. а.), поате про-вока урмэрь недорите. Амплитудиниле осцилациилор форцате пот девени атыт де марь, ынкыт конструкция ну ле поате супорта ши поате сё се прэбушаскэ.

Десеорь резонанца есте фолоситэ ла ексчитаря унор осцилаций ши ла мэсураря унор мэримь оарекаре дупэ ачесте осцилаций.

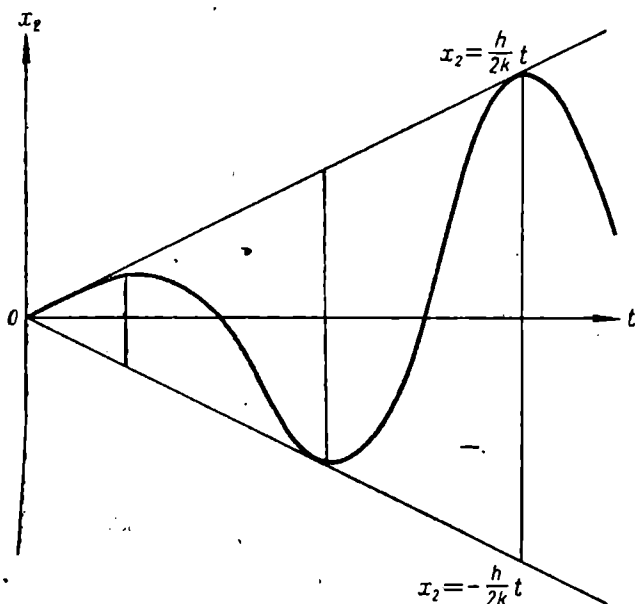
Солуция комплектэ а екуацией (25) есте

$$x = A_1 \sin(kt + \alpha) - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta)$$

сау

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta).$$

Константеле арбитраре  $C_1$  ши  $C_2$  пот фи детерминате дин кондицииле инициале. Терменул, каре концине факторул  $t$  дин солуция екуацией, есте нумит *термен секулар ал екуацией*.



Фиг. 267.

**Екземплу 1.** Де о спиралэ вертикалэ, капэтул де сус ал кэрея есте фиксат, есте суспендат ун корп ку греутатя  $P=20$  н, каре комуникэ спиралей алуижира статикэ  $f_{ст}=5$  чм. Асупра корпулуй акцияязэ форца пертурбаторе  $S=20 \sin 14 t$  н (валоаря позитивэ а форцей  $S$  кореспунде форцей ындрептате ын жос, яр валоаря негативэ кореспунде форцей ындрептате ын сус). Ын моментул  $t=0$  спирада есте ынтинсэ ку 6 чм ши корпулуй и се комуникэ витеза де 10 чм/сек, ориентатэ вертикал ын жос. Сэ се афле екуация мишкэрий корпулуй ( $g=980$  чм/сек<sup>2</sup>).

**Резолваре.** Вертикала, ын лунгул кэрея се мишкэ центрул де греутате ал корпулуй, о луэм дрепт акса  $x$ . Сенсул позитив ал ей се я ын жос. Сэ луэм орижина координателор Ын позиция де екилибру а корпулуй, позиции, детерминатэ де



форца де греутате а корпулуй ши де форца де еластичитате а спиралей. Орижиня координатор се афлэ депунынд дистанца  $f_{ct}$  ын жос де ла центрул де греутате ал корпулуй, суспендат де спирала недеформатэ (фиг. 268). Сэ консидерэм о позиция арбитрарэ а корпулуй  $M$ , детерминатэ де координата  $x$ . Сэ репрезентэм форцеле, каре акцияызэ асупра корпулуй ын ачастэ позиции: форца де греутате  $\vec{P}$  — вёртикал ын жос, форца де еластичитате а спиралей  $\vec{F}$  — вёртикал ын сус ши форца пертурбатаре  $\vec{s}$  — вёртикал ын жос.

Сэ компунем екуация диференциалэ а мишкэрий корпулуй

$$m\ddot{x} = P - F + S.$$

Форца де еластичитате а спиралей  $\vec{F}$  есте егалэ ку продусул коефициентулуй де еластичитате ал спиралей прин алуижира ей ын позиция консидератэ, адикэ

$$F = c(x + f_{ct}).$$

Екуация диференциалэ капэтэ форма

$$m\ddot{x} = P - c(f_{ct} + x) + S$$

сау

$$m\ddot{x} = -cx + S.$$

Сэ ымпэрим амбеле пэрць але екуацией ла маса  $m$  ши сэ субституим валориле нумериче:

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x + \frac{S'}{m}, \quad \frac{c}{m} = \frac{Pg}{f_{ct}P} = \frac{g}{f_{ct}} = 196$$

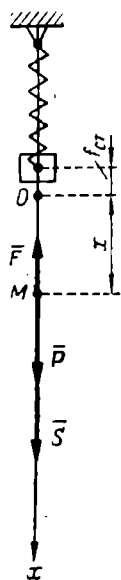
$$\text{ши } \ddot{x} = -196x + \frac{20 \sin 14t}{20} 980.$$

Екуация диференциалэ а мишкэрий аре дефинитив аспект

$$\ddot{x} + 196x = 980 \sin 14t.$$

С'а обцинут о екуацияе линиарэ неоможенэ. Фреквенца осцилацилор проприй есте  $k = 14 \frac{1}{\text{сек}}$ , фреквенца форцей пертурбатаре де асеменя есте  $p = 14 \frac{1}{\text{сек}}$ , прин урмаре, авем резонанцэ.

Солуция екуацией диференциале обцинуте есте егалэ ку сума солуций женерале а екуацией оможене ши а солуций партикуларе.



Фиг. 268.

Солуция екуаций ку партя дряптэ нулэ аре форма

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t.$$

Солуция партикулярэ поате фи детерминатэ дупэ формула (26)

$$x_2 = -\frac{980}{2 \cdot 14} t \cos 14t = -35t \cos 14t.$$

Атунч

$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 35t \cos 14t.$$

Пентру а афла константеле  $C_1$  ши  $C_2$  сэ стабилим кондицииле инициале, циньнд конт, кэ орижина координателор се афлэ ын позиция де екилибру а корпуслуй. Пентру  $t=0$  авем  $x_0=1$  чм,  $\dot{x}=10$  чм/сек.

Сэ калкулэм деривата

$$\dot{x} = -14C_1 \sin 14t + 14C_2 \cos 14t - 35 \cos 14t + 14 \cdot 35 \cdot t \sin 14t.$$

Субституим кондицииле инициале ын експрессиеле пентру  $x$  ши  $\dot{x}$ :  $1 = C_1$ ,  $10 = 14C_2 - 35$  де унде

$$C_1 = 1 \text{ ши } C_2 = 3,2.$$

Екуация мишкэрий корпуслуй аре форма

$$x = \cos 14t + 3,2 \sin 14t - 35t \cos 14t \text{ чм.}$$

Примий дой термень пот фи адушь ла форма амплитудикэ, калкулынд амплитудиня  $A$  ши фаза инициалэ  $\alpha$  ку ажурол формулелор куноскуте

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{A}.$$

**Екземплул 2.** Де о спиралэ вертикалэ, капэтул де сус ал кэрея есте фиксат ын пунктул  $B$  ал унуй апарат, есте суспендат ун корп ку греутатя  $P$ , каре комуникэ спиралей алунжиря статикэ  $f_{ст}=2$  чм. Апаратул ефектуязэ осцилаций вертикале дупэ лежя  $y = A \sin pt$  чм. Акса  $y$  есте ындрептатэ вертикал ын жос. Сэ се детермине осцилацииле форцате але корпуслуй фацэ де апарат, дакэ  $A=4$  чм ши  $p=10 \frac{1}{сек}$ .

**Резолваре.** Дин динамика мишкэрий релативе а пунктулуй материал се штие, кэ пентру а компуне екуацииле мишкэрий релативе а пунктулуй материал есте нечесар сэ адеугэм ла форцеле, каре акционязэ асупра ачестуй пункт, форца де инерциие ын мишкаря де транспорт ши форца де инерциие а луй Кориолис. Мишкаря де транспорт, адикэ мишкаря апаратулуй, есте о миш-

каре де трансляции. Деачея форца де инерции а луй Корнолис есте нулэ.

Сэ детерминэм форца де инерции ын мишкаря де транспорт:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e, \Phi_{ey} = -m\ddot{y} = Ap^2 m \sin(pt),$$

унде  $m$  есте маса корпулуй.

Вертикала, каре трече прин пунктул  $B$  ал апаратулуй, о консидерэм дрепт акса  $x$ , сенсул позитив ал кэрея ыл луэм ын жос. Ачаств акса  $x$  се сокоате кэ е легатэ рижид ку апаратул, Луэм орижиня координателор пе акса  $x$  ын позиция де екилибру а корпулуй, депунынд де ла центрул луй ын казул спиралей де-формате дистанца  $f_{ct}$  ын жос. Сэ луэм о позиции оарекаре а корпулуй ын моментул  $t$ , позиции, детерминатэ де координата  $x$ . Форца де греутате  $\bar{P}$  (фиг. 269) есте ындрептатэ вертикал ын жос. Ын позиция датэ а спиралей форца де еластичитате а ей есте ориентатэ ын сус. Форца де инерции ын мишкаря де транспорт  $\bar{\Phi}_e$  пентру о позиции арбитрарэ а корпулуй поате фи ориентатэ ши ын жос, ши ын сус (ын фиг. 269 еа есте ындрептатэ ын жос). Проекция ачестей форце де инерции се детерминэ дупэ формула

$$\Phi_{ex} = \Phi_{ey} = -m\ddot{y},$$

каре асигурэ семнул нечесар ал проекцией форцей. Проекцииле  $\Phi_{ex} = \Phi_{ey}$ , деоарече акселе  $x$  ши  $y$  ачеш ориентации.

Екуация дифференциалэ а мишкэрий корпулуй фацэ де апарат есте

$$m\ddot{x} = P - F + \Phi_{ex}$$

сау

$$m\ddot{x} = P - c(x + f_{ct}) + Ap^2 m \sin pt.$$

Цинынд конт де егалитатя  $P = cf_{ct}$ , общи-  
нем

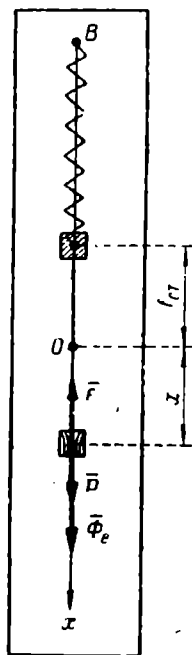
$$m\ddot{x} = -cx + Ap^2 m \sin pt$$

сау, ымпэрцинд ла  $m$ ,

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = Ap^2 \sin pt.$$

Сэ детерминэм  $\frac{c}{m}$ :

$$\frac{c}{m} = \frac{pg}{f_{ct}p} = \frac{g}{f_{ct}} = 490.$$



Фиг. 269.

Субституиунд валoаря мэримилор  $\frac{c}{m}$ ,  $A$  ши  $p$ , обцинем екуация финалэ

$$\ddot{x} + 490x = 400 \sin 10t.$$

Ачаста есте о екуация диференциалэ линиарэ партя дряптэ а кэрея есте периодикэ. Пентру а афла екуация осцилациилор форцате есте нечесар сэ гэсим солуция партикуларэ а ачестей екуаций. Обсервэм, кэ

$$k = \sqrt{490} = 7\sqrt{10} \frac{1}{\text{сек}}, \quad p = 10 \frac{1}{\text{сек}}, \quad p \neq k,$$

адикэ ну-й резонанцэ. Ын ачест каз солуция партикуларэ  $x_2$  требуетэ кэутатэ суб форма пэрций дрепте

$$x_2 = D \sin 10t.$$

Субституиунд  $x_2$  ын екуация диференциалэ ши ымпэрцинд амбеле пэрць але екуацией ла  $\sin 10t$ , обцинем

$$D = \frac{400}{490 - 100} = \frac{400}{390} \approx 1 \text{ чм.}$$

Прин урмаре, екуация осцилациилор форцате але корпулуй фацэ де апарат есте

$$x_2 = \sin 10t \text{ чм.}$$

## § 5. ОСЦИЛАЦИИЛЕ ФОРЦАТЕ АЛЕ ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ ЫН ПРЕЗЕНЦА РЕЗИСТЕНЦЕЙ

Сэ студием акум казул, кынд мишкаря ректилиние а пунктулуй материал суб акциуня форцей квазиэластикэ  $\bar{F}$  ши а форцей пертурбатоаре периодиче  $\bar{S}$  аре лок ынтр'ун медиу, каре опуне резистенцэ. Сэ пресупунем, кэ форца де резистенцэ а медиулуй есте пропорционалэ ку витеза ла путеря ынтыя  $\bar{R} = -\mu \dot{v}$ .

Фие форца пертурбатоаре  $\bar{S}$  вариязэ дупэ лежя синусулуй  $S = H \sin(pt + \delta)$ , яр форца квазиэластикэ есте  $F = c|x|$ , орижня координателор фиинд луатэ ын позиция де екилибру а пунктулуй. Сэ алкэтуим екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + S_x \text{ сау } m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x} + H \sin(pt + \delta).$$

Ымпэрцим амбеле пэрць але екуацией ла маса пунктулуй  $m$  ши нотэм ка де обичей

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n, \quad \frac{H}{m} = h.$$

Авем дефинитив урмэтоаря екуацие диференциалэ а мишкэ-рий

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (27)$$

Ам обцинут о екуацие диференциалэ неоможенэ. Дупэ кум штим, солуция ачестей екуаций есте егалэ ку солуция жене-ралэ а екуацией оможене  $x_1$  плус солуция партикуларэ  $x_2$ . Со-луция  $x_1$  детерминэ осцилацииле проприй але пунктулуй мате-риал ши есте

$$n < k, \quad x_1 = A_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

$$n > k, \quad x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$n = k, \quad x_1 = e^{-nt} (C_1 + C_2 t),$$

унде  $\lambda_1$  ши  $\lambda_2$  сынт рэдэчинице екуацией карактеристиче.

Солуция партикуларэ  $x_2$  детерминэ осцилацииле форцате але пунктулуй. Ачастэ солуцие поате фи кэутатэ суб форма

$$x_2 = D \cos(pt + \delta) + E \sin(pt + \delta)$$

сау суб форма амплитудикэ

$$x_2 = A_2 \sin(pt + \delta - \epsilon). \quad (28)$$

Мэримя  $A_2$  есте амплитудиня осцилациилор форцате, яр  $\epsilon$  — депласаря фазей осцилациилор форцате ын рапорт ку фаза форцей пертурбаторе. Сэ кэутэм солуция партикуларэ суб фор-ма (28), деоарече ын ачест каз се фак май пущине калкуле.

Сэ субституим  $x = x_2$  ын екуация (27). Сэ калкулэм ын ачест скоп  $\dot{x}_2$  ши  $\ddot{x}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_2 p \cos(pt + \delta - \epsilon), \quad \ddot{x}_2 = -A_2 p^2 \sin(pt + \delta - \epsilon), \\ &- A_2 p^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) + 2nA_2 p \cos(pt + \delta - \epsilon) + \\ &+ k^2 A_2 \sin(pt + \delta - \epsilon) = h \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (29)$$

Сэ трансформэм партя дряптэ а екуацией обцинуте:

$$\begin{aligned} h \sin(pt + \delta) &= h \sin[(pt + \delta - \epsilon) + \epsilon] = \\ &= h \sin(pt + \delta - \epsilon) \cos \epsilon + h \sin \epsilon \cos(pt + \delta - \epsilon). \end{aligned}$$

Сэ ынлокуим партя дряптэ а екуацией (29) ку експресия обцинутэ. Атунч

$$\begin{aligned} &- A_2 p^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) + 2nA_2 p \cos(pt + \delta - \epsilon) + \\ &+ k^2 A_2 \sin(pt + \delta - \epsilon) = h \sin(pt + \delta - \epsilon) \cos \epsilon + \\ &+ h \sin \epsilon \cos(pt + \delta - \epsilon). \end{aligned}$$

Группынд термений, кэре концин  $\sin(pt + \delta - \epsilon)$  ши  $\cos(pt + \delta - \epsilon)$ , авем

$$[A_2(k^2 - p^2) - h \cos \epsilon] \sin(pt + \delta - \epsilon) + [2A_2np - h \sin \epsilon] \cos(pt + \delta - \epsilon) = 0.$$

Ултура екуацие се трансформэ ын идентитате, кынд коэффициенций луй  $\sin(pt + \delta - \epsilon)$  ши  $\cos(pt + \delta - \epsilon)$  сынт егаль ку зеро.

Обдинем доуэ екуаций пентру детерминаря мэримилор  $A_2$  ши  $\epsilon$

$$A_2(k^2 - p^2) - h \cos \epsilon = 0, \quad 2A_2np - h \sin \epsilon = 0.$$

Дин ачесте екуаций гэсим

$$A_2(k^2 - p^2) = h \cos \epsilon,$$

$$2A_2np = h \sin \epsilon.$$

Сэ ридикэм амбеле пэрць але екуациилор обдинуте ла патрат ши сэ ле адунэм

$$A_2^2(k^2 - p^2)^2 = h^2 \cos^2 \epsilon, \quad 4A_2^2n^2p^2 = h^2 \sin^2 \epsilon,$$

$$h^2 = A_2^2[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2].$$

Пентру  $A_2$  ши  $\epsilon$  авем

$$A_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \sin \epsilon = \frac{2A_2np}{h}, \quad \cos \epsilon = \frac{A_2(k^2 - p^2)}{h}$$

ши

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (30)$$

Прин урмаре, солудия партикуларэ, адикэ екуация осцилациилор форцате есте

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon). \quad (31)$$

Дин експресия пентру  $\sin \epsilon$  [екуация (30)] реесе, кэ ынтод-  
дяуна  $\sin \epsilon > 0$ , ку алте кувинте, унгул  $\epsilon$  се афлэ ын примул сау  
ал дойля кадран ши поате фи детерминат, де екземплу, нумай  
дупэ тангентэ.

Амплитудиня осцилациилор форцате  $A_2$  вариязэ одатэ ку ва-  
риация мэримилор  $k$ ,  $n$ ,  $p$ . Сэ черчетэм ла максимум ши мини-  
мум амплитудиня осцилациилор форцате ын казул кынд вария-  
зэ нумай фреквенца форцей пертурбаторе, адикэ кынд вариязэ  
нумай мэримя  $p$ .

Амплитудиня  $A_2$  [формула (30)] есте

$$A_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}.$$

Ымперцинд нумэрэторул ши нумиторул экспресией дин партя дряптэ ла  $k^2$ , обцинем

$$A_2 = \frac{h}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}$$

Сэ нбтэм:  $\frac{p}{k} = z$  — фреквенца фэрэ дименсиуне а форцей пертурбатоаре (фактор де декалаж);

$\frac{n}{k} = b$  — фактор де амортизаре.

Сэ кларификэм сенсул мэримий  $\frac{h}{k^2}$ ; сэ гэсим ын ачест скоп депласаря статикэ, детерминатэ де валоаря максимэ а форцей пертурбатоаре

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{mh}{mk^2} = \frac{h}{k^2}$$

Сэ ынтродучем нотаций ной

$$A_2 = \frac{A_0}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2z^2}} \text{ сау } A_2 = \lambda A_0,$$

унде

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2z^2}} \quad (32)$$

Мэримя  $\lambda$  есте нумитэ *коэффициент де динамичитате*.

Ла вариация фреквенцей форцей пертурбатоаре вариязэ нумай  $z$ , прин урмаре, коэффициентул де динамичитате вариязэ де асемenea ын функции де  $z$ .

Дин формула  $A_2 = \lambda A_0$  реесе, кэ мэримиле  $\lambda$  ши  $A_2$  атинг симулан валорь максимале ши минимале. Черчетаря ла максимум ши минимум а амплитудиний  $A_2$  се редуче ла черчетаря аналожикэ а коэффициентулуй де динамичитате  $\lambda$ . Сэ консидерэм ын ачест скоп экспресия де суб рэдэчина патратэ де ла нумиторул формулей пентру  $\lambda$  (32). Сэ нбтэм

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4b^2z^2.$$

Есте евидент, кэ атунч кынд мэримя  $f(z)$  аре максимум, мэримиле  $\lambda$  ши  $A_2$  ау минимум, ши, инверс, мэримиле  $\lambda$  ши  $A_2$  ау максимум атунч, кынд мэримя  $f(z)$  аре минимум. Сэ калкулэм деривателе ынтыя ши а доуа але функцией  $f(z)$ :

$$f'(z) = -4z(1-z^2) + 8b^2z = -4z(1-z^2-2b^2),$$

$$f''(z) = -4 + 12z^2 + 8b^2.$$

Сэ егалэм  $f'(z)$  ку zero ши сэ афлэм валоаря критикэ а мэримий  $z$ :

$$f'(z) = 0 \text{ сау } 4z(1 - z^2 - 2b^2) = 0,$$

де унде

$$z_1 = 0; z_2 = \sqrt{1-2b^2}.$$

А доуа валoare критикэ  $z_2$  есте посибилэ нумай дакэ  $1-2b^2 > 0$ , адикэ пентру  $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$  сау пентру  $n < \frac{k}{\sqrt{2}}$ .

Пентру валoаря критикэ  $z=0$

$$f''(0) = -4 + 8b^2 = -4(1-2b^2).$$

Дупэ семнул ачестей деривате тражем конклузия, кэ функция  $f(z)$  аре максимум, яр  $\lambda$  ши  $A_2$  минимум ын пунктул  $z=0$  атунч, кынд  $1-2b^2 > 0$ , адикэ пентру  $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$  сау пентру

$n < \frac{k}{\sqrt{2}}$ ; функция  $f(x)$  аре минимум, яр  $\lambda$  ши  $A_2$  максимум, пентру  $z=0$  атунч, кынд  $1-2b^2 < 0$ , адикэ пентру  $b > \frac{1}{\sqrt{2}}$  сау пентру  $n > \frac{k}{\sqrt{2}}$ .

Пентру  $1-2b^2=0$  авем  $f''(0)=0$  ши пентру а жудека деспре карактерул вариацией функцией ын пунктул  $z=0$  требуе сэ куноаштем деривателе urmatoare:

$$f'''(z) = 24z, \quad f^{IV}(z) = 24;$$

пентру  $z=0$

$$f'''(0) = 0 \text{ ши } f^{IV}(0) > 0.$$

Ын ачест каз, адикэ пентру  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  сау пентру  $n = \frac{k}{\sqrt{2}}$  функция  $f(z)$  аре минимум, яр  $\lambda$  ши  $A_2$  — максимум, деoарече прима дериватэ, каре ну-й егалэ ку zero, есте о дериватэ де ордин пар ши позитивэ.

Се менционэм кэ пентру  $1-2b^2=0$  а доуа валoарe критикэ а вариабилей  $z$  есте нулэ, адикэ  $z_2=0$ .

Пентру валoаря критикэ  $z = \sqrt{1-2b^2}$  аналог дакэ  $1-2b^2 > 0$ , адикэ атунч кынд екзистэ а доуа валoарe критикэ а мэримий  $z$ , гэсим

$$f''(\sqrt{1-2b^2}) = -4 + 12(1-2b^2) + 8b^2 = 8(1-2b^2),$$

$$f''(\sqrt{1-2b^2}) > 0.$$

Де аич пентру  $z = \sqrt{1-2b^2}$  функция  $f(z)$  аре минимум, яр  $\lambda$  ши  $A_2$  максимум. Ачест каз есте посибил дакэ  $1-2b^2 > 0$ , адикэ пентру  $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$  сау пентру  $n < \frac{k}{\sqrt{2}}$ . Ын ачест каз фреквенца критикэ а форцей пертурбатoаре есте

$$p_{кр} = kz = k \sqrt{1 - 2\frac{n^2}{k^2}} = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \quad (33)$$

Валоаря максимэ а амплитудиний  $A_2$  [формула (30)] есте

$$A_{2max} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - k^2 + 2n^2)^2 + 4n^2(k^2 - 2n^2)}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (34)$$



Се нумеште резонанцэ ши аич, казул, кынд фреквенца форцей пертурбатонаре  $p$  коинчиде ку фреквенца осцилацилор проприй  $k$ .

Мэримя амплитудиний  $A_2$  ын казул резонанцей поате фи детерминатэ дупэ формула (30), консидерынд  $p=k$ ,

$$A_{2\text{рез}} = \frac{h}{2nk}. \quad (35)$$

Компарынд формулеле (34) ши (35), ведем, кэ

$$A_{2\text{max}} > A_{2\text{рез}}.$$

Прин урмаре, амплитудиня осцилацилор форцате аре максимум ну ын казул резонанцей, чи ла о фреквенцэ май микэ а форцей пертурбатонаре.

Сэ конструим графикул вариацией коефициентулуй де динамичитате ын функции де  $z$ . Пе акса оризонталэ депунем  $z$ , яр пе чя вертикалэ —  $\lambda$ . Конформ кондициилор проблемей  $z = \frac{p}{k}$  есте о мэриме позитивэ. Дин експресия пентру  $\lambda$  [формула (30)] пентру  $z=0$  авем  $\lambda=1$  валоаря мэримий  $b$  фиинд арбитрарэ. Кынд  $z \rightarrow \infty$ , авем  $\lambda \rightarrow 0$ .

Сэ нотэм пе акса  $z$  пунктеле  $z=1$  (резонанца) ши  $z=\sqrt{1-2b^2}$ . Се штие, кэ пентру  $n < \frac{k}{\sqrt{2}}$  мэримя  $\lambda$  аре минимум кынд  $z=0$  ши максимум кынд  $z=\sqrt{1-2b^2}$ , яр ын казул  $n \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$  мэримя  $\lambda$  аре максимум пентру  $z=0$ , неавынд алте валорь экстремале. Обцинем о фамилие де курбе пентру диферите валорь але мэримий  $b$ . Дакэ  $n < \frac{k}{\sqrt{2}}$ , курбеле ау минимум ши максимум, яр дакэ  $n \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$  — нумай максимум пентру  $z=0$ .

Ын казул кынд  $z \rightarrow \infty$  тоате курбеле се апропие немэржинит де акса  $z$ . Ачесте курбе сынт репрезентате ын фигура 270. О астфел де конструкции се нумеште диаграмэ де резонанцэ.

Сэ консидерэм акум унгул де дефазаж  $\varepsilon$ . Дупэ кум с'а менционат, унгул  $\varepsilon$  се афлэ ын примул сау ал дойля кадран ши поате фи детерминат дупэ формула (30)

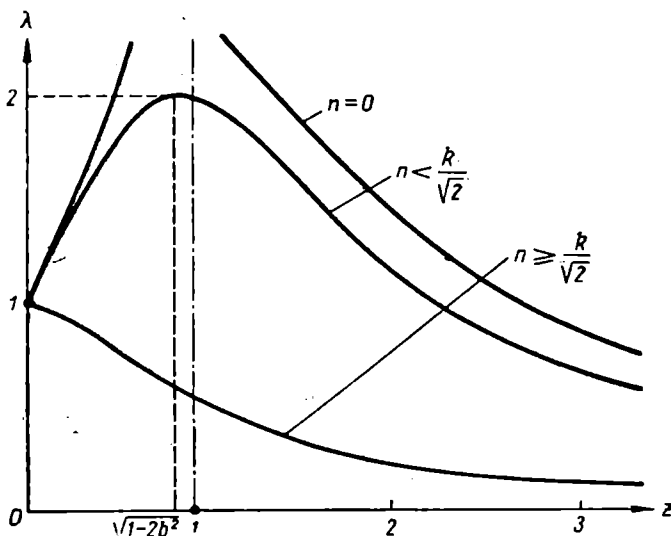
$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Ымпэрцинд нумэрэторул ши нумиторул дин партя дряптэ а ачестей експресий ла  $k^2$ , обцинем  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2bz}{1-z^2}$ . Вом консидера дрепт вариабилэ нумай мэримя  $z$ . Сэ деривэм ын рапорт ку  $z$ :

$$\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{2b(1-z^2) + 2z \cdot 2bz}{(1-z^2)^2} = \frac{2b(1+z^2)}{(1-z^2)^2}.$$

Есте евидент, кэ  $\frac{d\varepsilon}{dz} > 0$  пентру орьче  $z$ . Прин урмаре, функция  $\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{2bz}{1-z^2}$  есте о функции монотон крескэтоаре де вариабилла  $z$ . Пентру а конструи графикул гэсим

$$z=0, \varepsilon=0; z=1, \varepsilon=\frac{\pi}{2}.$$



Фиг. 270.

Дакэ  $z \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{tg} \varepsilon \rightarrow 0$  ши обцине валорь негативе. Прин урмаре,  $\varepsilon \rightarrow \pi$ . Ачесте резултате сынт жусте пентру орьче валoare а мэримий  $b$ . Атрибуинд диферите валорь мэримий  $b$ , обцинем о фамилие де курбе. Ачесте курбе сынт репрезентате ын фигура 271.

Менционэм, кэ диференца де фазэ а осцилацилор форцате ын рапорт ку фаза форцей пертурбатoare ын казул резонанцей есте егалэ ку  $\frac{\pi}{2}$  атыт ын презенца резистенцей, кыт ши ын липса ей.

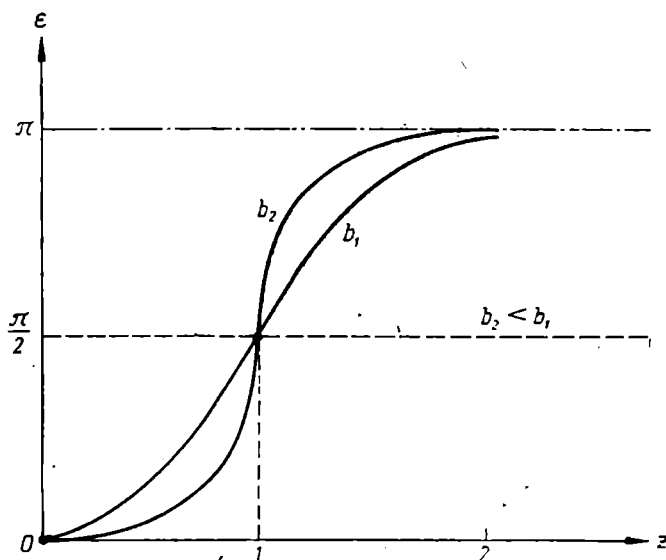
Сэ ремаркэм проприетэциле фундаментале але осцилацилор форцате ын презенца форцей де резистенцэ, пропорционале ку витеза ла путеря ынтыя:

1) осцилацилле форцате сынт осцилаций неамортизате авынд фреквенца егалэ ку фреквенца форцей пертурбатoare;

2) осцилацилле форцате ну депинд де кондицииле инициале; амплитудиня осцилацилор форцате есте ынтотдяуна о мэриме финитэ;

3) ла резонанце амплитудиня осцилацилор форцате есте константэ;

4) дупэ ун интервал дестул де маре де тимп, адикэ ла ун момент  $t$  дестул де маре, осцилацииле проприй але пунктулуй материал пот фи неглижате ши путем консидера  $x_1 \approx 0$ ,  $x \approx x_2$ .



Фиг. 271.

**Екземплу.** Ун корп ку греутатя  $P=12$  н есте ситуат пе ун план оризонтал нетед. Де корп есте легатэ о спиралэ, алт капэт ал кэрея есте фиксат ынтр'ун пункт фикс. Акса спиралей есте оризонталэ, коефициентул де еластичитате ал спиралей  $c=24$  н/см.

Асупра корпулуй, ын лунгул аксей спиралей, акционязэ форца пертурбатоаре  $S=20 \sin pt$  н. Корпул, скос дин старя де екилибру, ефектуязэ осцилаций ректилиний ын медиул, форца де резистенце а кэруя есте пропорционалэ ку витеза ши есте

$$R=\mu v,$$

унде  $v$  есте витеза експриматэ ын см/сек,  $\mu$  — коефициентул де резистенце егал ку  $\mu=0,4$  н·сек/см.

Сэ се детермине фреквенца критикэ а форцей пертурбатоаре, ла каре амплитудиня осцилацилор форцате есте максималэ, ши мэримя ачестей амплитудинь максимале.

**Резолваре.** Мишкаря корпулуй аре лок ын кондицииле де май сус. Фреквенца критикэ а форцей пертурбатоаре поате фи калкулатэ дупэ формула (33)

$$p_{кр} = \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

Сэ детерминэм  $k$  ши  $n$ :

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{24 \cdot 980}{12} = 1960, \quad k = 44,3 \frac{1}{\text{сек}},$$

$$n = \frac{\mu}{2m} = \frac{0,4 \cdot 980}{2 \cdot 12} = 16,33 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Фреквенца критикэ а форцей пертурбатоаре есте

$$p_{\text{кр}} = \sqrt{1960 - 2 \cdot 16,33^2} = 37,8 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Детерминэм валоаря максималэ а амплитудиний осцилацилор форцате дупэ формула (34):

$$A_{\text{мах}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}$$

обцинем

$$h = \frac{H}{m} = \frac{2 \cdot 980}{1,2} = 1633.$$

$$A_{\text{мах}} = \frac{1633}{2 \cdot 16,33 \sqrt{1960 - 16,33^2}} = \frac{50}{\sqrt{1960 - 266,67}} \approx 1,22 \text{ чм.}$$

Обсервэм, кэ фреквенца де резонанцэ а форцей пертурбатоаре  $p = k = 44,3 \frac{1}{\text{сек}}$ . Пентру амплитудиня осцилацилор форцате ла резонанцэ дупэ формула (35) авем

$$A_{\text{рез}} = \frac{1633}{2 \cdot 16,33 \cdot 44,3} = \frac{50}{44,3} = 1,13 \text{ чм.}$$

Се веде, кэ амплитудиня осцилацилор форцате ла резонанцэ диферэ лущин де валоаря амплитудиний максимале.

## § 6. ПЕНДУЛУЛ МАТЕМАТИК ШИ ЧЕЛ ФИЗИК

Се нумеште *пендул математик* ун пункт материал греу, че се мишкэ суб акциуня форцей де греутате дупэ о чиркумферинцэ, ситуатэ ын планул вертикал. Ачастэ мишкаре поате фи ефектуатэ чел май симплу ын фелул урмэтор: суспендэм ун корп ку дименсиунь миць де ун фир импондерабил ши инекстенсibil ши-й комуникэм о мишкаре ын планул вертикал. Лунжимя фирулуй  $OM = l$  есте нумитэ лунжине а пендулулуй,  $O$  есте ун пункт фикс,  $M$  — ун пункт материал. Вом нота ку  $\varphi$  унгул де абатере а пендулулуй де ла вертикалэ (фиг. 272). Унгул  $\varphi$  есте консидерат позитив ла мэсураля луй де ла вертикалэ ын сенсул опус мишкэрий ачелор де часорник. Асупра пунктулуй материал акционязэ форца де греутате  $\bar{P}$  ши реакциуня фирулуй  $\bar{S}$ . Екуация де базэ а динамичий есте  $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{S}$ .

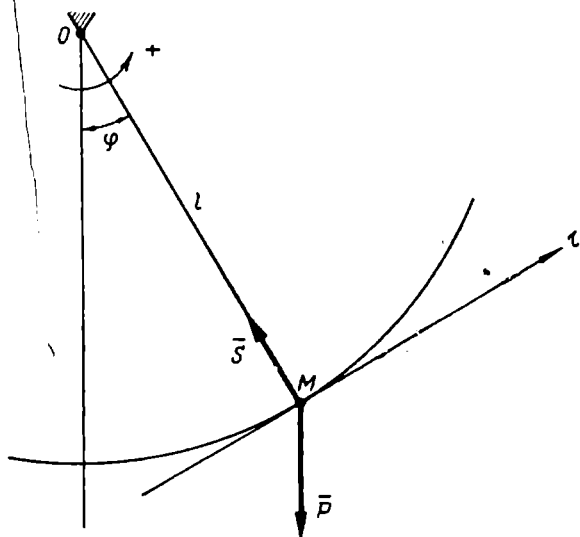
Сэ проектэм амбеле пэрць але ачестей екуаций векториале пе танжента ла траектория пунктулуй, адикэ пе танжента ла чиркумферинцэ. Сэ консидерэм дирекция позитивэ а танжентей ын сейсул крештерий унгулуй  $\varphi$ .

Обдинем

$$ma_{\tau} = P_{\tau} \text{ say } m \frac{dv_{\tau}}{dt} = -P \sin \varphi.$$

Сэ ынлокуим  $v_{\tau} = l\dot{\varphi}$  ши сэ ымпэрцим амбеле пэрць але екуацией ла  $ml$ :

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \text{ say } \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$



Фиг. 272.

Ам обцинут о екуации диференциалэ нелиниарэ, каре ну поате фи интегратэ ын функций елементарэ. Ынсэ пентру унгурь  $\varphi$  мичь путем консидера  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Ын ачест каз екуация мишкэрий капэтэ форма

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

say, нотынд  $\frac{g}{l} = k^2$ ,

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Екуация обцинутэ есте екуация диференциалэ а осцилацилор армониче либере. Солуция ей есте

$$\varphi = \varphi_0 \sin (kt + \alpha).$$

Амплитудиня унгуларэ  $\varphi_0$  ши фаза инициалэ  $\alpha$  се детерминэ дин кондицииле инициале.

Осцилацииле армониче але пендулулуй, каре ау лок ла ун-  
гюрь мичь  $\varphi$  сынт нумите осцилаций мичь.

Периода ачестор осцилаций мичь есте

$$T = \frac{2\pi}{k} \text{ сау } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (36)$$

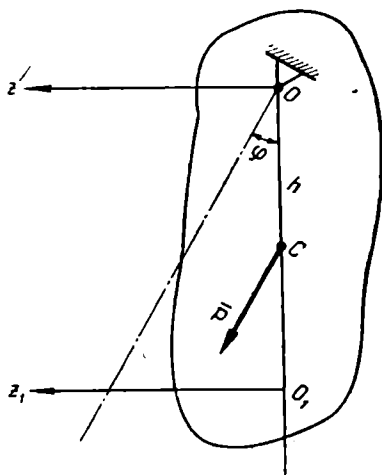
Ын конформитате ку формула (36) периода осцилациилор мичь але пендулулуй математик ну депинде де амплитудиня ун-  
гуларэ ши де фаза инициалэ. Периода есте детерминатэ де лун-  
жия пендулулуй ши де акчелерация кэдерий либере  $g$ . Се штие,  
кэ акчелерация  $g$  вариэзэ ла вариация латитудиний локулуй  
ши а ынэлцимий де асупра нивелулуй мэрий. Прин урмаре, ын  
диферите локурь але глобулуй пэмынтеск периоде осцила-  
циилор мичь але пендулелор математиче де ачеш лунжике сынт  
диферите.

Ын кондицииле инициале  $t=0$ ,  $\varphi=\alpha$ ,  $\dot{\varphi}=0$ , адикэ пентру ун  
унгь инициал де абатере а пендулулуй де ла вертикалэ ши ла  
о витезэ инициалэ нулэ, мишкаря пендулулуй есте о мишкаре  
осцилаторие. Ын ачест каз осцилацииле ну сынт армониче, ам-  
плитудиня унгуларэ а осцилациилор есте егалэ ку унгул инициал  
де абатере  $\alpha$ , яр периода осцилациилор депинде де ачестэ ам-  
плитудине.

Сэ скрием формула, каре експримэ периода осцилациилор  
пендулулуй математик суб форма уней терий инфините:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Се нумеште *пендул фи-  
зик* ун рижид авынд о аксэ  
де ротацие оризонталэ фиксэ,  
че ну трече прин центрул де  
греутате, ши каре се мишкэ  
суб акциуня форцей де  
греутате. Акса де ротацие  
есте нумитэ аксэ де суспен-  
даре а пендулулуй физик. Сэ  
нотэм ачестэ аксэ ку  $z$  ши  
сэ луэм сенсул позитив ал  
ей спре обсерватор. Ын фи-  
гура 273 есте репрезентатэ  
секциуня корпулуй ку ун  
план, каре трече прин цент-  
рул де греутате  $C$  ал пенду-  
лулуй, перпендикуляр пе ак-  
са де суспендаре. Аич  $O$  есте  
пунктул де интерсекцие ал



Фиг. 273.

ачестуй план ку акса де суспендаре,  $\varphi$  — унгул де абатере ал пендулулуй де ла вертикалэ. Сэ нотэм дистанца де ла чентрул де греутате ал пендулулуй пынэ ла акса де суспендаре прин

$$OC = h.$$

Сенсул позитив ал моментелор форцелор ши ал елементелор унгуларе але мишкэрий се консидерэ ын сенсул контрар мишкэрий ачелор де часорник (дакэ привим дин партя позитивэ а аксей де суспендаре  $z$ ). Екуация дифференциалэ а ротацией пендулулуй ын журул аксей де суспендаре  $z$  есте

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z(\bar{P}) = -Ph \sin \varphi.$$

Моментеле реакциунилор рулменцилор ын рапорт ку акса  $z$  сынт нуле. Аич  $J_z$  есте моментул де инерции ал пендулулуй ын рапорт ку акса де суспендаре. Сэ скрием ачастэ екуацие суб форма

$$\ddot{\varphi} + \frac{Ph}{J_z} \sin \varphi = 0.$$

Сэ студиём нумай осцилацииле мичь, пунынд  $\sin \varphi = \varphi$ . Ын ачест каз обцинем  $\ddot{\varphi} + \frac{Ph}{J_z} \varphi = 0$  сау  $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$ , унде  $k^2 = \frac{Ph}{J_z}$ . Ултима екуацие есте екуация дифференциалэ а осцилациилор армониче либере. Периоада осцилациилор мичь але пендулулуй физик есте

$$T = \frac{2\pi}{k} \text{ сау } T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Ph}}. \quad (37)$$

Дин формула (37) реесе, кэ периоада осцилациилор мичь але пендулулуй физик ну депинде де амплитудиня унгуларэ ши фаза инициалэ.

Сэ детерминэм акум лунжия пендулулуй математик, периоада де осцилацие а кэруя есте егалэ ку периоада де осцилацие а пендулулуй физик. Егалынд периоаделе де осцилацие але пендулелор математик ши физик [формуле (36) ши (37)] обцинем

$$\frac{l}{g} = \frac{J_z}{Ph}, \quad l = \frac{J_z g}{Ph} = \frac{J_z}{Mh}, \quad (38)$$

унде  $M$  есте маса пендулулуй физик.

Лунжия обцинутэ  $l$  есте нумитэ лунжине редусэ а пендулулуй физик.

Сэ трансформэм партя дряптэ а формулей (38) пентру  $l$ , фолосинд формула луй Штайнер

$$l = \frac{J_z}{Mh} = \frac{J_c + Mh^2}{Mh} = h + \frac{J_c}{Mh}. \quad (39)$$

Аич  $J_C$  есте моментул де инерции ал пендулулуй ын радорт ку акса де ротации, каре трече прин центрул де греутате ал пендулулуй, паралел ла акса де суспендаре а луй.

Дин формула (39) реесе, кэ  $l > h$ .

Сэ депунем пе дряпта  $OC$ , ынчепынд ку пунктул  $O$  сегментул  $OO_1 = l$  (фиг. 273). Пунктул  $O_1$  есте нумит *центру де балансаре ал пендулулуй физик*. Ел се афлэ май жос декыт центрул де греутате. Акса  $O_1z_1$  каре трече прин центрул де балансаре  $O_1$  паралел ку акса де суспендаре  $z$ , есте нумитэ *аксэ де балансаре а пендулулуй физик*. Фие акса де балансаре а пендулулуй физик есте акса де суспендаре а луй; обцинем ун алт пендул физик, каре осцилязэ ын журул аксей  $O_1z_1$ . Сэ калжулэм лунжия редусэ а ачестуй пендул ноу.

Дин формула (38), апликынд формула луй Штайнер, обцинем

$$l_1 = \frac{I_{z1}}{M(l-h)} = \frac{J_C + M(l-h)^2}{M(l-h)} = l-h + \frac{J_C}{M(l-h)}.$$

Дин формула (39) резултэ

$$J_C = Mh(l-h).$$

Субституинд  $J_C$  обцинем дефинитив

$$l_1 = l-h + \frac{Mh(l-h)}{M(l-h)} = l, \quad (40)$$

адикэ лунжия редусэ а пендулулуй физик ноу есте егалэ ку лунжия редусэ а пендулулуй пречедент.

Есте евидент, кэ депунынд пе дряпта  $O_1C$  де ла пунктул  $O_1$  ун сегмент де лунжия  $l_1 = l$  обцинем пунктул  $O$  — центрул де балансаре ал пендулулуй ноу. Акса де балансаре а пендулулуй ноу коинчиде ку акса де суспендаре а пендулулуй де май ынаинте. Ачастэ конклузие експримэ концинутул теоремей луй Хюйгенс.

Акса де суспендаре ши акса де балансаре сынт аксе речипроче, адикэ дакэ луэм акса де балансаре дрепт аксэ де суспендаре, атунч акса де суспендаре де май ынаинте девине аксэ де балансаре. Есте евидент, кэ периоада осцилацилор пендулулуй ын журул аксей де суспендаре есте егалэ ку периоада осцилацилор ын журул аксей де балансаре, дакэ ултима аксэ есте луатэ дрепт аксэ де суспендаре.

*Екземплу.* О сырмэ субцире оможенэ есте ындоитэ асфел, ынкыт формязэ ун триунгь екилатерал, латура кэруя есте егалэ ку  $l$ . Вырфул ачестуй триунгь есте суспендат пе о аксэ оризонталэ фиксэ, ын журул кэрея триунгюл ефектуязэ осцилаций мичь ын планул сзу.

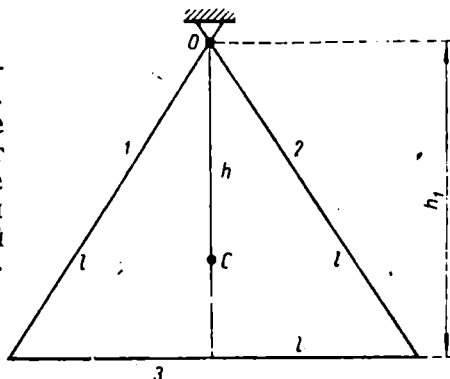
Сэ се детермине периоада осцилацилор мичь (фиг. 274).



Резолваре. Периода осцилацилор мичь поате фи детерминатэ дупэ формула (37). Акса де суспендаре  $z$  а пендулулуй трече прин вырфул триунгюлуй перпендикуляр пе планулуй. Нотэм маса пендулулуй ку  $m$ ; консидерэм латуриле триунгюлуй ниште вержеле оможене ку маса  $\frac{m}{3}$ .

Нумеротэм латуриле триунгюлуй ку 1, 2, 3 (фиг. 274). Моментеле де инерции але латурилор 1 ши 2 ын рапорт ку акса  $z$  пот фи детерминатэ дупэ формула моментулуй де инерции ал вержелей оможене ын рапорт ку экстремитатя са

$$J_{1z} = J_{2z} = \frac{1}{8} \cdot \frac{m}{3} l^2 = \frac{1}{9} ml^2.$$



Фиг. 274.

Моментул де инерции ал латурий 3 поате фи калкулат, апликынд формула моментулуй де инерции ал вержелей ын рапорт ку мижлокул сзу ши теорема луй Штайнер:

$$J_{3z} = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3} l^2 + \frac{m}{3} h_1^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{3} l^2 + \frac{m}{3} \cdot \frac{3}{4} l^2 = \frac{5}{18} ml^2,$$

унде  $h_1 = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  есте ынэлцимя триунгюлуй.

Моментул де инерции ал пендулулуй ын ынтрежиме ын рапорт ку акса де суспендаре есте

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} + J_{3z} = \frac{2}{9} ml^2 + \frac{5}{18} ml^2 = \frac{1}{2} ml^2.$$

Мэрия  $h$  дин формула (37) есте дистанца де ла центрул де греутате ал пендулулуй пынэ ла акса де суспендаре

$$h = OC = \frac{2}{3} h_1 = \frac{2}{3} l \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Сэ детерминэм акум периода осцилацилор мичь

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2 \cdot \sqrt{3}}{2mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{g}}.$$

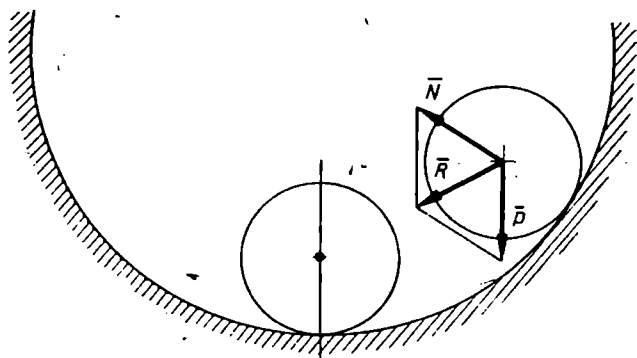
Пентру  $l=30$  чм периоада осцилацилор мичь есте апроксиматив де 1 сек:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{980}}=2\sqrt{\frac{\sqrt{3 \cdot 30 \cdot \pi^2}}{2 \cdot 980}} \approx 2\sqrt{\frac{\sqrt{3 \cdot 30}}{2 \cdot 100}}=\sqrt{\frac{3 \cdot 3}{5}} \approx \sqrt{\frac{5,20}{5}} \approx 1 \text{ сек.}$$

## § 7. СТАБИЛИТАТЯ ЕКИЛИБРУЛУЙ

### ПРИНЦИПИЛЕ ЖЕНЕРАЛЕ

Дакэ рижидул се афлэ ын позиция де екилибру, атулч форцеле, каре акцияязэ асупра луй формязэ ун систем екилибрат. Сэ ындепэртэм пущин корпул дин позиция де екилибру. Ын казул женерал, корпул абэтут де ла позиция де екилибру ну се афлэ ын екилибру, яр форцеле, каре акцияязэ асупра луй, ну формязэ ун систем екилибрат де форце. Ачесте форце сау тинд сэ ынтоаркэ корпул ын позиция де екилибру, сау ши май мулт сэ-л ындепэртезе де ачастэ позиции. Ын примул каз екилибрул есте нумит *стабил*, ын ал дойля каз — *инстабил*. Есте посибил ка корпул, кэруя и с'а комуникат о оарекаре абатере микэ де ла позиция де екилибру, рэмыне ын екилибру ши ын ачастэ позиции ноуэ. Ын ултимул каз се спуне, кэ корпул се афлэ ын екилибру *индиферент*.



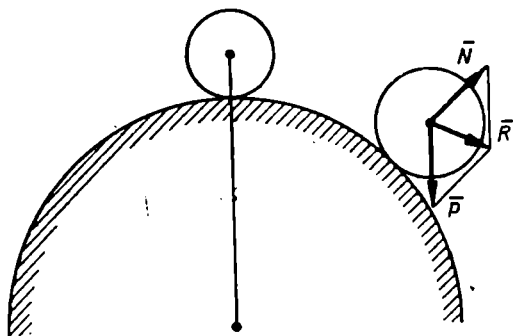
Фиг. 275.

Дрепт екземплу де екилибру стабил путем консидера екилибрул уней биле греле, ашезате пе фундул уней купе конкаве (фиг. 275).

Ын позиция де екилибру асупра ачестей биле акцияязэ доуэ форце, каре се екилибрызэ: форца де греутате ши реак-

циуня купей. Дупэ ындепэртаря билей дин позиция де екилибру форца де греутате ши реакциуня купей, каре ын казул супрафеей нетеде а купей есте ындрептатэ дупэ нормала ла ачастэ супрафацэ, креазэ о форцэ резултантэ, каре тинде сэ ынтоаркэ била ын позиция де екилибру.

Позиция билей пе ырфул уней купе нетеде де асемения есте о позиция де екилибру, ынсэ ачест екилибру есте инстабил. Дупэ ындепэртаря билей дин позиция де екилибру, резултанта форцей де греутате а билей ши а реакциуний супрафеей тинде сэ ындепэртезе била де ла позиция де екилибру (фиг. 276). Екилибрул билей пе ун план оризонтал есте ун екземплу де екилибру



Фиг. 276.

индиферент, деоарече дупэ депласаре била рэмыне ын екилибру ын позиция ноуэ.

Тоате челе експусе май сус деспре ун сингур корп сынт карактеристиче ши пентру ун систем де корпуры. Ын практикэ есте фоарте импортант сэ куноаштем карактерул екилибрулуй корпулуй сау а системулуй де корпуры, деоарече корпул сау системул де корпуры пот рэмыне ын старе де екилибру ун тимп ынделунгат нумай ын казул екилибрулуй стабил. Шокуриле ынтымплэтоаре скот системул механик дин позиция де екилибру инстабил ши ел тот май мулт ши май мулт се ындепэртизэ де ла позиция де екилибру. Ачесте шокуры ынтымплэтоаре ну пот фи евитате ын принципну. Ын казул екилибрулуй стабил системул механик, скос дин позиция де екилибру де шокуриле ынтымплэтоаре, ефектуязэ осцилаций ын апрошierea позицией де екилибру сау се апропие де ачастэ позиция фэрэ а осцила.

Проблема детерминэрий карактерулуй стэрий де екилибру а корпулуй сау а системулуй де корпуры ын женерал есте о проблемэ дестул де компликатэ ши ну поате фи резолватэ прин методеле статичий елементаре. Дефиниция екзактэ а стабилитэций екилибрулуй а фост елаборатэ ла сфыршитул секолулуй трекут ын лукрэриле савантулуй рус А. М. Ляпунов. Сэ дедучем ачастэ дефиницие пентру ун систем механик ку ун нумэр  $n$  де

граде де либертате. Сэ нотэм координателе жєнерализате ку  $q_1, q_2, \dots, q$ , ши сэ консидерэм, кэ еле се мэсоарэ де ла позиция де екилибру. Прин урмаре, ын позиция де екилибру тоате координателе жєнерализате сынт нуле. Сэ ындепэртэм системул дин позиция де екилибру, комуникинд пунктелор луй унеле витезе инициале. Акум системул се мишкэ.

Сэ нотэм ку  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$  валориле инициале але координателор жєнерализате, яр ку  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$  валориле инициале але витезелор жєнерализате. Екилибрул системулуй есте нумит стабил, дакэ пентру ун нумэр позитив орькыт де мик  $\epsilon$  пот фи гэсите асфел де мэрымь позитиве  $\gamma_1$  ши  $\gamma_2$ , ынкыт пентру валориле инициале але координателор ши витезелор жєнерализате, че сатисфак кондицииле  $|q_k^0| < \gamma_1$  ши  $|q_k^0| < \gamma_2$ , ын тоате моментеле ултериоаре де тимп аре лок кондиция

$$|q_k| < \epsilon,$$

унде

$$k=1, 2, \dots, n.$$

Прин урмаре, пентру орьче депласэрь инициале дестул де мичь ши витезе инициале мичь де дериваре де ла позиция де екилибру, системеле ну депэшеск о мэрыме арбитрарэ де асеменя дестул де микэ.

### Теорема луй Лагранж-Дирихле

Теорема луй Лагранж — Дирихле пермите детерминаря стабилитэций екилибрулуй пентру системеле консервативе. Системул де пункте материала есте нумит *консерватив*, дакэ тоате форцеле, каре акционязэ асупра системулуй сынт потенциале ши дакэ легэтуриле импусе системулуй сынт идеале ши стационаре.

*Екилибрул системулуй консерватив есте стабил, дакэ енергия потенциалэ а системулуй ын позиция де екилибру аре минимум.*

Вом консидера, кэ енергия потенциалэ а системулуй  $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$  ын позиция де екилибру есте егалэ ку zero. Ачаста ынсямнэ, кэ ла детерминаря енержией потенциале дрепт позиция zero а системулуй с'а луат позиция де екилибру. Аша дар, ын позиция де екилибру енергия потенциалэ  $P$  а системулуй есте егалэ ку zero, яр ын конформитате ку кондицииле теоремея аре минимум, прин урмаре, ынтр'о вечинэате дестул де микэ а позицией де екилибру енергия потенциалэ есте май маре ка zero:  $P \geq 0$ .

Сэ луэм ун нумэр оарекаре позитив  $\epsilon$  ши сэ черчетэм вариация енержией потенциале а системулуй ла вариация координателор жєнерализате ын интервалул  $(-\epsilon, +\epsilon)$ , инклузив ши

маржиниле ачестуй интервал. Сэ адмitem, кэ  $|q_1| = \epsilon$ , яр челеалте координате пот обцине орьче валорь ын лимителе  $\pm \epsilon$ . Ла вариация координателор вариэз ши енержія потенциалэ. Сэ нотэм ын ачест каз ку  $P_1$  валоаря минимэ а енержіей потенциалэ,  $P_1$  есте о мэриме позитивэ, деоарече ын вечинэтатя позиции де екилибру  $P > 0$ .

Сэ пресупунем акум, кэ  $|q_2| = \epsilon$ , яр челеалте координате обцин валорь арбитраре ын лимителе  $\pm \epsilon$ . Сэ нотэм валоаря минималэ а енержіей потенциалэ ын ачест каз ку  $P_2$ , унде  $P_2 > 0$ . Континуунд ши май департе ын ачест мод, обцинем ун шир де мэримь позитиве  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Нотэм ку  $P^*$  валоаря минималэ а терменилор ачестуй шир.

Дакэ енержія потенциалэ а системулуй

$$P < P^*, \quad (a)$$

атунч нич уна дин координателе жэнерализате ну атинже маржиниле интервалулуй  $\pm \epsilon$ . Астфел, дакэ  $|q| = \epsilon$ , унде  $q$  есте о координатэ оарекаре жэнерализатэ, енержія потенциалэ а системулуй  $P \geq P^*$  ши, прин урмаре, кондиция (a) ну есте сатисфэкутэ.

Фие акум системулуй и се комуникэ депласэрь ши витезе инициале. Ын акорд ку теорема деспре консерваря енержіей механиче авем

$$T + P = T_0 + P_0,$$

унде  $T_0$  ши  $P_0$  сынт енержія чинетикэ ши чя потенциалэ а системулуй ла ынчепутул мишкэрий, яр  $T$  ши  $P$  — ынтр'ун момент оарекаре ал мишкэрий.

Дупэ дефиницие  $T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 > 0$  ши, прин урмаре,  $P < T_0 + P_0$ . Сэ консидерэм абатериле ши витезеле инициале ын аша фел, ка  $T_0 < \frac{1}{2} P^*$  ши  $P_0 < \frac{1}{2} P^*$ , чей че есте посибил, деоарече ын позиция де екилибру  $T_0 = 0$  ши  $P_0 = 0$ . Атунч дин инегалитатя пречедентэ обцинем  $P < P^*$ , дар ын ачест каз нич о координатэ ну атинже маржиниле интервалулуй  $\pm \epsilon$ , адикэ ын тот тимпул мишкэрий  $|q_k| < \epsilon$  пентру  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Кондицииле  $T_0 < \frac{1}{2} P^*$  ши  $P_0 < \frac{1}{2} P^*$  дау посибилитатя де а стабили маржиниле валорилор инициале але координателор ши витезелор жэнерализате, адикэ

$$|q_k^0| < \eta_1, |q_k^0| < \eta_2, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Прин урмаре, теорема луй Лагранж—Дирихле есте демонстратэ.

Ын унеле казурь инстабилитатя екилибрулуй поате фи детерминатэ пе база теоремелор луй Ляпунов.

Сэ енунцэм ачесте теореме фэрэ а ле демонстра.

1. Екилибрул системулуй консерватив есте инстабил, дакэ енергия потенциалэ а системулуй ну аре минимум ын позиция де екилибру ши липса ачестуй минимум есте детерминатэ де термений ку ординул дой де мичиме ын дескомпунеря енержийей потенциалэ ын серие дупэ путериле координателор женерализате.

2. Екилибрул системулуй консерватив есте инстабил, дакэ енергия потенциалэ а системулуй ын позиция де екилибру аре максимум ши презенца ачестуй максимум есте детерминатэ де термений ку чел май мик ордин де мичиме ын дескомпунеря енержийей потенциалэ ын серие дупэ путериле координателор женерализате.

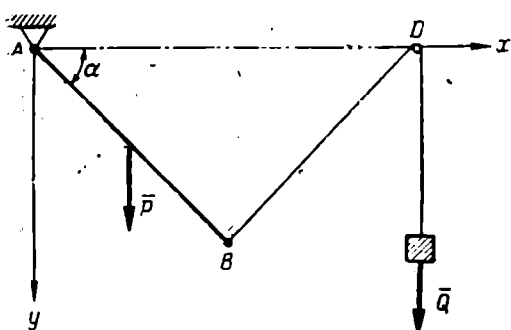
Дупэ кум с'а менционат, ын позиция де екилибру тоате формуле женерализате сынт нуле, адикэ

$$Q_k = 0 \text{ сау } \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Дин курсул де анализэ се штие, кэ кондицииле (6) сынт кондицииле нечесаре але екзистенцей екстремумуй функцией  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Прин урмаре, путем афирма, кэ ын позиция де екилибру енергия потенциалэ а системулуй консерватив аре валoare стационарэ, ын партикулар екстремум, адикэ максимум сау минимум.

Кондицииле (6) пот фи фолосите пентру детерминаря позициилор де екилибру але системелор консервативе.

**Екземплу.** О вержя оможенэ  $AB$  ку греутатя  $P$  поате сэ се ротяскэ ын планул вертикал ын журул артикуляцией  $A$ . Де алт



Фиг. 277.

капэт ал вержелей есте легат ун фир импондерабил инекстенсибил, каре есте трекут апой песте скрипетеле  $D$ . Де капэтул фирулуй есте суспендат ун корп ку греутатя  $Q$ . Скрипетеле  $D$  дименсиуниле кэруя пот фи неглицате, есте фиксат пе ачеяш оризонталэ ку артикуляция  $A$  ши  $AB = AD = l$ . Сэ се детермине унгул  $\alpha$  динтре вержя ши

дирекция оризонталэ ын позиция де екилибру ши сэ се стабиляскэ характерул екилибрулуй. Фрекаря ын акселе артикуляцией ши а скрипетелуй липсеште (фиг. 277).

**Резолваре.** Системул механик, алкэтуит дин вержя, фир ши корп есте ун систем консерватив, деоарече легэтуриле,

импульсе системулуй сынт идеале, яр форцелле, каре акцияныз асупра системулуй, сынт нумай форцелле де греутате але вержелей  $\vec{P}$  ши але корпуслуй  $\vec{Q}$ . Ачест систем аре ун сингур град де либертате. Дрепт координатэ жeneralизатэ вом луа унгул  $\alpha$ . Унгул  $\alpha$  ын позиция де екилибру поате фи детерминат пе база статичий елементаре. Сэ студием ын ачест скоп екилибрул форцелор, каре акцияныз асупра вержелей  $AB$ , ши сэ алкэтуим екуация моментелор фацэ де пунктул  $A$ . Сэ фолосим кондицииле (б), адикэ сэ детерминэм унгул  $\alpha$  дин екуация  $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0$ .

Ла детерминаря енержийей потенциале а системулуй валоаря константей арбитраре ну аре нич о импортанцэ, деоарече дупэ дериваре еа диспаре. Деачея ну-й нечесар сэ детерминэм ачестэ константэ. Сэ луэм акса  $y$  ку орижина ын пунктул  $A$  ши с'о ориентэм вертикал ын жос. Пентру енержия потенциалэ  $\Pi$  а системулуй авем

$$\Pi = -(P+Q) y_c + \text{const},$$

унде  $y_c$  есте ордоната центрулуй маселор.

Пентру  $y_c$  обцинем

$$y_c = \frac{P \frac{l}{2} \sin \alpha + Q \left( L - 2l \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{P+Q}.$$

Ын ачест каз

$$\Pi = -P \frac{l}{2} \sin \alpha - Q \left( L - 2l \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \text{const},$$

унде  $L$  есте лунжия фирулуй.

Сэ калкулэм прима ши а доуа дериватэ а енержийей потенциале ын рапорт ку  $\alpha$ :

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = -P \frac{l}{2} \cos \alpha + Ql \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = Pl \sin \alpha - \frac{1}{2} Ql \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Пунынд  $\frac{d\Pi}{d\alpha} = 0$ , обцинем екуация

$$-\frac{P}{2} \cos \alpha + Q \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

дин каре детерминэм унгул  $\alpha$ . Сэ субституим ын ачестэ екуация  $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$ . Екуация капэтэ форма

$$-P \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{P}{2} + Q \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

сау дефинитив

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{Q}{P} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Резолвынд ачасть екуацие, обцинем доуэ валорь пентру  $\cos \frac{\alpha}{2}$ :

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{Q}{2P} + \sqrt{\frac{Q^2}{4P^2} + \frac{1}{2}} \text{ ши } \cos \frac{\alpha_2}{2} = \frac{Q}{2P} - \sqrt{\frac{Q^2}{4P^2} + \frac{1}{2}}.$$

Прин урмаре, сынт посибиле доуэ позиций де екилибру. Прима позиция де екилибру, детерминатэ де унгул  $\alpha_1$  есте посибилэ нумай атуңч, кынд аре лок кондиция

$$\left( \frac{Q}{2P} + \sqrt{\frac{Q^2}{4P^2} + \frac{1}{2}} \right) \leq 1.$$

А доуа позиция де екилибру, детерминатэ де унгул  $\alpha_2$ , есте посибилэ пентру орьче валорь але мэримилор  $P$  ши  $Q$ . Ын прима позиция де екилибру вержяуа се афлэ май жос де оризонтала  $Ax$ , спре дряпта де ла акса  $y$ ; ын позиция а доуа — май сус де оризонтала  $Ax$ , спре стынга де ла акса  $y$ .

Сэ стабилим карактерул примей позиций де екилибру. Детерминэм ын ачест скоп семнул дериватей  $\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}$  пентру  $\alpha = \alpha_1$ :

$$\left( \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_1} = \frac{1}{2} (P \sin \alpha_1 - Q \sin \frac{\alpha_1}{2}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha_1}{2} (2P \cos \frac{\alpha_1}{2} - Q).$$

Дин експрессия пентру  $\cos \alpha_1$  гэсим

$$2P \cos \frac{\alpha_1}{2} - Q = 2P \sqrt{\frac{Q^2}{4P^2} + \frac{1}{2}} > 0.$$

Афарэ де ачаста,  $\sin \frac{\alpha_1}{2} > 0$ , деоарече унгул  $\frac{\alpha_1}{2}$  есте ун унгь аскуцит. Ын ачест каз

$$\left( \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_1} > 0.$$

деч, енержия потенциалэ а системулуй ын прима позиция де екилибру аре минимум ши, прин урмаре, ын конформитате ку теорема луй Лагранж — Дирихле ачаста есте позиция де екилибру стабил.

Сэ консидерэм акум а доуа позиция де екилибру. Сэ афлэм семнул дериватей  $\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}$  пентру  $\alpha = \alpha_2$

$$\left( \frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} (2P \cos \frac{\alpha_2}{2} - Q).$$



Ын ачасть экспрессия  $\sin \frac{\alpha_2}{2} > 0$ , яр дин экспрессия пентру  $\cos \frac{\alpha_2}{2}$  гэсим

$$2P \cos \frac{\alpha_2}{2} - Q = -2P \sqrt{\frac{Q^2}{4P^2} + \frac{1}{2}} < 0.$$

Прин урмаре, ын позиция а доуа де екилибру енергия потенциал а системулуй аре максимум. Пе база теоремей луй Лагранж — Дирихле ну путем стабилит карактерул екилибрулуй.

Сэ апликаэм теоремеле луй Ляпунов. Ачесте теореме пресупун дескомпунеря енержией потенциале ынserie дупэ путериле координателор жeneralизате мичь але системулуй, мэсурате де ла позиция де екилибру.

Сэ субституим  $\alpha_2 + \epsilon$  ын локул луй  $\alpha$  ын экспрессия енержией потенциале ши сэ дезволтэм ын serie дупэ путериле луй  $\epsilon$ .

Обцинем

$$P = -P \frac{l}{2} \sin(\alpha_2 + \epsilon) - Q \left( L - 2l \sin \frac{\alpha_2 + \epsilon}{2} \right) + \text{const}$$

сау

$$P = -P \frac{l}{2} (\sin \alpha_2 \cos \epsilon + \cos \alpha_2 \sin \epsilon) + 2Ql \left( \sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\epsilon}{2} + \cos \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\epsilon}{2} \right) + \text{const.}$$

Сэ фолосим дезволтэриле

$$\sin \epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \dots, \quad \sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{48} + \dots,$$

$$\cos \epsilon = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \dots, \quad \cos \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots$$

Субституинд ачесте дезволтэрь ын экспрессия енержией потенциале ши омицынд термений ынчепынд ку ординул ал трейля де мичиме обцинем

$$P = -P \frac{l}{2} \left[ \sin \alpha_2 \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right) + \cos \alpha_2 \epsilon \right] + 2Ql \left[ \sin \frac{\alpha_2}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon^2}{8} \right) + \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2} \right] + \text{const.}$$

Группынд термений, авем

$$P = \left( -P \frac{l}{2} \sin \alpha_2 + 2Ql \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) + \left( -P \frac{l}{2} \cos \alpha_2 + Ql \cos \frac{\alpha_2}{2} \right) \epsilon + \left( P \frac{l^2}{4} \sin \alpha_2 - \frac{1}{4} Ql \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) \epsilon^2 + \text{const.}$$

Коефициентул луй  $\epsilon$ , егал ку  $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)_{\alpha=\alpha_2}$  есте нул, чей че резултэ дин кондиция де екилибру.

Пентру а жудека деспре карактерул екилибрулуй сэ детерминэм семнул дериватей  $\left(\frac{d^2\Pi}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0}$ :

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0} = \frac{1}{2} \left( P_1 \sin \alpha_2 - Q \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) < 0,$$

чей че с'а стабилит ла детерминаря семнулуй дериватей  $\left(\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_2}$ . Прин урмаре, ын позиция а доуа де екилибру енергия потенциалэ а системулуй аре максимум, презенца кэруя есте стабилитэ ла черчетаря терменилор де ординул дой де мичиме ын дезволтаря енержией потенциале. Пе база примей ши челей де-а доуа теореме а луй Ляпунов тражем конклузия, кэ а доуа позиции де екилибру а системулуй есте инстабилэ.

## § 8. ЭНЕРГИЯ ЧИНЕТИКЭ ШИ ЧЯ ПОТЕНЦИАЛЭ А СИСТЕМУЛУЙ КУ УН ГРАД ШИ КУ ДОУЭ ГРАДЕ ДЕ ЛИБЕРТАТЕ

### Энергия чинетикэ

Сэ дедучем екуацииле диференциале але осцилациилор мичь ын казул унуй систем ку ун град ши ку доуэ граде де либертате. Ачесте екуаций вор фи гэсите ку ажуторул екуациилор луй Лагранж де спеца а доуа. Ын ачест скоп есте нечесар сэ обцинем формулеле пентру енергия чинетикэ ши чя потенциалэ а системелор ку ун град ши ку доуэ граде де либертате, циньнд конт де осцилацииле мичь.

Нотэм координателе жгенерализате але системулуй ку доуэ граде де либертате прин  $q_1$  ши  $q_2$ . Фие системулуй и с'ау импуглеатурь олономе стационаре. Пентру координателе орькэруй пункт ал системулуй авем

$$x_k = x_k(q_1, q_2), \quad y_k = y_k(q_1, q_2), \quad z_k = z_k(q_1, q_2), \quad k=1, 2, \dots, N,$$

унде  $N$  есте нумэрул пунктелор системулуй.

Сэ детерминэм енергия чинетикэ  $T$  а системулуй

$$T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2).$$

Пентру деривателе координателор пунктелор ын рапорт ку тимпул авем

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \dot{q}_2$$

ши экспресий аналожиче пентру  $\dot{y}_k$  ши  $\dot{z}_k$ .

Субституиуд валориле деривателор  $\dot{x}_k$ ,  $\dot{y}_k$  ши  $\dot{z}_k$  ын формула енержіей чинетиче  $T$ , обцинем о експресси, каре концине группе де термень ку  $\dot{q}_1^2$ ,  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  ши  $\dot{q}_2^2$ , яр термень де алт карактер ну сынт.

Прин урмаре, енержія чинетикэ а системулуй поате фи пусэ суб форма урмэтоаре

$$T = \frac{1}{2} (A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2), \quad (41)$$

унде  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  сынт функций де координателе жєнерализате  $q_1$  ши  $q_2$ .

Координателе жєнерализате  $q_1$  ши  $q_2$  се мэсоарэ де ла позиция де екилибру а системулуй. Ын позиция де екилибру ачесте координате сынт нуле. Ла студия осцилацилор мичь але системулуй ын апропиеря позицией де екилибру стабил мэримиле  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  сынт консидерате мэримь де ординул ынтый де мичиме, патрателе ши продуселе а кыте доуэ мэримь сынт консидерате мэримь де ординул ал дойля де мичиме ш. а. м. д.

Сэ детерминэм енержія чинетикэ а системулуй, абстракције фэкынд де термений де ординул ал дойля де мичиме. Сэ дезволтэм ын ачест скоп функцииле  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  ши  $A_{22}$  ын серия луй Маклорен; пентру функция  $A_{11}$  авем

$$A_{11} = (A_{11})_0 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \dots$$

Семиул 0 индикэ, кэ ын експрессиеле кореспунзэтоаре требуе сэ субституим  $q_1=0$  ши  $q_2=0$ .

Функцииле  $A_{12}$  ши  $A_{22}$  се дезволтэ ын мод аналожик.

Фиекаре термен дин партя дряптэ а формулей (41) концине мэримь де ординул ал дойля де мичиме  $\dot{q}_1^2$ ,  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  ши  $\dot{q}_2^2$ . Прин урмаре, пентру а обцине експрессия пентру  $T$  абстракције фэкынд де термений де ординул ал дойля де мичиме ну требуе сэ лэсэм ын експрессиеле пентру  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  нич ун фел де мэримь мичь, адикэ требуе сэ лэсэм нумай примий термень ай дезволтэрий.

Сэ нотэм  $(A_{11})_0 = a_{11}$  ши аналожик  $(A_{12})_0 = a_{12}$ ,  $(A_{22})_0 = a_{22}$ . Абстракције фэкынд де термений де ординул ал дойля де мичиме

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (42)$$

Мэримиле  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  сынт нумите коефициенць де инерции. Ын казул системулуй, каре аре ун сингур град де либертате, абстракције фэкынд де термений де ординул ал дойля де мичиме, авем

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (43)$$

унде  $q$  есте координата жєнерализатэ а системулуй.

Енерҗия потенциалэ а системулуй есте о функцие де координателе җенерализате  $q_1$  ши  $q_2$ , адикэ  $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$ . Ын депенденца де карактерул системулуй ачаствэ функцие поате авя о формэ диферитэ. Дрепт позиции, ын каре енерҗия потенциалэ есте нулэ, вом консидера позиция де екилибру а системулуй. Пентру  $q_1 = 0$  ши  $q_2 = 0$   $\Pi = 0$ . Сэ детерминэм енерҗия потенциалэ а системулуй абстракцие фэжынд де мэримиле де ординул ал дойля де мичиме. Сэ дезволтэм ын ачест скоп функция  $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$  ын серия луй Маклерон. Ын ачест каз

$$\begin{aligned} \Pi = & (\Pi)_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Ын конформитате ку челе консидерате май сус, ын ачаствэ дескомпунере

$$(\Pi)_0 = 0; \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = 0 \text{ ши } \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0$$

ка форце җенерализате ын позиция де екилибру. Група де термень, рэмасэ ын дескомпунере, концине  $q_1^2, q_1 q_2, q_2^2$ , ши детерминэ енерҗия потенциалэ а системулуй абстракцие фэжынд де термений де ординул дой де мичиме, деоарече термений урмэторь ай дезволтэрий сынт де ординул трей ши де ордине май ыналте. Сэ нотэм

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 = c_{11}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = c_{12}, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 = c_{22}.$$

Абстракцие фэжынд де термений де ординул дой де мичиме

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2). \quad (44)$$

Мэримиле  $c_{11}, c_{12}, c_{22}$  сынт нумите *коэффициенць квазиеластичь*, сау коэффициенць де рижидитате.

Ын казул системулуй ку ун сингур град де либертате

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2,$$

унде  $q$  есте координата җенерализатэ а системулуй.

### Форма патратикэ а доуэ вариабиле

Се нумейште формэ патратикэ а доуэ вариабиле о функции оможенэ де путеря а доуа а ачестор вариабиле. Форма патратикэ поате концине нумай термень ку патратул ши продуселе ачестор вариабиле. Де екземплу, форма патратикэ а вариабилелор  $x$  ши  $y$  есте

$$F = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

унде  $A, B, C$  сынт мэрымь константе, ын партикулар унеле дин-тр'ынселе пот фи егале ку zero.

Дин формулеле (42) ши (44) реесе, кэ ын лимителе граду-луй де пречизие консидерат енержія чинетикэ а системулуй  $T$  есте о формэ патратикэ де вариабилеле  $q_1$  ши  $q_2$ , адикэ де витезеле жєнерализате, яр  $\Pi$  есте о формэ патратикэ де коордонателе жєнерализате  $q_1$  ши  $q_2$ .

Форма патратикэ есте нумитэ позитив детерминатэ, дакэ еа общине нумай валорь позитиве ши есте егалэ ку zero нумай пентру валорь нуле але вариабилелор. Дупэ дефиницие енержія чинетикэ а системулуй есте о мэриме позитивэ ши есте егалэ ку zero нумай пентру валорь нуле але витезелор. Прин урмаре, енержія чинетикэ а системулуй  $T$  есте о формэ патратикэ позитив детерминатэ а витезелор жєнерализате.

Ын казул мишкэрилор мичь але системулуй консерватив ын вечинзата позиция де екилибру стабил дин теорема луй Лагранж — Дирихле реесе, кэ енержія потенциалэ  $\Pi$  есте ынтодьяуна позитивэ девенинд егалэ ку zero нумай ын позиция де екилибру, адикэ пентру  $q_1=0$  ши  $q_2=0$ . Резултэ, кэ ын ачест каз енержія потенциалэ а системулуй  $\Pi$  есте о формэ патратикэ позитивэ детерминатэ а координателор жєнерализате.

Сэ дедучем кондиция, кынд о формэ патратикэ де доуэ вариабиле есте позитив детерминатэ. Вом черчета казул партикулар ал енержіеи потенциале. Пентру енержія потенциалэ дупэ формула (44) авем

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Дин кондиция  $\Pi > 0$  пентру  $q_2=0$  ши  $q_1 \neq 0$  общинем  $c_{11} > 0$ .

Ын мод аналог дин кондиция  $\Pi > 0$  пентру  $q_1=0$  ши  $q_2 \neq 0$  реесе  $c_{22} > 0$ . Ачесте кондиций ну-с суфициенте, деоарече мэримя  $c_{22}$  поате фи луатэ негативэ, авынд ун модул атыт де маре, ыкыт  $\Pi$  ва фи о мэриме негативэ сау егалэ ку zero пентру  $q_1$  ши  $q_2$  диферите де zero.

Сэ ынтродучем вариабилэ  $x = \frac{q_1}{q_2}$ ,  $q_2 \neq 0$ . Пентру  $\Pi$  авем

$$\Pi = \frac{1}{2} q_2^2 \left[ c_{11} \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 + 2c_{12} \frac{q_1}{q_2} + c_{22} \right] = \frac{1}{2} q_2^2 (c_{11}x^2 + 2c_{12}x + c_{22}).$$

Енерҗия потенциал  $\Pi$  капэтэ нумай валорь позитиве, дакэ функция  $y = c_{11}x^2 + 2c_{12}x + c_{22}$  есте позитивэ пентру орѣче валорь але вариабилей  $x$ . Екуация  $y = c_{11}x^2 + 2c_{12}x + c_{22}$  есте екуация параболей. Акса параболей есте паралелэ ку акса  $y$ , яр рамуриле параболей плякэ спре инфинит ын сенсул позитив ал аксей  $y$ , деоарече  $c_{11} > 0$ . Прин урмаре,  $y > 0$  ын казул, кынд ачаствэ параболэ ну интерсектызэ акса  $x$ . Ачаства аре лок атунч, кынд екуация  $c_{11}x^2 + 2c_{12}x + c_{22} = 0$  ну аре рэдэчинь реале. Де аич реесе, кэ

$$4c_{12}^2 - 4c_{11}c_{22} < 0 \text{ сау } c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

Ын сфыршит пентру ка форма патратикэ сэ фие позитив детерминатэ есте нечесар ка

$$c_{11} > 0, c_{22} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (46)$$

Есте евидент, кэ о кондиције оарекаре дин примеле доуэ реесе дин челе доуэ кондиций рэмасе.

Пентру енерҗия чинетикэ  $T$  ачесте кондиций сынт:

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad (47)$$

## § 9. ОСЧИЛАЦИИЛЕ МИЧЬ АЛЕ УНУЙ СИСТЕМ КУ УН ГРАД ДЕ ЛИБЕРТАТЕ

Сэ студием осчиилацииле либере але унуй систем, адикэ осчиилацииле ын липса форцей пертурбаторе. Аич ну цинем конт де резистенцэ, легэтуриле пресупунынду-се идеале. Сэ адмитем кэ тоате форцеле, каре акционязэ асупра системулуй, сынт потенциале. Вом нота ку  $q$  координата җенерализатэ а системулуй. Сэ компунем екуация луй Лагранж

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Компунем екуация деференциалэ а мишкэрий асфел, ынкыт еа сэ концинэ нумай мэрымь де градул ынтый де мичѣме. Есте евидент, кэ ын ачест каз екуация есте линиарэ ши резолваря ей ну презинтэ дификултэць. Ынлокуиря екуацией диференциале екзакте а мишкэрий ку о екуацие линиарэ есте нумитэ *линиаризаре*.

Дериваря енерҗией чинетиче  $T$  ын рапорт ку  $\dot{q}$  ши  $q$  ши а енерҗией потенциалэ  $\Pi$  ын рапорт ку  $q$  микшорязэ ку о унитате путеря ачестор мэрымь. Мэримеле  $q, \dot{q}$  ши  $\ddot{q}$  фигурызэ ын екуацие нумай ла путериле ынтыя, дакэ  $T$  ши  $\Pi$  ну концин термень ку  $q$  ши  $\dot{q}$  ла о путере май маре декыт а доуа.

Деачея ла компунеря екуацией дифференциале а мишкэрий детерминэм енержія чинетикэ ши енержія потенциалэ а системулуй, абстракция фэкинд де мэримиле де ординул дой де мичиме. Екуацияле дифференциале асфел компусе дескриу ку о прецизие суфичиентэ мишкаря системулуй нумай пентру  $q$  ши  $\dot{q}$  мичь, адикэ осцилацияле мичь.

Енержія чинетикэ  $T$  ши енержія потенциалэ  $\Pi$  абстракция фэкинд де термений суснумиць пот фи детерминате дупэ формулеле (43) ши (45):

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 \text{ ши } \Pi = \frac{1}{2} c q^2$$

Дин ачесте формуле обцинем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}.$$

Прин урмаре, екуация луй Лагранж капэтэ форма

$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

Сэ ымпэрцим амбеле пэрць але екуацией ла  $a$  ши сэ нотэм  $\frac{c}{a} = k^2$ . Авем дефинитив екуация

$$\ddot{q} + k^2 q = 0.$$

С'а обцинут екуация осцилациялор армониче либере. Осцилацияле либере мичь але системулуй сынт осцилаций армониче. Екуация мишкэрий есте

$$q = A \sin(kt + \alpha),$$

унде  $A$  ши  $\alpha$  се детерминэ дин кондицияле инициале.

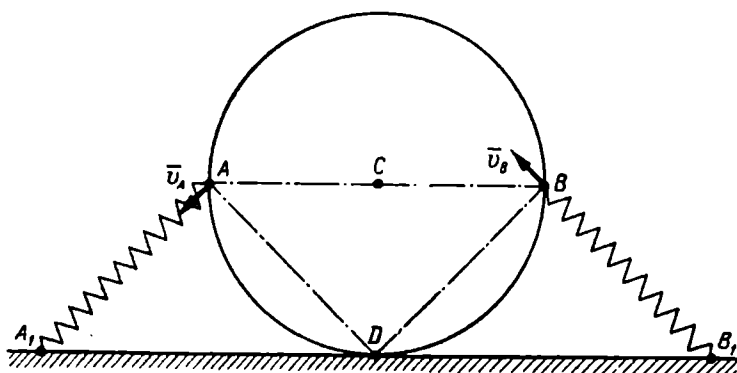
Периода осцилациялор мичь але системулуй поате фи детерминатэ дупэ формула

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \text{ сая } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (48)$$

*Екземплу.* Ун диск ротунд оможен поате сэ се ростооголяскэ фэрэ алунекаре пе ун план оризонтал, рэмынынд тот тимпул ын-тр'ун ачелаш план вертикал. Де капетеле  $A$  ши  $B$  але диаметрулуй дискулуй сынт фиксате прин артикуляция доуэ спирале идентиче, капетеле  $A_1$  ши  $B_1$  але кэрора сынт фиксате ын планул мишкэрий дискулуй.

Кынд диаметрул  $AB$  окупэ позиция оризонталэ, дискул се афлэ ын екилибру ши спираലെ ну сынт деформате. Маса дискулуй есте  $m$ , раза —  $r$ , коефициентул де рижидитате ал спиралелор есте  $\gamma$ . Сэ се детермине периода осцилациялор мичь але

дискулуй, дакэ ын позиция де екилибру  $A_1D=B_1D=2r$ , унде  $D$  есте пунктул де танженцэ ал дискулуй ку планул оризонтал. Маселе спиралелор се неглижазэ (фиг. 278).



Фиг. 278.

Резолваре. Системул аре ун сингур град де либертате. Сэ луэм ын калитате де координатэ жєнерализатэ унгул де ротацие ал дискулуй, унгь, мэсурат де ла позиция де екилибру. Сэ детерминэм енержія чинетикэ ши енержія потенциалэ але системулуй, абстракцие фэкынд де термений де ординул дой де мичиме.

Ын конформитате ку теорема луй Кьониг пентру енержія чинетикэ авем

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2,$$

унде  $C$  есте центрул дискулуй.

Апой

$$v_C = r \dot{\varphi}, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad J_{Cz} = \frac{1}{2} m r^2.$$

Ын ачест каз

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (a)$$

Ам обцинут валоаря екзактэ а енержіей чинетиче — о мэриме де ординул дой де мичиме.

Енержія потенциалэ а системулуй констэ дин енержіице потенциале але спиралелор. Сэ адмitem, кэ форцеле де еластичитате але спиралелор сынт пропорционале ку деформацииле лор. Ын ачест каз енержія потенциалэ се детерминэ дупэ формула

$$P = \frac{1}{2} \gamma \lambda^2,$$

унде  $\lambda$  есте мэримя деформацией (мэримя алунжірий сау компрэмэрий).



Дин формула пентру  $\Pi$  се веде, кэ деформация  $\lambda$  требуе детерминатэ абстракције фэкинд де мэримиле де ординул ынтый де мичиме. Ла мишкаря дискулуй дин позиция де екилибру пунктул  $D$  есте центрул инстантанеу ал витезелор, яр витезеле пунктелор  $A$  ши  $B$  сынт

$$v_A = v_B = AD \dot{\varphi} = r \sqrt{2} \dot{\varphi}.$$

Ачесте витезе сынт ындрептате дупэ акселе спиралелор. Абстракције фэкинд де мэримиле де ординул ынтый де мичиме путем сэ консидерэм, кэ депласэриле пунктелор  $A$  ши  $B$  сынт ориентате дупэ акселе спиралелор ши ын интервалул де тимп  $\Delta t$  сынт егале ку  $r \sqrt{2} \dot{\varphi} \Delta t = r \sqrt{2} \Delta \varphi$ . Деформацииле спиралелор сынт егале ку ачесте депласэрь, ынсэ о спиралэ се компримэ, яр алта се ынтинде. Прин урмаре, пентру фиекаре спиралэ  $\lambda = r \sqrt{2} \dot{\varphi}$ . Енержія потенциалэ а амбелор спирале абстракције фэкинд де мэримиле де градул ал дойля де мичиме есте

$$\Pi = 2 \frac{1}{2} \gamma \dot{\lambda}^2 = \gamma r^2 2 \dot{\varphi}^2 = 2 \gamma r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (6)$$

Компарынд  $T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2$  ши  $\Pi = \frac{1}{2} c \dot{\varphi}^2$  ку [експресииле] лор дудэ формулеле (а) ши (б), детерминэм коефициентулу де инерције ши коефициентулу де рижидитате  $c$ :

$$\frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2, \quad \frac{1}{2} c \dot{\varphi}^2 = 2 \gamma r^2 \dot{\varphi}^2$$

ши

$$a = \frac{3}{2} m r^2, \quad c = 4 \gamma r^2.$$

Сэ демонстрэм акум периоада осцилациилор мичь але дискулуй дупэ формула (48)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{3mr^2}{2 \cdot 4\gamma r^2}} = \pi \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\gamma}}.$$

## § 10. ОСЦИЛАЦИИЛЕ МИЧЬ АЛЕ СИСТЕМУЛУЙ КУ ДОУЭ ГРАДЕ ДЕ ЛИБЕРТАТЕ

### Екуацииле диференциале але мишкэрий системулуй

Сэ нотэм координателе жэнерализате але системулуй ку  $q_1$  ши  $q_2$ . Ачесте координате се мэсоарэ де ла позиция де екилибру. Сэ компунем екуацииле диференциале пентру осцилацииле либере але системулуй ын вечинэтатя позицией де екилибру

стабил. Сэ адмітем, кэ форцэле, каре акцiонязэ асупра сiстемулуй, сынт потенциалэ.

Екуацииле луй Лагранж пентру ачест систем сынт

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}.$$

Пентру енержия чинетикэ ши енержия потенциалэ а сiстемулуй ын кавул мишкэрилор мичь с'ау обцинут, абстракцие фэжынд де термений де ординул дой де мичиме, формулеле (42) ши (44):

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2) \quad \text{ши} \quad \Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2).$$

Ефектуынд деривэриле нечесаре, обцинем

$$a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 = -c_{11} q_{11} - c_{12} q_2, \quad a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 = -c_{12} q_1 - c_{22} q_2$$

сау ын формэ дефинитивэ

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1) + (a_{12} \ddot{q}_2 + c_{12} q_2) &= 0, \\ (a_{12} \ddot{q}_1 + c_{12} q_1) + (a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

С'а обцинут ун систем де доуэ екуаций диференциале линна-ре оможене ку доуэ функций некуноските  $q_1$  ши  $q_2$ . Фиреште, кэ ачесте екуаций дескриу нумай мишкэриле мичь але сiстемулуй, деарече еле ау ши фост алкэтуите ын ачастэ пресупунере.

### Интеграря екуацилор диференциале але унуй систем

Сэ афлэм солуция сiстемулуй (49) суб форма

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha). \quad (50)$$

Деривателе ачестор функций сынт

$$\ddot{q}_1 = -A_1 k^2 \sin(kt + \alpha), \quad \ddot{q}_2 = -A_2 k^2 \sin(kt + \alpha).$$

Сэ субституим експресииле функцилор  $q_1$  ши  $q_2$  ши але деривателор  $\ddot{q}_1$ ,  $\ddot{q}_2$  ын екуацииле сiстемулуй (49). Дупэ ымпэриця амбелор пэрць але ачестор екуаций ла  $\sin(kt + \alpha)$  се обцине сiстемул де екуаций

$$\left. \begin{aligned} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) &= 0, \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Екуацииле (51) конституе ун систем де екуаций алжэбриче линнаре оможене. Ачест систем поате авя солуций диферите де

зеро пентру  $A_1$  ши  $A_2$  нумай атунч, кынд детерминантул ачестуй систем есте егал ку zero. Ын фелул ачеста обцинем екуация

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ сау } (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (52)$$

Екуация (52) есте нумитэ екуация фреквенцелор. Афлэм дин ачестэ екуацие фреквенца  $k$  ши апой дин системул (51) детерминэм  $A_1$  ши  $A_2$ .

Екуация фреквенцелор (52) есте о екуацие бипатратэ ши резолваря ей ну есте компликатэ. Дакэ мишкэриле мичь але системулуй ау лок ын вечинэтатя позицией де екилибру стабил, атунч дин ачестэ екуацие пентру  $k^2$  се обцин валорь реале ши позитиве.

Мишкаря системулуй ын ачест каз есте о мишкаре осцилаторие неамортизатэ, деоарече солуция женералэ а системулуй де екуаций (49) се презинтэ ка сума солуцийлор партикуларе де форма (50).

Ачесте осцилаций сынт токмай осцилаций либере але системулуй. Менционэм, кэ фреквенца  $k$  есте консидератэ о мэриме позитивэ, деоарече пентру валориле негативе але луй  $k$  ну се обцин солуций ной суб форма (50).

Ын женерал, дин екуация фреквенцелор (52) обцинем доуэ валорь позитиве диферите пентру  $k$ :  $k_1$  ши  $k_2$ ,  $k_1 \neq k_2$ . Мэримиле  $k_1$  ши  $k_2$  сынт фреквенцеле осцилацийлор либере але системулуй. Де обичей фреквенцеле се нумеротязэ ын ординя крештерий мэримилор лор. Есте евидент, кэ фреквенцеле осцилацийлор системулуй ну депинд де кондичииле инициале, финнд детерминате де структура системулуй осцилаториу.

Фиекэрей валорь а фреквенцей  $k$  ый кореспунде ун ануит систем де солуций (50) ши ун ануит систем де екуаций (51) пентру калкуларя мэримилор  $A_1$  ши  $A_2$ .

Мишкаря системулуй, детерминатэ де солуция системулуй де екуаций дифференциале (49) пентру о рэдэчинэ оарекаре а екуацией фреквенцелор, есте нумитэ *осцилацие принципалэ*, кореспунзэтоаре ачестей рэдэчинь.

Астфел, пентру прима рэдэчинэ  $k_1$  а екуацией фреквенцелор авем прима осцилацие принципалэ

$$q_1^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q_2^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1).$$

Дин системул (51) гэсим рапортул амплитудинилор  $A_2^{(1)}$  ши  $A_1^{(1)}$  дин прима осцилацие принципалэ:

$$\lambda_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}. \quad (53)$$

Пентру рэдэчина а доуа  $k_2$  а екуацией фреквенцелор авем ын мод аналог а доуа осцилацие принципалэ

$$q_1^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2)$$

ши

$$\lambda_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = - \frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = - \frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \quad (54)$$

Мэрымиле  $\lambda_1$  ши  $\lambda_2$  сынт нумите коефициенць де дистрибуцие. Ачесте мэрымь сынт егале ку рапоартеле координателор жгенерализате але системулуй дин осцилацииле принципале пентру орьче момент ши, прин урмаре, карактеризязэ форма осцилациилор принципале

$$\lambda_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}}.$$

Ын фиекаре осцилацие принципалэ координателе жгенерализате вариязэ дупэ лежя армоникэ, авынд ачеш фреквенцэ ши ачеш фазэ.

Коефициенций де дистрибуцие  $\lambda_1$  ши  $\lambda_2$  пот фи атыт позитивь, кыт ши негативь. Пентру  $\lambda > 0$  амбеле координате дин осцилация принципалэ се афлэ ын ачеш фазэ; пентру  $\lambda < 0$  — ын фазе юнтрае.

Солуция жгенералэ а системулуй де екуаций (49), фиинд солуция унуй систем де екуаций дифференциале линиаре, есте егалэ ку сума солуциилор партикуларе, адикэ

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2),$$

$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Експримынд  $A_2^{(1)}, A_2^{(2)}$  прин  $A_1^{(1)}$  ши  $A_1^{(2)}, \lambda_1$  ши  $\lambda_2$  ку ажуто-  
рул формулелор (53) ши (54), обцинем дефинитив

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= A_1^{(1)} \lambda_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \lambda_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Системул де солуций (55) концине патру константе арбитра-  
ре  $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \alpha_1, \alpha_2$ . Ачесте константе пот фи детерминате дупэ кондицииле инициале, де екземплу, дин кондицииле пентру  $t = 0$

$$q_1 = q_1^0, \quad q_2 = q_2^0,$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1^0, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_2^0.$$

Дин солуция (55) резултэ, жэ ла мишкаря системулуй фиекаре координатэ се презинтэ жа суперпозиция а доуэ осцилаций

армониче ку фреквенце, амплитудинь ши фазе инициале диферите.

Екуацииле диференциале але мишкэрий системулуй (49) се симплификэ симцитор, дакэ координателе жгенерализате сынт алесе ын аша фел кэ,  $a_{12}=0$  ши  $c_{12}=0$ . Ын ачест каз

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2) \text{ ши } P = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2).$$

Координателе жгенерализате, каре сатисфак ачесте кондиций, сынт нумите *координате принципале але системулуй*.

Прин урмаре, координателе жгенерализате сынт нумите координате принципале але системулуй, дакэ ын експрессия енержийей чинетиче фигурызэ нумай патрателе витезелор жгенерализате, яр ын експрессия енержийей потенциале — нумай патрателе координателор жгенерализате.

Ын ачест каз екуацииле (49) капэтэ форма

$$a_{11} \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = 0, \quad a_{22} \ddot{q}_2 + c_{22} q_2 = 0.$$

Системул обцинут констэ дин доуэ екуаций индепенденте. Фиекаре екуация поате фи резолватэ индепендент де чялалтэ. Солуция ачестуй систем де екуаций есте урмэтоаря:

$$q_1 = B_1 \sin(k_1 t + \beta_1), \quad q_2 = B_2 \sin(k_2 t + \beta_2).$$

Осцилацииле дупэ координателе принципале ау лок индепендент уна де алта ку фреквенцеле

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} \text{ ши } k_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

Фреквенцеле осцилациилор сынт детерминате де структура системулуй осцилатор ши ну депинд де алежеря координателор жгенерализате, ку ажуторул кэра есте дескрисэ мишкаря системулуй. Прин урмаре, фреквенцеле  $k_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$  ши  $k_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$  сынт унеле ши ачеляшь пентру орьче тоталитате де координате жгенерализате.

Константеле арбитраре  $B_1, B_2, \beta_1, \beta_2$  се детерминэ дин кондицииле инициале.

Проблема деспре осцилацииле системулуй ку доуэ граде де либертате се резолвэ релатив симплу ын координателе принципале, ынсэ ачесте координате требе детерминате ын преалабил. Де обичей координателе, алесе ынтр'ун мод май натурал, ну сынт координате принципале.

Координателе принципале сынт комодэ ын калкулеле теоретиче, пе кынд ла резолваря проблемелор конкрете се рокомандэ а луа ын калитате де координате жгенерализате мэримиле, каре детерминэ позиция системулуй ынтр'ун мод май симплу.

**Теорема деспре рэдэчиниле екуацей фреквенцелор.**

**Казул фреквенцелор егале**

Сэ анализэм екуация фреквенцелор (52). Сэ пунём ын ача-стэ екуаце  $k^2 = x$ , нотынд партя стынгэ а екуацей прин  $y$ . Ын ачест каз

$$y = (c_{11} - a_{11}x)(c_{22} - a_{22}x) - (c_{12} - a_{12}x)^2. \quad (56)$$

Курба, детерминатэ де екуация (56), есте о параболэ, акса кэрея есте паралелэ ку акса  $y$ . Есте евидент, кэ патрателе фреквенцелор кэутате  $k^2$  се детерминэ ка абсчиселе пунктелор де интерсекције але параболей ку акса  $x$ .

Се штие, кэ енержія чинетикэ а системулуй есте о формэ патратикэ позитивэ детерминатэ а витезелор жєнерализате ши деч кондицииле (47) сынт сатисфэкуте.

Осцилацииле ау лок ын вечинэтатя позицией де екилибру стабил ши, прин урмаре, енержія потенциалэ  $\Pi$  де асеменя есте о формэ патратикэ позитивэ детерминатэ а координателор жєнерализате. Деч, требуе сэ фие сатисфэкуте кондицииле (46).

Пентру фиксаря идеилор сэ адмitem  $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ ; обсервэм, кэ дин (46) ши (47) резултэ

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} > 0 \text{ ши } \frac{c_{22}}{a_{22}} > 0.$$

Цинынд конт де кондицииле (46) ши (47), детерминэм ордонателе пунктелор параболей (56) пентру урмэтоареле абсчисе:

$$x = 0, \quad y = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0,$$

$$x = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad y = - \left( c_{12} - a_{12} \frac{c_{11}}{a_{11}} \right)^2 < 0,$$

$$x = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \quad y = - \left( c_{12} - a_{12} \frac{c_{22}}{a_{22}} \right)^2 < 0.$$

Апой, репрезентынд екуация параболей (56) суб форма

$$y = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x^2 + \dots$$

обцинем, кэ  $y \rightarrow +\infty$  пентру  $x \rightarrow +\infty$ , деоарече ын конформитате ку (47)  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .

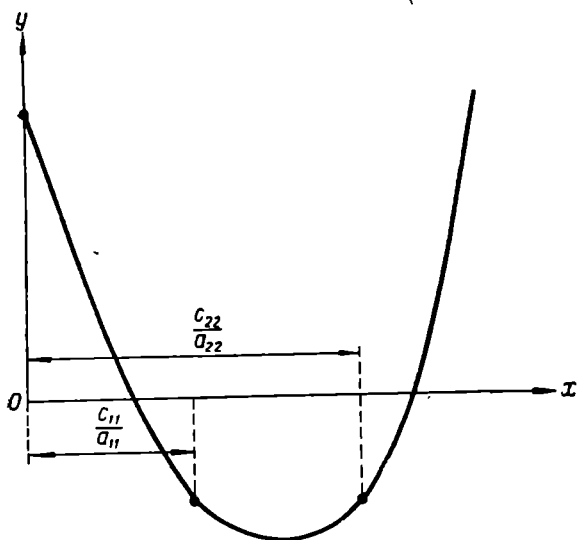
Графикул параболей есте репрезентат ын фиг. 279. Ын семипланул дин дряпта аксей  $y$  параболэ ынчепе ку пунктул, каре се афлэ май сус де акса  $x$ . Пунктеле параболей пентру  $x = \frac{c_{11}}{a_{11}}$  ши  $x = \frac{c_{22}}{a_{22}}$  сынт ситуате май жос де акса  $x$ . Ла крештеря де май департе а абсчиселор, ордонателе пунктелор параболей

креск нелимитат. Прин урмаре, пунктеле де интерсекция але параболей ку акса  $x$  се гэсеск май ла дряпта дё акса  $y$ , адикэ

$$x_1 = k_1^2 > 0 \text{ ши } x_2 = k_2^2 > 0.$$

Аша дар, дин екуация фреквенцелор обцинем пентру  $k^2$  валорь реале ши позитиве.

Ын казул, кынд парабола [екуация (56)] есте танжентэ ла акса  $x$  ынтр'ун пункт оарекаре, фреквенцеле оынт егалё.



Фиг. 279.

Ачест каз есте посибил ын кондициле урмэтоаре:

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} \text{ ши } y=0 \text{ пентру } x = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}};$$

Ын акорд ку кондиция а доуа

$$c_{12} - a_{12} \frac{c_{11}}{a_{11}} = 0 \text{ ши } c_{12} - a_{22} \frac{c_{22}}{a_{22}} = 0,$$

де унде резултэ

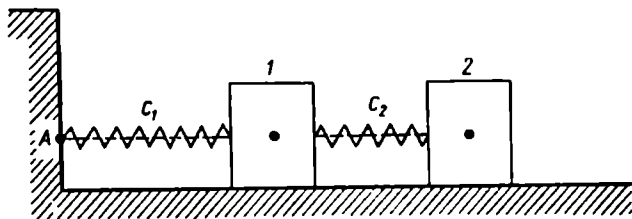
$$k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_{12}}{a_{12}}. \quad (57)$$

Ын кондициле (57) системул де екуаций (51) есте сатисфэкут идентик пентру орьче  $A_1$  ши  $A_2$ , адикэ мэримиле  $A_1$  ши  $A_2$  сынт индепенденте. Ын ачест каз солудия системулуй де екуаций дифференциале (49) есте урмэтоаря

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha_2).$$

Мэримиле  $A_1, A_2, a_1, a_2$  се детерминэ дин кондицииле инициале. Ын казул де фацэ координателе жэнерализате вариэзэ индипендент уна де алта ку фреквенце егале.

*Екземплу.* Доуэ корпурь 1 ши 2 ку маселе  $m_1$  ши  $m_2$  се афлэ пе ун план оризонтал нетед. Корпуриле сынт легате ку о спиралэ авынд коэффициентул де еластичитате  $c_2$ . Де корпул ку маса  $m_1$  есте фиксатэ о спиралэ ку коэффициентул де еластичитате  $c_1$ . Алт капэт ал ачестей спирале есте фиксат ын пунктул фикс  $A$ . Ажселе амбелор спирале се афлэ пе о дряптэ оризонталэ. Сэ се черчетезе осцилацииле системулуй (фиг. 280).



Фиг. 280.

**Резолваре.** Системул аре доуэ граде де либертате. Ын калитате де координате жэнерализате вом луа координателе  $x_1$  ши  $x_2$  але корпурилор, мэсурате де ла позиция де екилибру а ачестор корпурь; луэм сенсуриле позитиве але координателор  $x_1$  ши  $x_2$  ын ачеяш парте.

Енергия чинетикэ а системулуй есте

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2.$$

Ам обцинут пентру  $T$  о формэ патратикэ а витезелор жэнерализате, прин урмаре, ын експресия пентру  $T$  ну трэбуе сэ ефектуэм нич ун фел де трансформэрь.

Енергия потенциалэ а системулуй есте егалэ ку енергия потенциалэ а спиралелор. Координата  $x_1$  а корпулуй 1 есте егалэ ку деформация спиралей дин стынга, деформация спиралей дин дряпта есте егалэ ку  $x_2 - x_1$ . Пентру енергия потенциалэ а системулуй обцинем форма патратикэ

$$П = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2.$$

Компунем екуацииле луй Лагранж

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = - \frac{\partial П}{\partial x_1} \quad \text{ши} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = - \frac{\partial П}{\partial x_2}.$$



Обцинем

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) = -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1) = -c_2 x_2 + c_2 x_1.$$

Пентру а симплифика калкулеле сэ адмитем, кэ  $c_1 = c_2 = c$ .  
Екуацииле диференциале капэтэ форма

$$m_1 \ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0.$$

Компарынд екуацииле обцинуте ку екуацииле (49), гэсим

$$a_{11} = m_1, a_{12} = 0, a_{22} = m_2, c_{11} = 2c, c_{12} = -c, c_{22} = c.$$

Компунем екуация фреквенцелор (52):

$$(2c - m_1 k^2)(c - m_2 k^2) - c^2 = 0.$$

Дупэ ынмулцире ши редучеря терменилор асеменя авем

$$m_1 m_2 k^4 - c(2m_2 + m_1)k^2 + c^2 = 0.$$

Сэ ымпэрцим амбеле пэрць але ачестей екуаций ла  $m_1 m_2$ . Вом авя

$$k^4 - \frac{(2m_2 + m_1)c}{m_1 m_2} k^2 + \frac{c^2}{m_1 m_2} = 0.$$

Дин ачастэ екуацие

$$k^2 = \frac{(2m_2 + m_1)c}{2m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{(2m_2 + m_1)^2 c^2}{4m_1^2 m_2^2} - \frac{c^2}{m_1 m_2}}.$$

Дупэ кум се веде, амбеле валорь але мэримий  $k^2$  сынт реале ши позитиве. Пентру фреквенце авем

$$k_1 = \sqrt{\frac{(2m_2 + m_1)c}{2m_1 m_2} - \sqrt{\frac{(2m_2 + m_1)^2 c^2}{4m_1^2 m_2^2} - \frac{c^2}{m_1 m_2}}},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{(2m_2 + m_1)c}{2m_1 m_2} + \sqrt{\frac{(2m_2 + m_1)^2 c^2}{4m_1^2 m_2^2} - \frac{c^2}{m_1 m_2}}}.$$

Фие маса  $m_1$  а корпулуй 1 есте дестул де маре ын компара-  
циие ку маса  $m_2$ . Консидерынд ын експресиеле пентру  $k_1$  ши  $k_2$   
маса  $m_1$  инфинит де маре, обцинем

$$k_1 = 0 \text{ ши } k_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}.$$

Де аич путем траже конклюдия: дакэ маса корпулуй 1 есте дес-  
тул де маре, атунч ел ну осчиляэз, яр корпус 2 осчиляэз ка ши  
кум ар фи легат де ун корп фикс.

Дакэ ын експресиеле пентру  $k_1$  ши  $k_2$  консидерэм маса  $m_2$   
а корпулуй 2 дестул де маре, атунч пентру  $k_1$  ши  $k_2$  гэсим

$$k_1 = 0 \text{ ши } k_2 = \sqrt{\frac{2c}{m_1}}.$$

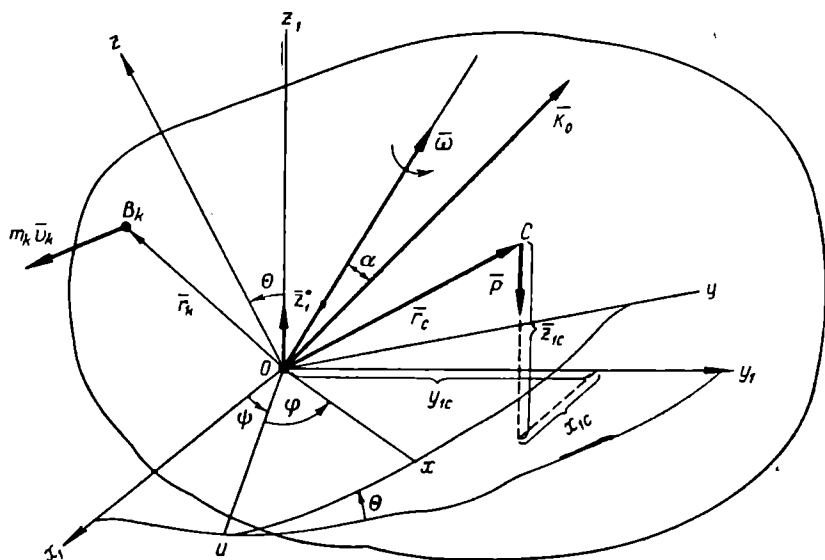


## ДИНАМИКА РИЖИДУЛУЙ КУ УН ПУНКТ ФИКС

## § 1. КАРАКТЕРИСТИЧЬ ДИНАМИЧЕ

Моментул чинетик ал рижидулуй, каре се ретеште ын журул унуй пункт фикс

Сэ нотэм ку  $O$  пунктул, каре рэмыне фикс ын тимпул мишкэрий рижидулуй. Сэ конструим доуэ системе де координате, амбеле авынд дрепт орижине ачест пункт фикс. Системул де координате  $Ox_1y_1z_1$  есте фикс (фиг. 282) сервинд дрепт систем де референцэ пентру мишкаря корпулуй ын спациу. Мишкаря корпулуй се консидерэ куноскутэ, дакэ куноааштем координателе жeneralизате але корпулуй, де екземплу, унгюриле луй Ейлер ка функций де тимп. Системул де координате  $Oxyz$  есте легат рижид ку корпул мобил.



Фиг. 282.

Координателе пунктелор корпулуй ын системул де координате фикс сынт функций де тимп, деoarече фиeкаре пункт (афарэ де чел фикс) дескрие о траекторие сферикэ ын спациу. Координателе тутурор пунктелор рижидулуй ын системул де координате мобил сынт мэрымь константе.

Сэ нотэм моментул чинетик ал рижидулуй ын рапорт ку пунктул фикс прин векторул  $\vec{K}_O$ . Нотынд ку  $\vec{r}_k$  раза вектоаре а унуй пункт оарекаре  $B_k$  ку маса  $m_k$  ал рижидулуй, ын конформитате ку дефиниция векторулуй  $\vec{K}_O$  авем

$$\vec{K}_O = \sum_k (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \sum_k \{m_k (\vec{r}_k \times \vec{v}_k)\}. \quad (1)$$

Проектынд амбеле пэрць але егалитэций (1), де екземплу, пе акса  $Ox$ , ши фолосинд регула проектэрий продусулуй векториал, обцинем

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}).$$

Сэ ынлокуим проекцииле  $v_{kz}$ ,  $v_{ky}$  але витезей  $\vec{v}_k$  ку експресиине обцинуте дин формулеле луй Ейлер. Эффектуынд трансформэриле нечесаре, обцинем експресья пентру  $K_x$  ши ын мод аналог пентру  $K_y$ ,  $K_z$ :

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z; \quad K_y = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z; \quad (2)$$

$$K_z = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z.$$

Сэ луэм ын калитате де аксе де координате але системулуй мобил акселе принципале де инерции але корпусулуй, кореспундэтоаре пунктулуй фикс  $O$ . Ын рапорт ку ачесте аксе де координате тоате моментеле де инерции центрифугале сынт егале идентик ку zero:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} \equiv 0.$$

Ын експресиине проекциилор моментулуй чинетик ал рижидулуй пе ачесте аксе рэмын нумай термений ку моментеле де инерции аксиале, каре сынт моменте принципале де инерции але корпусулуй кореспундэтоаре пунктулуй фикс ал луй. Десоорь се фолосеск урмэтоареле нотаций пентру моментеле принципале де инерции ши пентру проекцииле витезей унгуларе пе акселе принципале де инерции

$$J_x = A; \quad J_y = B; \quad J_z = C; \quad \omega_x = p; \quad \omega_y = q; \quad \omega_z = r. \quad (3)$$

Проекцииле моментулуй чинетик ал рижидулуй пе акселе системулуй де координате мобил сынт:

$$K_x = J_x \omega_x = Ap; \quad K_y = J_y \omega_y = Bq; \quad K_z = J_z \omega_z = Cr. \quad (4)$$

## Енергия чинетикэ а рижидулуй ку ун пункт фикс

Пентру енергия чинетикэ а корпусулуй авем

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \bar{v}_k^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_k m_k \bar{v}_k \bar{v}_k. \quad (5)$$

Сэ ынлокуим ын ачест продус скалар унул дин факторь ку експресия са дупэ формула луй Ейлер  $\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$ . Ын ачест каз

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \{m_k \bar{v}_k (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)\}.$$

Ла пермуталя чикликэ а факторилов ын продусул микст валоаря ачестуй продус ну се скимбэ. Сэ ынтродучем факторул  $m_k$  суб семнул продусулуй векториал. Вом авя

$$T = \frac{1}{2} \sum_k [\bar{\omega} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k)].$$

Факторул  $\bar{\omega}$  дин продусул скалар ну депинде де индичеле де сумаре  $k$  ши поате фи скос ын афара семнулуй сумей:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \sum_k (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k).$$

Сума продуселор векториале есте ну алтчева декыт моментул чинетик  $\bar{K}_O$  ал рижидулуй ын рапорт ку пунктул  $O$ . Авем ын консечинцэ următoarea експрессия пентру енергия чинетикэ а рижидулуй, каре се ротеште ын журул унул пункт фикс

$$T = \frac{1}{2} \bar{K}_O \bar{\omega}. \quad (6)$$

Сэ десфэшурум продусул скалар дин (6), експримындул принц проекцииле векторилор пе акселе системулуй де координате мобил

$$T = \frac{1}{2} (K_x \omega_x + K_y \omega_y + K_z \omega_z). \quad (7)$$

Субституинд ын (7) експрессииле (2) пентру  $K_x, K_y, K_z$ , обцинем

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_x \omega_z). \quad (8)$$

Дакэ акселе де координате але системулуй мобил сынт аксе принципале де инерции але рижидулуй, кореспундэтоаре пунктулуй фикс, адикэ

$$J_{xy} = 0; J_{yz} = 0; J_{zx} = 0,$$

атунч експрессия енержіеи чинетиче а рижидулуй капэтэ о формэ май симплэ

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2). \quad (9)$$

Пентру корпул, маса кэруа есте дистрибуитэ ын аша фел, кэ елипсоидул де инерције, кореспунзэтор пунктулуй фикс, есте ун елипсоид де ротацие, адикэ  $J_x = J_y$ , експрессия енержіеи чинетиче девине май симплэ

$$T = \frac{1}{2} [J_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z \omega_z^2]. \quad (10)$$

Моментул чинетик ал рижидулуй поате фи колиниар ку витеза унгуларэ ын моментеле, кынд акса инстантанее де ротацие коинчиде ку уна дин акселе принципале де инерције але рижидулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй фикс. Ла черчетаря мишкэрилор корпурилор ку ун пункт фикс, елипсоиделе де инерције але кэроора фацэ де ачест пункт сынт елипсоиде де ротацие, де сеорь се фолосеште релация

$$2(J_x + J_z)T = K_O^2 + J_x J_z \omega^2. \quad (10)$$

## § 2. ЕКУАЦИИЛЕ ДИНАМИЧЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ РИЖИДУЛУЙ ЫН ЖУРУЛ УНУЙ ПУНКТ ФИКС

### Екуацииле динамиче але луй Ейлер

Проблема деспре мишкаря рижидулуй се формулязэ ын казул женерал астфел: рижидулуй и с'а импус о легэтурэ, каре констэ ын ачея, кэ ла мишкаря рижидулуй суб акциуня унор форце активе арбитраре ун пункт ал луй рэмыне фикс. Се пресупуне, кэ легэтура есте идеалэ, адикэ ла мишкаря рижидулуй лукрул механик ал реакциуний легэтурий  $\bar{R}_O$  есте егал ку zero. Куноаштем форцеле  $\bar{F}_k (k = 1, 2, \dots, n)$  каре акционязэ асупра рижидулуй, ын функции де пунктеле де апликаре, де витеза унгуларэ а рижидулуй ши де тимп. Требуе сэ детерминэм мишкаря корпулуй, адикэ сэ афлэм ын функции де тимп унгюриле луй Ейлер, каре детерминэ позиция корпулуй ын спациу, прекум ши реакциуня легэтурий.

Пентру дедучеря екуациилор динамиче але мишкэрий студияте апликакм теорема деспре моментул чинетик ын мишкаря абсолютэ а рижидулуй, адикэ ын мишкаря са фацэ де системул де реферинцэ  $Ox, y, z$ . Ын конформитате ку ачестэ теоремэ, деривата ын рапорт ку тимпул де ла моментул чинетик  $\bar{K}_O$  фацэ де пунктул фикс есте егалэ ку моментул принципал ын ра-

порт ку ачелаш пункт фикс ал тутурор форцелор екстериоаре, ын казул дат нумай ал форцелор активе  $\bar{F}_k$ , деоарече реакциуня  $\bar{R}_O$  трече прин пунктул фикс  $O$ :

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O. \quad (12)$$

Аич фигурызэ деривата тоталэ, каре карактеризязэ вариация векторулуй  $\bar{K}_O$  ын системул де координате фикс. Векторул  $\bar{L}_O$  — моментул принципал ал тутурор форцелор екстериоаре фацэ де пунктул  $O$  поате фи детерминат дупэ формула

$$\bar{L}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (13)$$

Есте комод сэ проектэм партя стынгэ а екуацией (12) немнжочит нумай пе акселе системулуй де координате фикс. Дар компунеря екуациилор мишкэрий ын системул де координате фикс шу се рекомандэ, деоарече ачесте екуаций вор концине деривателе моментелор вариабиле де инерциие фацэ де акселе фиксе. Сэ трансформэм партя стынгэ а екуацией (12), фолосинд ноциуня де дериватэ локалэ.

Вариация векторулуй  $\bar{K}_O$  поате фи обсерватэ ын доуэ системе де реферинцэ: ын системул фикс  $Ox_1y_1z_1$  ши ын системул мобил  $Ox_2y_2z_2$  легат рижид ку корпус мобил. Сэ ынлокуим партя стынгэ а екуацией (12) фолосинд формула луй Бур, каре стабилеште релация динтре деривата тоталэ а векторулуй ши деривата локалэ. Екуация (12) капэтэ форма

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{K}_O) = \bar{L}_O. \quad (14)$$

Амбеле пэрць але екуацией (14) пот фи проектате пе акселе системулуй де координате мобил. Сэ адмитем, кэ акселе системулуй де координате мобил сынт ындрептате дупэ акселе принципале де инерциие але рижидулуй, кореспунзэтоаре пунктулуй фикс.

Проекцииле векторулуй  $\bar{K}_O$  пе акселе мобиле се експримэ прин формулеле (4). Пентру а калкула проекцииле продусулуй векториал  $\bar{\omega} \times \bar{K}_O$  сэ експримэм ачест продус прин версорий акселор де координате суб формэ де детерминант

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Сэ нотэм проекциле моментулуй принчипал ал форцелор пе акселе де координате прин

$$L_x = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k); \quad L_y = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k); \quad L_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k).$$

Сэ алкэтуим прима екуацые, проектынд пе акса  $x$  тоць векторий, каре се концин ын (14)

$$\frac{d}{dt}(J_x \omega_x) + J_z \omega_y \omega_z - J_y \omega_z \omega_y = L_x;$$

сау, цинынд конт, кэ  $J_x$  есте о мэриме константэ ын системул де координате мобил, авем

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = L_x.$$

Челелалте доуэ екуаций пот фи обцинуте прин пермутаря чикликэ а индичилор  $x, y, z$ . Авем дефинитив

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = L_x;$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x = L_y;$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = L_z. \quad (16)$$

Екуацииле (16) сынт нумите екуацинле динамиче але луй Ейлер.

**Екуацииле динамиче але луй Ейлер пентру рижидул ку ун пункт фикс. каре се мишнэ суб акциуня форцей де греутате**

Сэ пресупунем, кэ асупра рижидулуй, каре аре ун пункт фикс, акционязэ нумай о сингурэ форцэ активэ — форца де греутате проприе  $\bar{P}$ . Сэ нотэм центрл де греутате ку  $C$  (фиг. 282). Сэ нотэм ку  $x_C, y_C, z_C$  координателе пунктулуй  $C$  ын системул де координате мобил. Раза вектоаре  $\bar{r}_C$  а пунктулуй  $C$

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k},$$

унде  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  сынт версорий системулуй де координате мобил.

Пентру а обцине експресия форцей де греутате  $\bar{P}$  сэ презентэм ачастэ форцэ май ынтый дескомпусэ дупэ акселе систе-



мулуй де координате фикс. Проекцииле форцей  $\bar{P}$  пе акселе системулуй фикс сынт

$$P_{x_1} \equiv 0; P_{y_1} \equiv 0; P_{z_1} = -Mg,$$

унде акса  $Oz_1$  есте ориентатэ вертикал ын сус,  $M$  есте маса корпуслуй, яр  $g$  — акчелерация кэдерий либере.

Форца

$$\bar{P} = -Mg\bar{z}_1^0, \quad (17)$$

унде  $\bar{z}_1^0$  есте версорул аксей фиксе  $Oz_1$ , яр семнул минус аратэ, кэ форца де греутате есте ындрептатэ вертикал ын жос.

Пентру а калкула проекцииле форцей  $\bar{P}$  пе акселе системулуй де координате мобил вом фолоси валориле косинусурило (таб. 3, паж. 262). Пентру проекцииле пе акселе системулуй мобил  $Oxyz$  обцинем

$$P_x = -Mg\gamma_1; P_y = -Mg\gamma_2; P_z = -Mg\gamma_3, \quad (18)$$

унде  $\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi$ ;  $\gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi$ ;  $\gamma_3 = \cos \theta$ .

Сэ скрием експресия моментулуй форцей  $\bar{P}$  ын рапорт ку пунктул фикс

$$\bar{M}_O(\bar{P}) = \bar{r}_C \times \bar{P} = -Mg \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Пентру моментеле форцей де греутате  $\bar{P}$  фацэ де акселе мобиле обцинем урмэтоареле експресий:

$$M_x(\bar{P}) = Mg(z_C\gamma_2 - y_C\gamma_3);$$

$$M_y(\bar{P}) = Mg(x_C\gamma_3 - z_C\gamma_1);$$

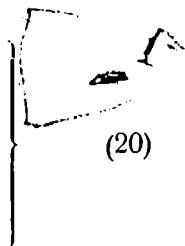
$$M_z(\bar{P}) = Mg(y_C\gamma_1 - x_C\gamma_2).$$

Екуацииле динамиче але луй Ейлер ын казул мишкэрий рижидулуй ку ун пункт фикс нумай суб акциуня форцей де греутате проприе сынт

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = Mg(z_C\gamma_2 - y_C\gamma_3),$$

$$J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = Mg(x_C\gamma_3 - z_C\gamma_1),$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = Mg(y_C\gamma_1 - x_C\gamma_2).$$



(20)

Екуацииле динамиче але луй Ейлер (20) ын казул мишкэрий рижидулуй суб акциуня форцей де греутате концин шасе функций некуноскуте де тимп:  $\omega_x$ ;  $\omega_y$ ;  $\omega_z$ ;  $\gamma_1$ ;  $\gamma_2$ ;  $\gamma_3$ . Пентру детерминаря лор авем нумай трей екуаций. Челелалте трей екуаций пот фи алкэтуите ын фелул урмэтор: сэ консидерэм версорул  $\bar{z}_1^0$  ал аксей фиксе  $Oz_1$ . Ын системул де координате фикс ачест вектор есте констант. Ынсэ фацэ де системул де координате мобил  $Oxyz$  ачест вектор есте вариабил. Апликынд формула луй Бур ла векторул  $\bar{z}_1^0$  обцинем трей екуаций.

Деривата тоталэ а векторулуй констант  $\bar{z}_1^0$  есте нулэ

$$\frac{d\bar{z}_1^0}{dt} = 0.$$

Сэ экспримэм деривата тоталэ прин чя локалэ. Вом авя

$$\frac{d\bar{z}_1^0}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{z}_1^0) = 0. \quad (21)$$

Сэ репрезентэм продусул векториал суб формэ де детерминант. Проекцииле векторулуй  $\bar{z}_1^0$  пе акселе системулуй де координате мобил сынт егале ку косинусуриле директоаре але аксей  $Oz_1$  фацэ де акселе мобиле, деоарече

$$\text{пр}_x(\bar{z}_1^0) = |\bar{z}_1^0| \cos(\bar{z}_1^0, \hat{x}) = \gamma_1; \text{пр}_y(\bar{z}_1^0) = \gamma_2; \text{пр}_z(\bar{z}_1^0) = \gamma_3.$$

Прин урмаре,

$$\bar{\omega} \times \bar{z}_1^0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Сэ проектэм амбеле пэрць але екуацией (21) пе акселе системулуй де координате мобил. Ка резултат, трансферынд проекцииле продусулуй векториал ын партя дряптэ, обцинем урмэтоареле трей екуаций:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega_z \gamma_2 - \omega_y \gamma_3; \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_x \gamma_3 - \omega_z \gamma_1; \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega_y \gamma_1 - \omega_x \gamma_2. \quad (22)$$

Екуацииле (22) сынт нумите екуацииле луй Пуасон.

### § 3. ИНТЕГРАРЯ ЕКУАЦИЙ ЛОР МИШКЭРИЙ

Екуацииле луй Ейлер ши але луй Пуасон, адикэ екуацииле (20) ши (22) формязэ ун систем комплект де шасе екуаций фацэ де шасе функций некуноскуте де тимп:  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Дупэ гэсиря ачестор функций ка резултат ал интегрэрий системулуй де екуаций консидерат, требуе сэ резолвэм проблема фундаменталэ а афлэрий мишкэрий корпулуй — сэ калкулэм унгюриле луй Ейлер  $\psi, \theta, \varphi$  ын функции де тимп. Ын ачест скоп субституим функцииле обцинуте ын екуацииле чинематиче але луй Ейлер, прекум ши ын експрессиале косинусурилор унгюрилор директоаре  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Ачест систем де екуаций капэтэ форма

$$\begin{aligned}\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi &= \omega_x(t); \quad \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = \omega_y(t); \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} &= \omega_z(t).\end{aligned}\quad (23)$$

Ын урма интегрэрий системулуй (23) гэсим  $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ , адикэ проблема детерминэрий мишкэрий корпулуй есте резолватэ.

Пентру интеграря системулуй де екуаций дифференциале але луй Ейлер—Пуасон есте нечесар сэ афлэм шасе интеграле приме але системулуй консидерат, адикэ шасе релаций де фелул

$$f_k(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) = C_k (k = 1, 2, 3, \dots, 6),$$

унде  $C_k$  сынт константе.

Екуацииле луй Ейлер—Пуасон ау трей интеграле приме пентру орьче параметри (адмишь пентру рижид)  $J_x, J_y, J_z, x_C, y_C, z_C$  ши пентру орьче кондиций инициале але мишкэрий  $\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}$ , адикэ пентру орьче валорь инициале але унгюрилор луй Ейлер ши але деривателор лор ын рапорт ку тимпул.

Ачесте трей интеграле сынт нумите интеграле класиче. Сэ ле дедучем.

1. Интеграла моментулуй чинетик ын рапорт ку вертикала (акса  $Oz_1$ ) реесе немижлочит дин теорема деспре моментул чинетик ын рапорт ку акса  $Oz_1$ : деривата ын рапорт ку тимпул де ла проекция моментулуй чинетик  $\vec{K}_O$  пе акса  $Oz_1$  есте егалэ ку проекция моментулуй принчипал ал форцелор екстериоаре пе ачеяш аксэ:

$$\frac{dK_{z_1}}{dt} = L_{z_1}.$$

Ла мишкаря корпулуй форца де греутате а луй есте паралелэ ку акса  $Oz_1$  ши моментул ей ын рапорт ку  $Oz_1$  есте нул, форца де реакциуне ын пунктул фикс  $O$  де асемения ну креазэ момент ын рапорт ку акса  $Oz_1$ . Прин урмаре, сума моментелор

тутурор форцелор ын рапорт ку акса  $Oz_1$  ын тот тымпул мишкэ-рий есте егалэ ку zero, адикэ

$$L_{z_1} = 0,$$

деч

$$K_{z_1} = \text{const.}$$

Компонентеле моментулуй чинетик  $\bar{K}_0$  пе акселе системулуй де координате мобил ын казул, кынд еле коинчид ку акселе принципале де инерции, сынт

$$K_x = J_x \omega_x; K_y = J_y \omega_y; K_z = J_z \omega_z,$$

деч пентру проекция луй пе акса  $Oz_1$  авем

$$K_{z_1} = J_x \omega_x \gamma_1 + J_y \omega_y \gamma_2 + J_z \omega_z \gamma_3.$$

Аша дар, прима интегралэ класикэ аре форма

$$J_x \omega_x \gamma_1 + J_y \omega_y \gamma_2 + J_z \omega_z \gamma_3 = \text{const} = l. \quad (24)$$

Експресия  $K_{z_1} = \text{const}$  аратэ, кэ ходографул моментулуй чинетик ал корпулуй ку ун пункт фикс, каре се мишкэ суб акциуна форцей де греутате, есте о линии планэ, ситуатэ ын планул, перпендикулар пе акса  $Oz_1$ .

2. А доуа интегралэ класикэ есте интеграла енержіей. ын казул легэтурий идеале ачастэ интегралэ поате фи репрезентатэ ын форма женералэ

$$T + P = h.$$

ын казул де фацэ енержія потенциалэ  $P$  а форцей де греутате  $\bar{P}$  се експримэ прин координата  $z_{1C}$  а чентрулуй де греутате ын системул де координате фикс:  $P = Mg z_{1C}$ , дакэ консидерэм дрепт zero ал енержіей потенциале валоаря ей ын планул оризонтал  $x_1 y_1$ . Експресия пентру  $z_{1C}$  поате фи обцинутэ проектынд векторул  $\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k}$ , експримат прин координателе мобиле, пе акса  $Oz_1$ . Вом авя

$$z_{1C} = x_C \gamma_1 + y_C \gamma_2 + z_C \gamma_3.$$

Ка резултат интеграла енержіей поате фи експриматэ ын фелул урмэтор

$$\frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) + Mg (x_C \gamma_1 + y_C \gamma_2 + z_C \gamma_3) = h. \quad (25)$$

3. А трия интегралэ класикэ презинтэ релация, куноскутэ дин жеометрия аналитикэ, пентру косинусуриле унгюрилор директоаре:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (26)$$

Системул де екуаций але луй Ейлер—Пуасон се резолвэ атыт де греу, ынкыт ын казул чел май жєнерал, кынд мэримиле  $J_x, J_y, J_z, x_c, y_c, z_c$  сынт арбитраре, ау фост гэсите дестул де пущине солуций партикуларе фацэ де кондицииле инициале але мишкэрий. Нумай ын казул унор ануите кондиций суплиментаре пентру моментеле де инерции ши позиция чентрулуй де греутате ау фост гэсите трей солуций жєнерале, жусте пентру орьче кондиций инициале. Челелалте солуций гэсите сынт партикуларе, деоарече еле сатисфак екуацииле мишкэрий нумай ын ануите кондиций инициале але мишкэрий.

Солуцииле, жєнерале фацэ де кондицииле инициале, апарцил луй Л. Ейлер (1707—1783), Ж. Л. Лагранж (1736—1813) ши С. В. Ковалевская (1850—1891).

#### § 4. КАЗУЛ ЛУЙ ЕЙЛЕР

Дакэ чентрул де греутате ал рижидулуй коинчиде ку пунктул фикс, адикэ  $x_c = 0, y_c = 0, z_c = 0$  ши, афарэ де форца де греутате, каре есте екилибрэтэ де реакциуня сприжинулуй ын пунктул фикс, асупра рижидулуй ну акционязэ алте форце, атунч ачест корп сатисфаче казул луй Ейлер. Моментеле де инерции  $J_x, J_y, J_z$  пот фи оарекаре.

Ын казул де фацэ а патра интегралэ реесе дин кондиция, кэ моментул принципал ал системулуй де форце, каре акционязэ асупра рижидулуй, ын рапорт ку пунктул фикс есте нул  $L_0 = 0$ , адикэ

$$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0,$$

ши екуацииле луй Ейлер капэтэ форма

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = 0; J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x = 0;$$

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = 0. \quad (1)$$

Ачесте екуаций адмит доуэ комбинаций интеграбиле: ынмулцинд екуацииле кореспунзэтор ку  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  ши адунынд, обцинем

$$J_x\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + J_y\omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + J_z\omega_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

де унде

$$\frac{1}{2} (J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) = \text{const} = h; T = h. \quad (2)$$

Екуация (2) есте интеграла енержией, каре експримэ фаптул, кэ ын тимпул мишкэрий енергия чинетикэ а корпулуй рэмыне

константэ. Ынмолцинд екуацииле (1) ку  $J_x \omega_x$ ,  $J_y \omega_y$ ,  $J_z \omega_z$  ши адунынд, обцинем

$$J_x^2 \omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + J_y^2 \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + J_z^2 \omega_z \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

де унде резултэ релация

$$J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 \equiv \text{const} = K_0^2. \quad (3)$$

Модулул моментулуй чинетик ал корпусулуй рэмыне констант ын тимпул мишкэрий, фиинд егал ку модулул моментулуй чинетик ын моментул инициал. Екуация (3) есте а патра интегралэ, нечесарэ пентру резолваря екуациилор луй Ейлер — Пуасон ын казул луй Ейлер.

Сэ черчетэм унеле проприетэць але мишкэрий корпусулуй ын казул жёнерал ал луй Ейлер. Интеграла (2) поате фи обцинутэ реешинд дин ачя, кэ ын казул де фацэ лукрул механик ал форцей де преутате есте нул. Деоарече пунктул де аппликацие ал ачестей форце ну се мишкэ, яр легэтура есте идеалэ, дин теорема жёнералэ а динамичий деспре вариация енержіей чинетиче резултэ екуация (2)

$$T = h.$$

Дин алтэ теоремэ жёнералэ а динамичий, ануме дин теорема деспре вариация моментулуй чинетик ын системул де координате фикс  $\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{L}_O$  ын казул де фацэ, адикэ пентру  $\bar{L}_O = 0$  резултэ, кэ моментул чинетик ал корпусулуй ын тимпул мишкэрий луй рэмыне ун вектор констант

$$\bar{K}_O = \text{const} = \bar{K}_O^{(\text{иници})}. \quad (4)$$

Релация векториалэ (4) концине доуэ интеграле приме: интеграла класикэ а консервэрий проекцией моментулуй чинетик пе вертикалэ ( $K_{z1} = \text{const}$ ) ши интеграла (3) а консервэрий модулулуй моментулуй чинетик (интеграла а патра).

Сэ мөнционэм о консечинцэ а екуациилор (2) ши (3), каре поате фи обцинутэ циньнд конт, кэ енержія чинетикэ а рижидулуй есте егалэ ку продукул скалар ал векторулуй моментулуй чинетик ал корпусулуй прин витеза унгуларэ а луй, адикэ

$$T = \frac{1}{2} \bar{K}_O \bar{\omega}.$$

Ын акорд ку (2)

$$\frac{1}{2} |\bar{K}_O| |\bar{\omega}| \cos \alpha = \text{const}.$$

Авынд ын ведере екуация (3), адикэ пентру  $|\bar{K}_O| = \text{const}$ ,

$$|\bar{\omega}| \cos \alpha = \omega_K = \text{const}, \quad (4')$$

чея че се поате формула ын фелул урмэтор: ын казул луй Ейлер проекция витезей унгуларе инстантанеа а рижидулуй не дирекция моментулуй чинетик есте о мэриме константэ.

О интерпретаре жеометрике интересантэ а мишкэрий рижидулуй ын казул луй Ейлер а фост пропусэ де кэтре Пуансо, савант франчез дин секолул XIX. Пуансо а демонстрат, кэ ын казул луй Ейлер ал мишкэрий рижидулуй елипсоидул де инерции, каре жореспунде лунктулуй фикс ши есте легат рижид ку корпус мобил, се ростоделште фэрэ алуэкаре пе ун план ануит, фикс ын спациу.

Пентру а интегра екуацииле (1), цинынд конт де кондицииле (2) ши (3), требуе сэ експримэм  $\omega_z$  ши  $\omega_x$  дин екуацииле (2) ши (3), апой сэ ле субституим ын екуация а доуа дин системул (1). Се обцине о екуация диференциалэ фацэ де  $\omega_y$  ку вариабиле сепарабиле, каре поате фи адусэ ла квадратура суб форма интегралей елипtiche; некуноскута  $\omega_y$  се експримэ принтр'о функции елиптике.

Апой детерминэм  $\omega_x$  ши  $\omega_z$  дин екуацииле (2) ши (3), яр дин формулеле чинематиче але луй Ейлер — ши унгюриле луй Ейлер  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , адикэ астфел стабилим мишкаря системулуй.

## § 5. КАЗУЛ ЛУЙ ЛАГРАНЖ

### Екуацииле мишкэрий ши интеграря лор

Ын казул луй Лагранж  $J_x = J_y$ ;  $J_z$  аре о валoare арбитрарэ,  $x_c = y_c = 0$ ,  $z_c \neq 0$ .

Екуацииле динамиче але луй Ейлер капэтэ форма

$$J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_x) \omega_y \omega_z = Mgz_c \gamma_2;$$

$$J_x \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_y = -Mgz_c \gamma_1; \quad J_x \frac{d\omega_z}{dt} = 0. \quad (1)$$

Дин ултима екуацияе обцинем интеграла а патра

$$\omega_z = \text{const} = r_0. \quad (2)$$

Сэ алэтурэм ла ачастэ интегралэ челе трей интеграле класиче:

$$J_x (\omega_x \gamma_1 + \omega_y \gamma_2) + J_z r_0 \gamma_3 = l, \quad (3)$$

$$J_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z r_0^2 = -2Mgz_c \gamma_3 + h, \quad (4)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (5)$$

Дупэ субституиря мэримилор  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  ку експресииле лор

дин екуацииле чинематиче але луй Ейлер (везь „Чинематика“, кап. 8, § 4) обцинем

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + a \cos \theta = \alpha; \quad (6)$$

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta + b r_0 \cos \theta = \beta; \quad (7)$$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = r_0, \quad (8)$$

унде

$$\alpha = \frac{h - J_z r_0^2}{J_x}; \quad (9)$$

$$a = \frac{2Mgz_C}{J_x}; \quad (10)$$

$$\beta = \frac{l}{J_x}; \quad (11)$$

$$b = \frac{J_z}{J_x}. \quad (12)$$

Сэ ынтродучем вариabila

$$s = \cos \theta. \quad (13)$$

Ын ачест каз

$$-\sin \theta \dot{\theta} = \dot{s}, \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{s}}{\sin \theta}. \quad (13')$$

Сэ експримэм апой  $\dot{\psi}$  ши  $\dot{\varphi}$  дин екуацииле (7) ши (8) прин s:

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - b r_0 s}{1 - s^2}, \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - \frac{s(\beta - b r_0 s)}{1 - s^2}. \quad (14')$$

Субституинд  $\dot{\psi}$  ши  $\dot{\theta}$  ын (6), обцинем урмэтоаря екуацие диференциалэ фацэ де функция s(t):

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (\alpha - as)(1 - s^2) - (\beta - b r_0 s)^2 = f(s). \quad (15)$$

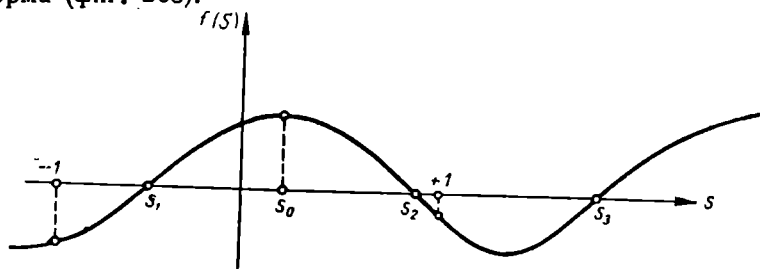
Сэ стабилим лимите ле вариаций мэримий s, циньнд конт кэ f(s) есте о мэриме позитивэ. Сэ конструиим ын ачест скоп графикул функцией f(s) пентру тоате валориле реале але вариabileй s.

\* Требуе сэ менционэм алч кэ пентру  $z_C$  ши  $\cos \theta$  позитиве мэримя  $\alpha$  де асемениа есте позитивэ, чея че резултэ дин (6).



Пентру  $s \rightarrow (-\infty)$  функция  $f(s) \rightarrow (-\infty)$ , деоарече ын терменул ку чя май маре путере  $as^3$  коефициентул  $a$  есте позитив. Пентру  $s = -1$  ши  $s = -1$  функция  $f(s)$  обцине валорь негативе. Дар пентру  $s = s_0$  ын моментула  $t = 0$  функция  $f(s)$  есте позитивэ; пентру  $s \rightarrow (+\infty)$  авем  $f(s) \rightarrow (+\infty)$ .

Аша дар, тоате трей рэдэчинь  $s_1, s_2, s_3$  але полиномулуй  $f(s)$  сынт реале ши се афлэ кореспунзэтор ын интервалеле  $(-1, s_0)$ ,  $(s_0, +1)$ ,  $(+1, \infty)$ , яр графикул функцией  $f(s)$  аре форма (фиг. 283).



Фиг. 283.

Пентру жа функция  $f(s)$  сэ ну фие непативэ есте нечесар, ка сэ вариеше ынтре  $s_1$  ши  $s_2$ .

Сепарэм ын екуация (15) вариабилеле ши обцинем

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{f(s)},$$

унде семнул дин фаца рэдэчиний патрате требуе луат ын кореспундере ку интервалул крештерий сау дескрештерий мэримий  $s$ , яр  $t$  се експримэ прин  $s$  суб форма интегралей елипtiche. Ла инверсаря ачестей интеграле мэримя  $s$ , прин урмаре, ши унгюл де нутацие  $\theta$  се експримэ принтр'о функцие елиптикэ фацэ де тимпул  $t$ . Дин (14) ши (14') гэсим  $\psi$  ши  $\phi$  жа функций де тимпул  $t$ .

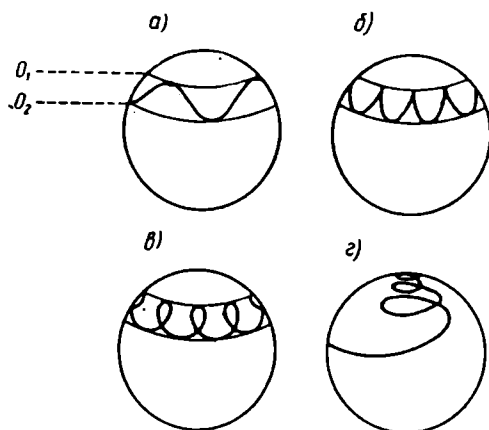
Фиёкаре пункт де ле акса де ротацие проприне а рижидулуй дескрие пе сфера ку раза кореспунзэтоаре ши ку чентрул ын пунктул фикс о траекторие сферикэ оарёкаре, ситуатэ ынтр'о зонэ сферикэ анумитэ. Сэ нумим апекс ал жироскопулуй унул дин ачесте пункте але аксей  $Oz$ .

Ын функцие де карактерул витезей унгюларе де пречесие, адикэ де фелул функцией  $\psi$ , авем диферите казурь посибиле але мишкэрий апексулуй.

1. Дакэ семнул витезей унгюларе де пречесие  $\dot{\psi}$  есте унул ши ачелаш, атунч траектория апексулуй пе сферэ есте де форма, репрезентатэ ын фигура 284, а; траектория ну аре пункте унгюларе; еа есте ситуатэ ын интериорул уней зоне сфериче, фининд танжентэ ла маржиниле ей.

2. Дакэ пе маржия де сус а зоней сфериче функция  $\dot{\psi}$  есте егалэ ку зеро, атунч траектория апексулуй аре форма уней чиклоиде рэстурнате (фиг. 284, б).

3. Ын фине, функция  $\dot{\psi}$  поате сэ-шь скимбе семнул, адикэ пот фи режуйнэ атыт де пречесие директэ, кыт ши де пречесие инверсэ. Ын ачест каз траектория апексулуй аре лацурь (фиг. 285, в).



Фиг. 284.

Афарэ де фелуриле принципале але мишкэрилор жироскопулуй луй Лагранж, адикэ а жироскопулуй симетрик, ау фост гэсите ши алте казурь партикуларе. Аша, де екземплу, есте посибил жироскопул адормит, адикэ жироскопул, акса кэруя рэмыне тот тимпул вертикалэ. Ын ачест каз кондицииле инициале сынт евиденте:

$$\theta_0 = 0; \quad \dot{\theta}_0 = 0; \quad \dot{\psi}_0 = 0.$$

Есте посибил де асеменя ши ун аша жироскоп, каре поате фи нумит жироскоп, че се ридикэ монотон; ла мишкарэ унуй жироскоп де ачест фел витеза унгуларэ де нутацие дескреште монотон. Апексул жироскопулуй дескрие пе сферэ о спиралэ, каре се ридикэ ын сус, рэсучинду-се асимптотик ын журул вертикалей. Траектория апексулуй унуй аша жироскоп есте репрезентатэ ын секциуне пе фигура 284, г. Ын фине, ын анумите кондиций инициале але мишкэрий, жироскопул луй Лагранж поате сэ се афле ын мишкарэ де пречесие регулатэ.

#### Жироскопеле, каре се рестабилиск де ла сине

Сэ студием класа жироскопелор луй Лагранж, каре пот фи апликате атыт ын техника жироскопикэ, кыт ши ын динамика апарателор де збор космич. Екуацииле чинематиче але мишкэрий жироскопелор де ачест фел се експримэ прин функций элементаре де тимп.

Сэ анализэм ын ачест скоп екуация (15) атунч, кынд параметрий ей сатисфак кондицииле урмэтоаре

$$\alpha = a, \quad (16)$$

$$\beta = b r_0. \quad (16')$$

Аша дар, асупра дателор инициале але мишкэрий, адикэ асупра унгюрилор луй Ейлер ши деривателор лор фацэ де тимп ын моментул  $t=0$  се импун анумите кондиций. Сэ арэтэм, кэ ын кондицииле (16) ши (16') ши пентру ниште адмитерь суп-лиментаре проблема се резолвэ ын функций елементаре ши се детерминэ о аша мишкаре а жироскопулуй, ын каре акса луй ынчепе сэ се апропиэ асимптомик де ла позиция инициалэ спре дирекция вертикалэ, адикэ жироскопул паркэ ышь рестабилиш-те позиция вертикалэ чей че есте нечесар пентру мулте апарате жироскопиче.

Ынтр'адевэр, сэ интегрэм екуация (15), каре ын кондиции-ле (16) ши (16') капэтэ форма

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \alpha(1+s)(1-s)^2 - \beta^2(1-s)^2 = (1-s)^2 [\alpha(1+s) - \beta^2]$$

сау

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \alpha(1-s)^2(s-s_1), \quad (17)$$

унде

$$s_1 = \frac{\beta^2}{\alpha} - 1.$$

Аша дар,  $f(s)$  аре о рэдэчинэ дублэ  $s_{2,3}=1$ , яр а трея рэ-дэчинэ  $s_1$  есте май микэ декыт унитатя (фиг. 283), чей че наш-те ынкэ о кондицие пентру дателе инициале, каре поате фи акцептатэ, деоарече ачаста есте а трея кондицие пентру мэри-миле  $\theta_0, \dot{\theta}_0, \psi_0, \dot{\psi}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$ . Астфел

$$s_1 < 1, \quad (18)$$

адикэ

$$\frac{\beta^2}{\alpha} < 2.$$

Апой дин (17) авем

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\alpha}(1-s)\sqrt{s-s_1}. \quad (19)$$

Дупэ кум аратэ мерсул де май департе ал резолвэрий про-блемей, аич требуе сэ луэм семнул плус. Сепарэм ын екуация (19) вариабилеле ши обцинем

$$\frac{ds}{(1-s)\sqrt{s-s_1}} = \sqrt{\alpha} dt. \quad (20)$$

Сэ интегрэм ку ажуторул субституцией

$$\begin{aligned} s - s_1 &= z^2; \\ ds &= 2z dz; \quad 1 - s = 1 - s_1 - z^2; \\ \int \frac{ds}{(1-s)\sqrt{s-s_1}} &= 2 \int \frac{dz}{1-s_1-z^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Дупэ дескомпунеря експресией де суб интегралэ ын фрак-  
ций елементаре ши ефектуаря интегрэрий, обцинем екуация

$$\frac{1}{\sqrt{1-s_1}} [\ln(\sqrt{1-s_1}+z) - \ln(\sqrt{1-s_1}-z)] = \sqrt{a}t + C.$$

Сэ ынлокуим  $z$  дин (21) ши сэ нотэм  $s_{t=0} = s_0$ , унде

$$s_1 < s_0 < 1. \quad (21')$$

Афлынд константа арбитрарэ, обцинем урмэтоаря експресие пентру  $s$  ка функции де тимп

$$\frac{1}{\sqrt{1-s_1}} \ln \frac{(\sqrt{1-s_1} + \sqrt{s-s_1})(\sqrt{1-s_1} - \sqrt{s_0-s_1})}{(\sqrt{1-s_1} - \sqrt{s-s_1})(\sqrt{1-s_1} + \sqrt{s_0-s_1})} = \sqrt{a}t. \quad (22)$$

Апой дин (22)

$$\frac{\sqrt{1-s_1} + \sqrt{s-s_1}}{\sqrt{1-s_1} - \sqrt{s-s_1}} = \frac{\sqrt{1-s_1} + \sqrt{s_0-s_1}}{\sqrt{1-s_1} - \sqrt{s_0-s_1}} e^{\sqrt{1-s_1} \sqrt{a}t}. \quad (23)$$

Нотынд  $\sqrt{1-s_1} = a_1$ , яр коефициентул функцией експоненциале дин партя дряптэ ку  $a_2$ , експримэм (23) ын фелул урмэтор

$$\frac{a_1 + \sqrt{s-s_1}}{a_1 - \sqrt{s-s_1}} = a_2 e^{a_1 \sqrt{a}t}. \quad (24)$$

Де аич

$$\sqrt{s-s_1} = \frac{a_2 a_1 e^{a_1 \sqrt{a}t} - a_1}{1 + a_2 e^{a_1 \sqrt{a}t}}. \quad (25)$$

Трекынд ын (25) ла лимитэ пентру  $t \rightarrow \infty$ , авем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{s-s_1} = a_1 = \sqrt{1-s_1},$$

адикэ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s = 1,$$

де унде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = 0,$$

деоарече

$$s = \cos \theta.$$

Аша дар, семнул позитив ын (19) а фост алес дрепт; ын каз контрар експонентул функцией експоненциале ар фи фост негатив. Ын ачест каз ла лимитэ семнеле н'ар фи кореспунс, адикэ мишкаря ку дескрештеря унгулуй  $\theta$  ар фи фост импосибилэ.

Прин урмаре, ын кондицииле инициале, каре сатисфак релацииле (16), (16'), (18) ши (21'), жироскопул ышь рестаби-

леште позиция вертикалэ, апропинду-се асимптомик де еа. Ун зша жирокоп поате фи фолосит ка елемент ал унуй систем аутомат, каре се акомодязэ де сине стэтэтор.

### Жирокопул астати

Сэ пресупунем, кэ  $J_x = J_y$  ши  $z_C = 0$ . Ун астфел де жирокоп презинтэ ын ачелаш тимп ун каз партикулар ал жирокопулуй луй Лагранж ши ал жирокопулуй луй Ейлер. Сэ студи-ем мишкаря луй ын урмэтоареле кондиций инициале:  $\omega_{x0} = 0$ ,  $\omega_{y0} = 0$ . Дин екуациле (2), (3), (4) ши (9) – (12) авем

$$l = J_z r_0 s_0; \quad h = J_z r_0^2;$$

$$\alpha = a = 0, \quad \beta = b r_0 s_0 (s_0 = \cos \theta_0).$$

Екуация (15) капэтэ форма урмэтоаре

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -(b r_0)^2 (s_0 - s)^2, \quad (26)$$

де унде резултэ, кэ

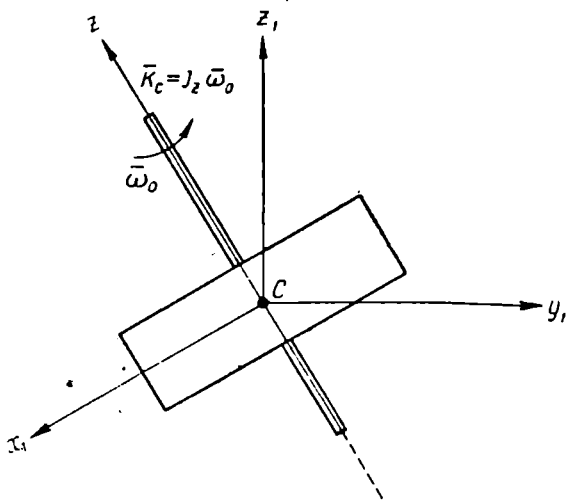
$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ ши } s = s_0 = \text{const};$$

ын орьче момент  $t$

$$\theta = \theta_0 = \text{const}; \quad \dot{\theta} = 0.$$

Дин екуациле (6), (7) ши (8) обцинем интегралеле

$$\dot{\psi} = \text{const} = 0; \quad \dot{\varphi} = \text{const} = r_0 \text{ ши } \varphi = r_0 t + \varphi_0.$$



Фиг. 285.

Ачесте кондийий инициале ынсямнэ, кэ ын моментул инициал жироскопулуй луй Лагранж — Ейлер и се комуникэ нумай ротация проприе ын журул аксей сале де симетрие, яр мишкаря де май департе а луй репрезинтэ нумай мишкаря континуэ де ротации ын журул ачестей аксе, каре-шь пэстрыээ дирекция са ын спациу. Дин ачастэ каузэ жироскопул луй Лагранж — Ейлер есте нумит *жироскоп астатик* сау *екилибрат*. Проприетатя са де а-шь пэстра дирекция аксей де ротации проприе се афлэ ла база тутурор аппликацийлор практиче але жироскоапелор де ачест фел (фиг. 285). Жироскопул астатик ын кондийий инициале арбитраре ефектуязэ о пречесие регулатэ ын журул моментулуй чинетик инициал, каре, дупэ кум се штие, есте ын вектор констант.

## § 6. ДЕТЕРМИНАРЯ ФОРЦЕЯ ДЕ РЕАКЦИУНЕ ЫН ПУНКТУЛ ФИКС

Реакциуня легэтурий ын локул артикулацией корпулуй дат ку ын алт корп оарекаре ын пунктул фикс ал челуй де ал дойка корп лоате фи детерминатэ фолосинд принципул луй Даламбер. Ын конформитате ку принципул луй Даламбер системул де форце, алкэтуит дин тоате форцеле активе, каре акцияээ немижлочит асупра корпулуй, дин реакциуниле легэтурийлор ши дин форцеле де инерции але тутурор пунктелор системулуй, сатисфаче кондичииле де екилибру:

$$(\bar{F}_k, \bar{R}_0, \bar{\Phi}_k) \in 0,$$

унде  $\bar{R}_0$  есте реакциуня ын пунктул фикс ал корпулуй. Уна дин кондичииле де екилибру есте егалитатя ку zero а векторулуй принципал ал тутурор форцелор

$$\sum \bar{F}_k + \bar{R}_0 + \sum \bar{\Phi}_k = 0.$$

Векторул принципал ал тутурор форцелор де инерции есте

$$\sum \bar{\Phi}_k = -M\bar{a}_c,$$

унде  $M$  есте маса корпулуй,  $\bar{a}_c$  — акчелерация чентрулуй маселор.

Сэ нотэм ку  $\bar{F}$  векторул принципал ал тутурор форцелор активе, адикэ

$$\sum \bar{F}_k = \bar{F}.$$

Пентру реакциуне авем експресия

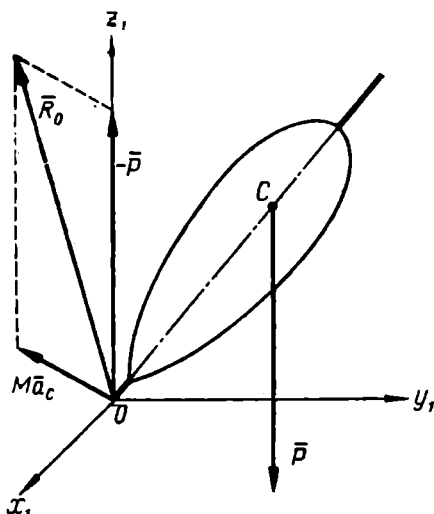
$$\bar{R}_0 = -\bar{F} + M\bar{a}_c.$$

Куноскынд лежя мишкэрий корпулуй, путем детермина акчелерация центрулуй маселор ши апой реакция легэтурий.

*Екземплу.* Сэ се детермине реакцияня ын сприжин (ын пункт ул фикс) а унуй жироскоп симетрик ал луй Лагранж, каре ефектуязэ о пречесие регулатэ ын журул вертикалей ку витеза унгуларэ  $\omega_1$ , егалэ ку о ротация пе минут. Унгул де нутация есте  $30^\circ$ , преутатя жироскопулуй —  $100 \text{ н}$ , дистанца динтре центрул де греутате ал жироскопулуй ши пунктул фикс  $z_c = 50 \text{ см}$ .

Резолваре. Ын урма пречесией регулате центрул маселор се мишкэ пе о чиркумферинцэ (фиг. 286) ши деч акчелерация центрулуй маселор жироскопулуй есте егалэ ку акчелерация нормалэ (аксипетэ). Ын казул консидерат

$$\bar{R}_0 = -\bar{P} + M\bar{a}_c, \quad a_c = \rho\omega_1^2,$$



Фиг. 286.

унде

$$\rho = z_c \sin \alpha = 50 \cdot \sin 30^\circ = 25 \text{ см},$$

$$a_c = 25 \cdot \omega_1^2; \quad Ma_c = \frac{100}{980} \cdot 25 \cdot \left(\frac{2\pi}{60}\right)^2.$$

Апроксиматив

$$Ma_c = 0,025 \text{ н}; \quad R_0 = \sqrt{P^2 + (Ma_c)^2} \approx 100 \text{ н}.$$

Аша дар, ын орьче момент реакцияня сприжинулуй се компуне дин доуэ форце: уна вертикалэ, ындрептатэ ын сус ши егалэ ку форца де греутате (форца  $\bar{P}$  есте ындрептатэ ын жос, яр  $-\bar{P}$  ын сус), ши о форцэ оризонталэ, паралелэ ку акчелерация центрулуй маселор. Деоарече ходографул акчелерацией центрулуй маселор, прин урмаре ши а форцей де инерции, есте о чиркумферинцэ, резултэ кэ ын тимпул мишкэрий корпулуй реакцияня тоталэ дескрие о супрафацэ коникэ.

Аич а фост консидерат ун каз идеал, кынд акциуния сприжинулуй ын пунктул фикс се манифестэ прин акциуния унуй сприжин нетед асупра унуй пункт (пичоруш аскуцит) ал жироскопулуй.

## § 7. РОТАЦИИЛЕ ПЕРМАНЕНТЕ ШИ МИШКЭРИЛЕ ПЕНДУЛАРЕ АЛЕ РИЖИДУЛУЙ КУ УН ПУНКТ ФИКС

Системул де екуаций але луй Ейлер ши Пуасон ау о солу-  
цие партикуларэ

$$\omega_x = C_1, \omega_y = C_2, \omega_z = C_3, \gamma_1 = C_4, \gamma_2 = C_5, \gamma_3 = C_6$$

пентру унеле валорь але тутурор константелор, адикэ пентру  
анумите валорь инициале але проекцилор витезей унгуларе ши  
анумите валорь але мэримилор  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

Ын анул 1894 савантул жерман Штауде а стабилит конди-  
ция нечесарэ, каре требуе сэ фие сатисфэкутэ де старя инициа-  
лэ а мишкэрий. Ачаствэ релацие афирмэ, кэ пентру фиекаре корп  
екзистэ ун кон алкэтуит дин асфел де дрепте, ынкыт дакэ уна  
диштр'ынселе девине вертикалэ, яр корпулуй и се комуникэ о  
анумитэ витезэ унгуларэ ын журул ей, атунч корпул континуэ  
сэ се ротяскэ ку витеза унгуларэ константэ, егалэ ку чя ини-  
циалэ, ын журул ачестей аксе, каре рэмыне вертикалэ.

Ын презент мишкэриле перманенте але рижидулуй ку ун  
пункт фикс ау о импортантэ техникэ деосебитэ ын жироскопие,  
ын динамика апарателор де збор космик.

Сынт посибиле де асемения ши мишкэриле пендуларе ын жу-  
рул акселор оризонтале. Дакэ ын моментул инициал корпулуй  
и се комуникэ о анумитэ мишкаре де ротацие ын журул уней  
аксе оризонтале оарекаре, атунч мишкаря корпулуй есте пенду-  
ларэ, асемэнэтоаре ку мишкаря пендулулуй физик, деши корпул  
аре нумай ун сингур пункт фикс.

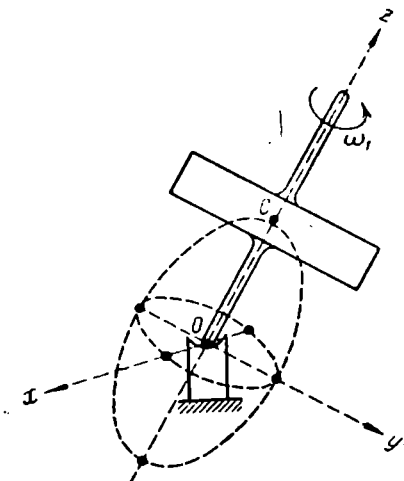
Ын казул жироскопулуй луй Лагранж ачаствэ проприетате  
о поседэ тоате акселе принчипале де инерцие, кореспунзэтоаре  
пунктелор де пе акса де симетрие а жироскопулуй. Мишкаря  
пендуларэ я наштере атунч, кынд центрул де греутате ал жи-  
роскопулуй се афлэ май жос декыт пунктул де сприжин де пе  
акса де симетрие. Мишкэриле пендуларе ау фост дескоперите  
де кэтре Б. К. Млодзеевский.

---

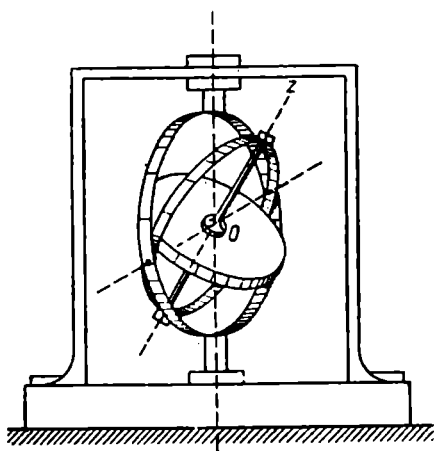


## ТЕОРИЯ ЖИРОСКОПУЛУЙ

Се нумеште *жироскоп* рижидул симетрик, каре се мишкэ ын журул пунктулуй фикс  $O$ , ситуат пе акса луй де симетрие  $Oz$  (фиг. 287). Центрул де греутате  $C$  ал жироскопулуй се афлэ пе акса луй де симетрие. Сэ консидерэм жироскоапеле, кэ-рора ли с'а комуникат о ротацие проприе ку витеза унгуларэ  $\omega_1$  ын журул аксей де симетрие  $Oz$ . Ачастэ аксэ есте нумитэ аксэ де ротацие проприе сау аксэ а жироскопулуй.



Фиг. 287.



Фиг. 288.

Еллипсоидул де инерциие ал жироскопулуй, кореспунзэтор пунктулуй фикс ал луй, есте ун еллипсоид де ротацие (ын фигурэ ел есте репрезентат принтр'о линии ынтреруптэ), яр орьче аксэ дин планул екуаториал, перпендикулар пе акса жироскопулуй (де екземплу  $Ox$  ши  $Oy$ ), есте аксэ принципалэ де инерциие. Моментеле де инерциие ын рапорт ку тоате ачесте аксе сынт егале. Акса жироскопулуй  $Oz$  есте аксэ принципалэ централэ де инерциие. Фиксаря унуй пункт ал аксей жироскопулуй поате фи ынфэптуитэ де обичей ку ажуторул рамелор де о формэ сау алта (фиг. 288). Пунктул фикс ал жироскопулуй се афлэ ла интерсекция аксей жироскопулуй ку акселе де ротацие але рамелор (линииеле ынтрерупте дин фиг. 288). Дакэ пунктул  $O$  се мишкэ пе ун план, атунч режидул ну есте жироскоп.

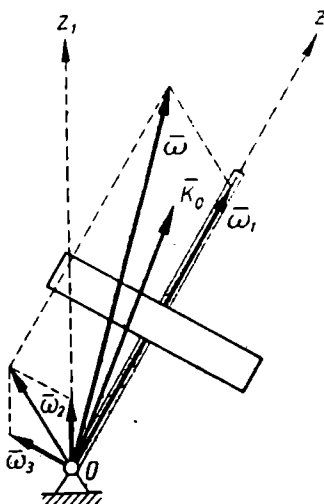
Жироскоапеле, каре се ынтребуицэзэ ын техникэ, ау витеза унгуларэ а ротацией проприй апроксиматив де  $2000 - 5000 \frac{1}{\text{сек}}$ ,

адикэ кореспунзэтор  $20\,000 - 50\,000 \frac{\text{рот}}{\text{мин}}$ . Жироскоапеле ау о апликаре дестул де вастэ ын техника модернэ. Феноменеле жироскопиче се манифестэ ын тоате мишкэриле компусе але корпурилор, атунч кынд мишкаря де ротация есте ун элемент ал мишкэрий компусе. Сэ студием феноменеле жироскопиче принципале, каре ау лок ын тоате инсталацииле жироскопиче.

## § 1. ТЕОРИЯ АПРОКСИМАТИВЭ А ЖИРОСКОПУЛУЙ

### Пресупунериле де базэ але теорийе апроксимативе

Фолосинд жироскопул ын диферите инсталаций, десеорь есте нечесар сэ куноаштем мишкаря аксей луй. Де обичей мишкаря де ротацияе проприе ын журул аксей жироскопулуй есте куноску-тэ, яр витеза унгуларэ а ачестей мишкэрь се менцине константэ. Моментул чинетик ын рапорт ку пунктул фикс ал жироскопулуй, каре аре о витезэ унгуларэ а ротациейе проприй дестул де маре, есте ориентат апроксиматив дупэ акса жироскопулуй, прин урмаре мишкаря аксей жироскопулуй поате фи стабилитэ куноскынд моментул чинетик ал ачестуй жироскоп. Ын казул жироскопулуй, че се ротэште дестул де репедэ, витеза унгуларэ де нутацияе ши витеза унгуларэ де пречесие сынт дестул де мичь ын компарацияе ку витеза унгуларэ де ротацияе проприе. Ын ачест каз де асемения есте микэ вариация унгулуй де нутацияе, адикэ а унгулуй динтре акса де ротацияе проприе ши акса де пречесие.



Фиг. 289.

Ын прима апроксимацияе витеза унгуларэ инстантанее а ротациейе жироскопулуй ын журул пунктулуй фикс  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$  (фиг. 289) поате фи консидератэ егалэ апроксиматив ку  $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_1$ , унде  $\bar{\omega}_1 = \bar{\varphi}$  есте витеза унгуларэ де ротацияе проприе,  $\bar{\omega}_2$  ши  $\bar{\omega}_3$  сынт кореспунзэтор витезеле унгуларе де пречесие ши де нутацияе.

Циньынд конт, кэ акселе  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  сынт аксе принципале де инерцияе ши  $J_x = J_y$ , пентру проекцииле моментулуй чинетик пе ачесте аксе, авем

$$K_x = J_x \omega_x; K_y = J_y \omega_y = J_x \omega_y; K_z = J_z \omega_z.$$

Деоарече  $\bar{\omega}$  есте ындрептатэ апроксиматив дупэ акса де ротации пропріе  $Oz$ ,  $\omega_x \approx 0$ ,  $\omega_y \approx 0$  ши, прин урмаре,

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} \approx K_z = J_z \omega_z \approx J_z \omega_1.$$

Аша дар, путем консидера, кэ моментул чинетик  $\bar{K}_0$  ал жироскопулуй, каре се ротеште дестул де репедэ, адикэ ла каре мэримя  $J_z \omega_1$  есте маре, есте егал апроксиматив ку моментул чинетик проприу ал жироскопулуй  $J_z \omega_1$  ши ориентат дупэ акса жироскопулуй, адикэ

$$\bar{K}_0 \approx J_z \bar{\omega}_1. \quad (1)$$

Дакэ акса жироскопулуй есте аксэ фиксэ, атунч експрессия апроксимативэ (1) а моментулуй чинетик девине екзактэ.

Ла резолваря проблемей деспре мишкаря акселор жироскоа-пелор де ачест фел поате фи апликатэ теорема луй Резал, каре пермите карактеризаря мишкэрий екстремитэций векторулуй моментулуй чинетик, куноскынд моментул принципал ал форцелор екстериоаре.

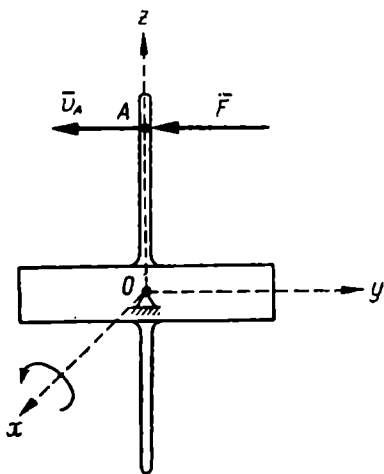
Партикуларитэциле есенциале алé жироскопулуй пот фи обцинуте циньнд конт де витеза унгюларэ де пречесие  $\bar{\omega}_2$ , неглижынд нумай витеза унгюларэ де нутации ши апликынд формула (1) ла калкуларя моментулуй чинетик ал жироскопулуй.

### Партикуларитэциле мишкэрий аксей жироскопулуй

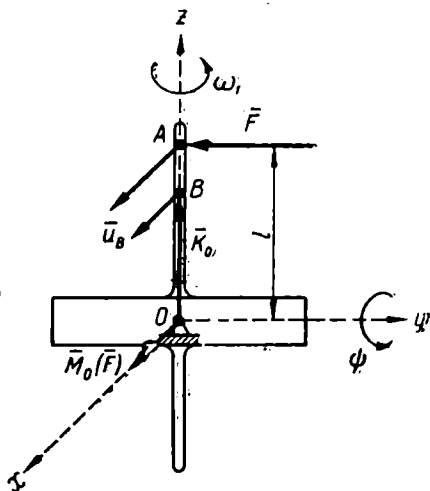
Сэ студиём партикуларитэциле мишкэрий аксей жироскопулуй ын компарации ку мишкаря аксей корпулуй, каре ну есте жироскоп. Ын скопул де а експлика май симплу проблема ачаста вом луга ын калитате де ун асемения корп ун жироскоп, акса де ротации а кэруя ну коинчиде ку акса де симетрие  $Oz$ . Фие чентрул де преутате ын амбеле казурь се афлэ ын пунктул фикс  $O$ , яр фрекаря ын ачест пункт се неглижазэ. Дакэ ынтр'ун пункт оарекаре  $A$  де пе акса де симетрие а корпулуй, каре се афлэ ын репаус, апликэм форца  $\bar{F}$  перпендикулярэ пе акса  $Oz$  (фиг. 290), атунч корпус ынчепе а се роти ын журул аксей  $Ox$ , перпендикулярэ пе планул, ын каре сынт ситуате форца ши акса де симетрие, яр пунктул  $A$  ал корпулуй се мишкэ ын дирекция акциуний форцей. Атунч кынд акциуния форцей ынчетязэ, корпус континуэ сэ се ротяскэ ын журул аксей  $Ox$  ын виртутия инерцией ку витеза унгюларэ константэ, дакэ ачастэ мишкаре есте пермисэ де фиксаря корпулуй ын пунктул  $O$ .

Ку тотул алтфел се компортэ жироскопул, че се ротеште дестул де репедэ, суб акциуния ачелеяш форце  $\bar{F}$  (фиг. 291), апликате ын пунктул  $A$ . Пунктул  $A$  ынчепе а се мишка ну ын дирекция акциуний форцей  $\bar{F}$ , чи, дупэ кум реесе дин теорема

луй Резал, ын дирекция векторулуй момент ал ачестей форце ын рапорт ку пунктул фикс  $O$  паралел ку акса  $Ox$ . Акса жироскопулуй ынчепе а се роти ын журул аксей  $Oy$ . Ынтр'аде-вэр, пынэ ла акциуня форцей моментулул чинетик ал жироскопулуй  $\vec{K}_O$  ера егал ку  $J_z \omega_1$  ши ориентат дупэ акса жироскопулуй, деоарече ачеста се рота нумай ын журул аксей де ротацие проприе  $Oz$  ку витеза унгуларэ  $\omega_1$ . Ын конформитате ку теорема луй Резал витеза  $\vec{u}_B$  а екстремитэций векторулуй  $\vec{K}_O$  есте егалэ ши паралелэ ку сума векториалэ а моментелор тутурор форцелор екстериоре  $\vec{L}_O^{(e)}$  ын рапорт ку пунктул  $O$ .



Фиг. 290.



Фиг. 291.

Ын казул консидерат

$$\vec{L}_O^{(e)} = \vec{M}_O(\vec{F}),$$

унде моментулул  $\vec{M}_O(\vec{F})$  аре дирекция аксей  $Ox$ .

Аша дар, витеза пунктулуй  $B$  ал екстремитэций векторулуй  $\vec{K}_O$  ши витезеле алтор пункте де пе акса жироскопулуй сынт паралеле ку  $\vec{M}_O(\vec{F})$ , чёя че кореспунде ротацией аксей жироскопулуй  $Oz$  сау пречесией жироскопулуй ын журул аксей  $Oy$ . Пречесия аксей жироскопулуй аре лок суб акциуня форцей ын дирекция моментулуй ачестей форце. Дакэ ынтр'ун момент оарекаре моментулул форцей девине егал ку zero, атунч пречесия аксей жироскопулуй ынчетьазэ. Акса жироскопулуй ну поседэ инерции. Есте евидент, кэ ын казул жироскопулуй валоаря форцей  $\vec{F}$  ну жоакэ ун рол есенциал, деоарече мишкаря де пречесие есте детерминатэ нумай де моментулул ачестей форцей ын рапорт ку пунктул фикс ал жироскопулуй. Дакэ центрулул де греутате ал жироскопулуй ну коинчиде ку пунктул фикс, атунч

ын моментул сумар ал форцелор требуе сз цинем конт де моментул форцей де греутате.

Сз формулэм урмэтоаря регулэ а пречесией: *дакэ асупра унуй жироскоп, каре се ротеште ын журул аксей сале, акция-зэ форце екстериоаре, моментул кэрора ын рапорт ку пунктул фикс есте диферит де зеро, атунч порциуня де аксэ а жироскопулуй, дупэ каре есте ындрептат моментул чинетик, ынчепе мишкаря са де пречесие ын дирекция векторулуй момент ал форцелор екстериоаре.*

Сз дедучем формула апроксимативэ а мэримий унгюлуй де пречесие  $\psi$  ын казул консидерат ал акциуний форцей  $\bar{F}$  (фиг. 291). Ынтр'ун интервал дестул де мик де тимп  $\tau$  пунктул  $B$  ал екстремитэций векторулуй  $\bar{K}_O$  се депласязэ пе аркул хо-дографулуй сзу ку мэримя

$$s_B \approx u_B \tau = M_O(\bar{F}) \cdot \tau = F l \tau = F \tau l.$$

Унгюл де ротацие  $\psi$  ын журул аксей  $Oy$  есте

$$\psi = \frac{s_B}{OB} = \frac{M_O(\bar{F}) \cdot \tau}{K_O} = \frac{F \tau l}{J_z \omega_1}, \quad (2)$$

деоарече

$$OB = K_O = J_z \omega_1.$$

Дин (2) реесе, кэ унгюл  $\psi$  есте ку атыт май мик, ку кыт есте май маре моментул чинетик  $J_z \omega_1$  ал жироскопулуй ын мишкаря де ротацие проприе; унгюл  $\psi$  есте директ пропорцио-нал ку моментул импулсулуй форцей ын рапорт ку пунктул фикс ал жироскопулуй. Формула (2) поате фи апликатэ ла ап-речиеря акциуний пертурбацинлор де скуртэ дуратэ асупра жироскопулуй, ын казул кынд мэримя  $\tau$  есте дестул де микэ. Дакэ мэримя  $J_z \omega_1$  есте дестул де маре, атунч импулсуриле де скуртэ дуратэ але форцелор сау шокуриле апроапе ну инфлу-енциязэ асупра аксей жироскопулуй. Акса жироскопулуй есте стабилэ пентру импулсуриле де форце де ачест фел. Аша дар, шокуриле пе акса жироскопулуй ну адук ла о депласаре еви-дентэ а аксей ачестуя де ла дирекция са инициалэ.

### Моментул жироскопик

Дупэ кум се штие, дакэ асупра жироскопулуй акциязэ форце екстериоаре, моментул принципал ал кэрора фацэ де пунктул фикс есте диферит де зеро, атунч аре лок пречесия (пречесиуня) жироскопулуй ку о ануцитэ витезэ унгюларэ. Да-кэ моментул форцелор екстериоаре есте нул, атунч пречесия жироскопулуй ынчетязэ. Аша дар, ын конформитате ку теория

апроксимативэ пентру а наште пречесиуня жироскопулуй есте нечесар моментул форцелор екстериоаре, ши инверс.

Фие  $\bar{\omega}_2$  есте витеза унгюларэ а мишкэрий де пречесиуне а жироскопулуй. Сэ калкулэм моментул форцелор екстериоаре, каре наск ачастэ пречесиуне. Конформ теоремей луй Резал моментул форцелор екстериоаре ын рапорт ку пунктул фикс ал жироскопулуй  $\bar{L}_O^{(e)}$  есте

$$\bar{L}_O^{(e)} = \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{u}_B.$$

Векторул  $\bar{K}_O$ , ындрептат дупэ акса жироскопулуй, се ротеште ын журул пунктулуй фикс ку витеза унгюларэ де пречесиуне  $\bar{\omega}_2$ . Прин урмаре, витеза пунктулуй  $B$ , каре коинчиде ку екстремитатя векторулуй  $\bar{K}_O$  поате фи калкулатэ дупэ формула аналогэ ку формула векториалэ а луй Ейлер пентру витеза унуй пункт оарекаре ал корпулуй ку ун пункт фикс, адикэ

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \overline{OB} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O,$$

деоарече

$$\overline{OB} = \bar{K}_O = J_z \bar{\omega}_1.$$

Пентру  $\bar{L}_O^{(e)}$  авем

$$\bar{L}_O^{(e)} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O = J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1). \quad (3)$$

Дакэ апликэм уна дин консечинцеле принципиулуй луй Даламбер, ануме, кэ сума векторилор момент ай форцелор екстериоаре ши а моментулуй форцелор де инерции але тутурор пунктелор жироскопулуй есте егалэ ку zero, атунч

$$\bar{L} + \bar{L}_O^{(e)} = 0,$$

унде  $\bar{L}$  есте моментул тутурор форцелор де инерции але жироскопулуй ын рапорт ку пунктул фикс. Моментул  $\bar{L}$  есте нумит *момент жироскопик*. Цинынд конт де (3), обцинем

$$\bar{L} = -\bar{L}_O^{(e)} = -J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1) = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)$$

сау дефинитив

$$\left. \begin{aligned} \bar{L} &= J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2), \\ L &= J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

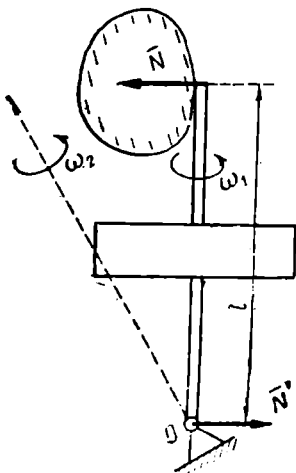
унде  $\theta$  есте унгюл де нутации, адикэ унгюл динтре акса де ротации проприе ши акса де пречесие.

Моментул жироскопик поате фи репрезентат ка моментул куплулуй жироскопик де форце ку каре жироскопул акцияээ асупра корпурило, каре-й импун мишкарэ де пречесиуне суб акциуня моментулуй форцелор екстериоаре  $\bar{L}_O^{(e)}$ . Де обичей ре-

акциуня жироскопулуй суб форма куплулуй жироскопик се трансмите асупра ачестор корпусь прин интермедиул рулменцилор, ын каре есте фиксатэ акса жироскопулуй. Дакэ ачесте корпусь сау унул динтр'ынселе ау посибилитатя сэ се миште, атунч куплул жироскопик поате сэ провааче мишкаря лор.

Дин (4) реесе, кэ моментул жироскопик есте нул атунч, кынд витеза унгуларэ де пречесиуне  $\omega_2$  есте егалэ ку зеро сау кынд акса жироскопулуй есте паралелэ ку акса де пречесиуне.

Акциуня куплулуй жироскопик де форце есте детерминатэ комплект де моментул жироскопик ал ачестуй куплу, каре поате фи калкулат дупэ формула (4). Ынсэ десеорь есте май конвенабил сэ детерминэм ачастэ акциуне апликынд регула луй Жуковский базатэ пе формула (4).



Фиг. 292.

Регула луй Жуковский: дакэ жироскопулуй, каре се ротеште дестул де репедэ, и се импуне форцат о мишкаре де пречесиуне, атунч я наштере ун куплу жироскопик де форце, каре тинде сэ стабилискэ акса жироскопулуй паралел ку акса де пречесиуне ын аша фел, кэ дупэ че дирекцииле ачестор аксе коинчид ротацииле ын журул лор сэ фие де ачелаш сенс.

Дакэ ун корп оарекаре ый ымпедикэ жироскопулуй сэ-шь стабилискэ, акса са паралел ку акса де пречесиуне, атунч жироскопул апасэ асупра ачестуй корп ши асупра пунктулуй фикс ал сэу

(фиг. 292). Ачастэ форцэ де пресиуне  $N$  поате фи калкулатэ дупэ формула

$$Nl = L = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta$$

сау

$$N = \frac{L}{l} = \frac{J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta}{l}, \quad (5)$$

унде  $l$  есте дистанца динтре пунктул фикс ал жироскопулуй ши пунктул де контакт ал аксей сале ку корпусь. Дакэ акса жироскопулуй есте фиксатэ ын рулменць, атунч  $l$  есте дистанца динтре ей.

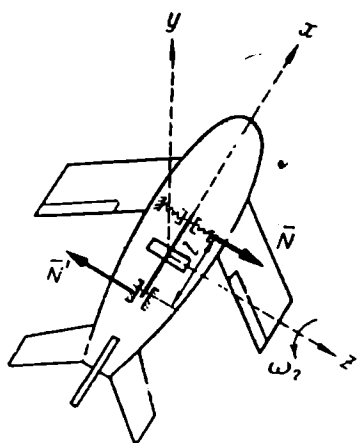
#### Апликаций техниче але жироскопелор

Сэ анализем уна дин нумероаселе апликаций але жироскопулуй ку пречесиуне, мишкаря кэруя поате фи дескрисэ пе база регулий луй Жуковский, ануме, апликаря жироскопулуй ла мэсураря витезелор унгуларе. Фие жироскопул, акса кэруя есте фиксатэ ку ажуторул рулменцилор, ши каре се ротеште ын жу-

рул ачестей аксе ку о витезэ унгуларэ дестул де маре, есте инсталат ынтр'ун апарат де збор. Дакэ апаратул де збор се ротеште ын журул уней аксе инстантанее ку витеза унгуларэ  $\omega_2$ , атулч ачастэ витезэ унгуларэ се манифестэ ла жироскоп ка витезэ унгуларэ де пречесиуне ши поате фи апречиятэ дупэ форца де пресиуне жироскопикэ  $N$ . Ла рындул сэу, ачастэ форца поате фи мэсуратэ, де екземплу, дупэ деформация спиралей, де каре есте фиксат ун рулмент ал жироскопулуй (фиг. 293). Ын акорд ку (5) пентру  $\omega_2$  авем

$$\omega_2 = \frac{N I}{J_z \omega_1 \sin \theta} \quad (6)$$

Ын практика мэсурэрий витезелор унгуларе де обичей се фолосеште казул партикулар  $\theta = 90^\circ$ . Дакэ реализэм пе апаратул де збор ун аша диспозитив де



Фиг. 293.

регларе, каре, де екземплу, ку ажуторул унор кырме ар тинде сэ егалезе витеза унгуларэ  $\omega_2$  пентру апаратул де збор ку zero, атулч ын фелул ачеста с'ар путя общине стабилизаря апаратулуй де збор дупэ витеза унгуларэ фацэ де акса кореопунзэтоаре. Креынд асупра спринжинулуй спиралей ку ажуторул уней трансмисий о пресиуне кореспунзэтоаре  $N$ , еквивалентэ ку витеза унгуларэ де пречесиуне, путем кондуче апаратул де збор ку ачест диспозитив де регларе ку кырмэ. Есте евидент, кэ пентру стабилизаря ши кырмуиря апаратулуй де збор сынт суфичиенте трей жироскоапе, акселе кэроора сынт речипрок перпендикуларе.

Афарэ де стабилизаря ку ажуторул диспозитивулуй де регларе, кынд жироскопул есте фолосит ын калитате де элемент сенсибил, ел поате фи фолосит ши пентру стабилизаря немижлочитэ а инсталациилор де артилерие ши де алтэ натурэ пе корэбий, пентру потолирия балансэрий, пентру стабилизаря вагоанелор кэийй ферате ку о сингурэ шинэ ш. а.

О алтэ проприетате импортантэ а жироскопулуй, каре аре о апликаре вастэ, есте проприетатя луй де а-шь пэстра дирекция аксей сале атулч, кынд моментул форселор екстериоаре есте егал ку zero. Ын ачест каз мишкарэ де пречесиуне а аксей жироскопулуй липсеште ши акса ышь пэстрызэ нескимбатэ дирекция са ын спацу. Ачастэ проприетате а жироскопулуй екилибрат се фолосеште ын компасул жироскопик, ын индикатоа-



реле де котитурэ, ын диспозитивеле де стабилизаре ш. а. Ын ачест скоп се фолосеск жirosкоапеле ку трей граде де либер-тате сау жirosкоапеле либере.

### Теория апроксимативэ а пречесиуний жirosкопулуй греу

Сэ консидерэм пречесиуня унуй жirosкоп греу (фиг. 294) суб акциуня форцей де преутате. Ын конформитате ку регула пречесиуний, суб акциуня моментулуй форцей де греутате  $\bar{P}$  ын рапорт ку пунктул  $O$  жirosкопул партичитэ ла мишкаря де пречесиуне ын журул аксей  $Oz_1$  ын дире-кция, индикатэ пе фигурэ ку о сэжятэ ын формэ де арк. Ын фиекаре момент

$$\bar{L} = -\bar{L}_0^{(e)}; L = L_0^{(e)},$$

прин урмаре,

$$J_2 \omega_1 \omega_2 \sin \theta = Pl \sin \theta,$$

унде  $l = OC$  есте дистанца динтре пунктул фикс ши центрул де греутате ал жirosкопулуй. Витеза унгуларэ де прече-сиуне

$$\omega_2 = \frac{Pl}{J_2 \omega_1}. \quad (7)$$

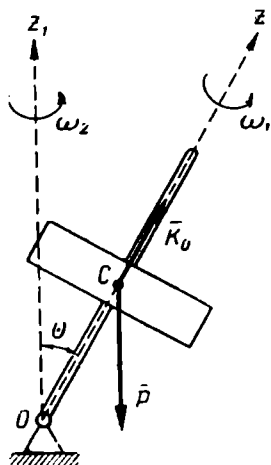
Дин формула (7) реесе, кэ витеза унгуларэ а пречесиуний жirosкопулуй греу ну дединде де унгул де ынклинаре ал аксей жirosкопулуй; еа есте инверс пропорционалэ ку моментул чинетик ал жirosкопулуй  $J_2 \omega_1$  ын мишкаря де ротацие проприе, директ пропорционалэ ку форца де греутате а луй ши ку дистанца динтре цен-трул де греутате ши пунктул фикс.

*Екземплу.* Ниште петре алергэтоаре (фиг. 295) се ротеск ын журул аксей вертикале  $Oz_1$  ку витеза унгуларэ  $\omega_0$  констан-тэ. Греутатя фиекэрей петре есте  $P$ , раза —  $R$ , раза де инерции ын рапорт ку акса де ротацие —  $\rho$ . Пе база теорией апрокси-мативе а жirosкопулуй сэ се детермине форца де пресиуне а петрелор пе фундул инсталацией ши пресиуня петрелор асулра артикулацией  $O$ .

Резолваре. Форца де пресиуне  $\bar{Q}$  а петрей пе фундул инста-лацией се компуне дин греутатя петрей ши дин форца де преси-уне жirosкопикэ  $\bar{N}$ , адикэ

$$\bar{Q} = \bar{P} + \bar{N}.$$

Пресупунынд, кэ пунктул  $A$  дин мижлокул петрей се афлэ



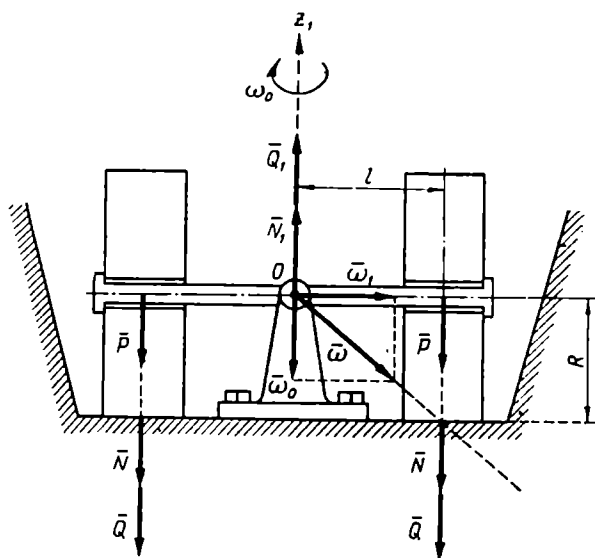
Фиг. 294.

ле акса инстантане де ротацие, афлэм, кэ  $OA$  есте акса инстантане де ротацие а петрей, ын лунгул кэрея есте ындрептатэ витеза унгуларэ а петрей, компусэ дин витеза унгуларэ  $\omega_0$  ориентатэ дупэ акса  $Oz_1$  ши витеза унгуларэ  $\omega_1$  а ротацией проприй, ындрептатэ дупэ акса петрей. Дин асемэнаря триунгюрилор пентру витезеле унгуларе ши мэримиле линиаре обцинем

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{l}{R},$$

де унде

$$\omega_1 = \omega_0 \cdot \frac{l}{R}.$$



Фиг. 295.

Консидерынд пятра дрепт ун жироскоп, витеза унгуларэ а мишкэрий де пречесиуне а кэруя есте  $\omega_0$ , яр витеза унгуларэ проприе  $\omega_1$ , дин регула луй Жуковский тражем конклузия, кэ пятра апасэ ын жос асупра фундулуй инсталацией ку форца  $\bar{N}$ , яр асупра артикулацией  $O$  ку о форцэ де ачеяш мэриме, ынсэ ындрептатэ ын сус. Ын казул де фацэ  $\theta = 90^\circ$ , прин урмаре, ын конформитате ку формула (5) авем

$$N = \frac{I_z \omega_1 \omega_0}{l} = \frac{P \rho^2 \omega_0^2 l}{g l R} = \frac{P \rho^2 \omega_0^2}{g R},$$

деоарече

$$J_z = \frac{P}{g} \rho^2.$$

Модулул форцей де пресиуне  $Q$  есте

$$Q = P + P \cdot \frac{\rho^2 \omega_0^2}{gR} = P \left( 1 + \frac{\rho^2 \omega_0^2}{gR} \right).$$

Пресиуня амбелор петре асупра артикулацией  $O$  есте ындрептатэ ын сус, яр мэримя ей есте

$$Q_1 = 2N_1 = 2N = 2 \frac{P \rho^2 \omega_0^2}{gR}.$$

Дакэ пятра есте ун диск оможен, атунч  $\rho = R/\sqrt{2}$  ши

$$Q = P \left( 1 + \frac{R \omega_0^2}{2g} \right); \quad Q_1 = \frac{PR \omega_0^2}{g}.$$

Пентру ка пресиуня петрелор асупра фундаментулуй инсталацией сэ фие маре, есте нечесар ка раза петрелор сэ фие ши еа маре.

## § 2. ПРЕЧЕСИУНЯ РЕГУЛАТЭ А ЖИРОСКОПУЛУЙ

Дупэ кум се штие, жироскопул екилибрат поате авя мишкаре де пречесиуне регулатэ ын виртутя инерцией ын липса акциуний форцелор екстерноаре. Дин теория апроксимативэ реесе, кэ пречесиуня поате фи кондиционатэ нумай де акциуня форцелор екстерноаре. Есте евидент, кэ адмитериле теорией апроксимативе пермит черчетаря мишкэрий де пречесиуне а жироскопулуй, абстракция фэжынд де пречесиуня регулатэ, каре екзиста пынэ ла акциуня форцелор екстерноаре. Дакэ ачастэ пречесиуне инициалэ ын виртутя инерцией липсеште, атунч теория апроксимативэ се афлэ ын акорд ку теория екзактэ. Сэ консидерэм казул пречесиуний регулате а жироскопулуй. Се нумеште *пречесиуне регулатэ а жироскопулуй* мишкаря луй, ла каре витезеле унгуларе але ротацией проприй ши де пречесиуне сынт константе, пречесиуня аре лок ын журул уней аксе де дирекция константэ ши унгул де нутация, адикэ унгул динтре акса де ротация проприе ши акса де пречесиуне де асеменя есте констант.

Сэ обцинем формула пентру моментул жироскопик ла пречесиуня регулатэ ши сэ стабилим консецинцеле.

### Моментул жироскопик ла пречесиуня регулатэ

Ын казул пречесиуний регулате витеза унгуларэ инстантанее а жироскопулуй  $\bar{\omega}$  есте

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

унде  $\bar{\omega}_1$  есте витеза унгуларэ проприе, ындрептатэ дупэ акса

$Oz$  а жirosкoпyлyй, яp  $\bar{\omega}_2$  — витеза унгуларэ де пречесиуне, ориентатэ дупэ акса фиксэ  $Oz_1$  (фиг. 296). Дакэ луэм акса  $Ox$  ын планул екуаториал ал елипсоидулуй де инерции асфел, ынкыт еа сэ се афлэ ын планул акселор  $Oz$  ши  $Oz_1$ , атунч проекцииле векторулуй  $\bar{\omega}$  пе акселе системулуй де координате мобил  $Oxyz$  сынт

$$\omega_x = \omega_2 \sin \theta; \quad \omega_y = 0;$$

$$\omega_z = \omega_1 + \omega_2 \cos \theta.$$

Пентру проекцииле векторулуй моментулуй чинетик пе акселе принципале де инерции  $Ox, Oy, Oz$  авем:

$$K_x = J_x \omega_x = J_x \omega_2 \sin \theta;$$

$$K_y = J_y \omega_y = 0;$$

$$K_z = J_z \omega_z = J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta).$$

Прин урмаре,

$$\begin{aligned} \bar{K}_O &= K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k} = \\ &= J_x \omega_2 \sin \theta \bar{i} + J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \cdot \bar{k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Моментул жirosкoпик  $\bar{L}$ , ка моментул форцелор де инерции але жirosкoпyлyй, поате фи калкулат дупэ формула

$$\bar{L} = - \frac{d\bar{K}_O}{dt} = - \bar{u}_B.$$

Ын казул пречесиуний регулате  $K_x = \text{const}, K_y = 0, K_z = \text{const}$ , прин урмаре, векторул  $\bar{K}_O$  есте констант дупэ мэриме ши вариэзэ нумай ка дирекция. Пентру а детермина витеза екстремитэций ачестуй вектор—а пунктулуй  $B$ , требуе сэ куноаштем витеза унгуларэ де ротация а ачестуй вектор ын журул пунктулуй фикс  $O$ . Сэ консидерэм планул, ын каре се афлэ акса жirosкoпyлyй ши акса де пречесиуне (планул  $Oxz$ ). Ын казул пречесиуний регулате акса де пречесиуне  $Oz_1$  есте фиксэ. Векторул  $\bar{K}_O$ , каре се афлэ ын ачест план, се ротеште ымпреунэ ку планул ын журул аксей  $Oz_1$  ку витеза унгуларэ  $\bar{\omega}_2$ , ындрептатэ дупэ ачастэ аксэ. Аша дар

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O,$$

яp

$$\bar{L} = - \bar{u}_B = - \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O = \bar{K}_O \times \bar{\omega}_2. \quad (9)$$

Дин формула (9) резултэ, кэ моментул  $\bar{L}$  есте перпендикуляр пе планул  $Oxz$  ын каре се афлэ векторий  $\bar{\omega}_2$  ши  $\bar{K}_O$  (фиг. 296) ши, прин урмаре, есте паралел ку акса  $Oy$ . Дакэ субституим експресиэ (8) а луй  $\bar{K}_O$  ын (9), обцинем

$$\begin{aligned}\bar{L} &= J_x \omega_2 \sin \theta (\bar{i} \times \bar{\omega}_2) + \\ &+ J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) (\bar{k} \times \bar{\omega}_2).\end{aligned}$$

Валоаря моментулуй жирокопик есте

$$\begin{aligned}L &= -J_x \omega_2^2 \sin \theta \cos \theta + J_z (\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \omega_2 \sin \theta = \\ &= [J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos \theta] \cdot \omega_2 \sin \theta,\end{aligned}\quad (10)$$

деоарече

$$|\bar{i} \times \bar{\omega}_2| = \omega_2 \cos \theta; \quad |\bar{k} \times \bar{\omega}_2| = \omega_2 \sin \theta$$

ши векторий  $(\bar{i} \times \bar{\omega}_2)$  ши  $(\bar{k} \times \bar{\omega}_2)$  сынт паралель, дар де сенсуре опусе.

Консидерынд сенсул вектурулуй  $(\bar{k} \times \bar{\omega}_2)$  дрепт сенс позитив ши ынтродукынд версорул  $\bar{\omega}_1^0 = \bar{k}$  обцинем

$$\bar{L} = [J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos \theta] \cdot (\bar{\omega}_1^0 \times \bar{\omega}_2). \quad (11)$$

Ачаста ши есте експресиэ пентру *моментул жирокопик ла пречесиуня регулатэ*. Дупэ кум реесе дин (11), моментул жирокопик поате фи дескомпус ын доуэ компоненте  $\bar{L}'$  ши  $\bar{L}''$ , унде

$$\bar{L}' = J_z \omega_1 (\bar{\omega}_1^0 \times \bar{\omega}_2) = J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \quad (12)$$

$$\bar{L}'' = (J_z - J_x) \omega_2 \cos \theta \cdot (\bar{\omega}_1^0 \times \bar{\omega}_2). \quad (13)$$

Моментул жирокопик  $\bar{L}'$  коинчиде ынтокмай ку моментул жирокопик обцинут ын теория апроксимативэ. Моментул жирокопик  $\bar{L}''$  есте корекция моментулуй жирокопик  $\bar{L}'$  ын казул калкулэрий екзакте а моментулуй чинетик ла пречесиуня регулатэ. Моментул  $\bar{L}''$  есте егал ку zero атунч, кынд  $J_z = J_x$  ши елипсоидул де инерцие есте о сферэ сау кынд  $\theta = 90^\circ$ , адикэ кынд акса жирокопулуй есте перпендикулярэ пе акса де пречесиуне. Сэ менционэм кэ  $\bar{L}'$  ши  $\bar{L}''$  ау ачелаш сенс, дакэ  $(J_z - J_x) \cos \theta > 0$  ши ау сенсуре опусе, дакэ  $(J_z - J_x) \cos \theta < 0$ .

### Пречесиуня регулатэ ын виртутя инерцией

Ла пречесиуня регулатэ ын липса акциуний форцелор екстериоаре, адикэ ла пречесиуня ын виртутя инерцией, авем

$$L = L_0^{(e)} = 0.$$

Де унде, циньнд конт де (10), обцинем

$$L = [J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos \theta] \omega_2 \sin \theta = 0$$

ши, прин урмаре

$$\omega_2 = \frac{J_z \omega_1}{(J_x - J_z) \cos \theta}. \quad (14)$$

Резултэ, кэ атунч, кьнд симетрия жироскопулуй есте диферитэ де чя сферикэ ( $J_z \neq J_x$ ) ши акса де пречесиуне ну есте перпендикулярэ пе акса жироскопулуй, есте посибилэ пречесиуня регулатэ ын виртутя инерцией ку витеза унгюларэ, детерминатэ де формула (14).

Се штие, кэ ын виртутя инерцией, фэрэ акциуня форцелор, поате авя лок мишкаря ректилинне а пунктулуй материал ку витезэ константэ ши мишкаря де ротацие ын журул уней аксе фиксе а рижидулуй ку витеза унгюларэ константэ. Акум ам обцинут ун ал трейля каз де мишкаре инерциалэ — *казул пречесиуний регулате а жироскопулуй ын виртутя инерцией*. Аша дар, пречесиуня регулатэ поате фи атыт форцатэ, адикэ суб акциуня форцелор екстериоаре, кыт ши ын виртутя инерцией. Ын теория апроксимативэ се студиязэ нумай пречесиуня форцатэ. Ын теория екзактэ а пречесиуний регулате се студиязэ амбеле пречесиунь.

### Пречесиуня регулатэ а жироскопулуй греу

Ын казул унуй жироскоп греу авем

$$L = L_0^{(e)} = Pl \sin \theta,$$

сау, циньнд конт де валоаря луй  $L$  дин (10), обцинем

$$[J_z \omega_1 + (J_z - J_x) \omega_2 \cos \theta] \omega_2 \sin \theta = Pl \sin \theta.$$

Де унде витеза унгюларэ де пречесиуне есте

$$\omega_2 = \frac{-J_z \omega_1 \pm \sqrt{J_z^2 \omega_1^2 + 4(J_z - J_x) Pl \cos \theta}}{2(J_z - J_x) \cos \theta}. \quad (15)$$

Аша дар, пречесиуня регулатэ а жироскопулуй греу есте посибилэ, дакэ

$$J_z^2 \omega_1^2 + 4(J_z - J_x) Pl \cos \theta > 0. \quad (16)$$

Кондиция (16) аре лок атунч, кынд мэрия  $J_z \omega_1$  есте дестул де маре. Ын ачест каз, калкулынд валора апроксимативэ а рэдэчиний патрате дин (15) дупэ биномул луй Ньютон, мэргининду-не ку термений де ординул ынтый де мичиме, обцинем

$$\sqrt{J_z^2 \omega_1^2 + 4(J_z - J_x) Pl \cos \theta} = J_z \omega_1 \left[ 1 + \frac{4(J_z - J_x) Pl \cos \theta}{J_z^2 \omega_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \\ \approx J_z \omega_1 \left[ 1 + \frac{2(J_z - J_x) Pl \cos \theta}{J_z^2 \omega_1^2} \right].$$

Субституинд ачастэ експресиe ын (15) ши луынд семнул де сус ши чел де жос ын фаца рэдэчиний, обцинем доуэ валорэ апроксимативе але витезей унгюларе де пречесиуне:

$$\omega_2^{(1)} = \frac{Pl}{J_z \omega_1}; \quad \omega_2^{(2)} = \frac{J_z \omega_1}{(J_x - J_z) \cos \theta}. \quad (17)$$

Пречесиуна ку витеза унгюларэ  $\omega_2^{(1)}$  есте о пречесиуне ын-четинитэ. Ачастэ витезэ унгюларэ де пречесиуне а фост обцинутэ ын теория апроксимативэ. Пречесиуна ку витеза унгюларэ  $\omega_2^{(2)}$  есте о пречесиуне рапидэ. Еа а фост обцинутэ ка пречесиуне ын виртутя инерцией. Жироскопул греу, каре сатисфаче кондицииле (16), поате ефектуа доуэ мишкэрь де пречесиуне — ын-четинитэ ши рапидэ, асемэнэтоаре челор доуэ пречесиуны консидерате ку витезеле унгюларе  $\omega_2^{(1)}$  ши  $\omega_2^{(2)}$ .

### § 3. СТАБИЛИТАТЯ РОТАЦИЕЙ ЖИРОСКОПУЛУЙ ЕКИЛИБРАТ ЫН ЖУРУЛ АКСЕЛОР ПРИНЦИПАЛЕ ДЕ ИНЕРЦИИ

Сэ консидерэм ун жироскоп асиметрик екилибрат акселе принципале де инерции але кэруа сынт акселе  $Ox$ ,  $Oy$  ши  $Oz$ , легате рижид ку жироскопул. Екуацииле динамиче але луй Ейлер ши казул унуй жироскоп де ачест фел сынт

$$\left. \begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_z \omega_y &= 0, \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= 0, \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_y \omega_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Мэримиле  $\omega_x = \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \text{const} = \omega_0$  сатисфак екуацииле (18), адикэ ачесте валорэ  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  сынт солуций але системулуй (18).

Фие акум жироскопулуй и с'ау комуникат пертурбаций мичь суб форма витезелор унгюларе инициале  $\omega_{0x}$  ши  $\omega_{0y}$  дестул де мичь ын журул акселор  $Ox$  ши  $Oy$ . Дакэ ку тимпул мэримиле витезелор унгюларе  $\omega_x$  ши  $\omega_y$  рэмын мичь, атунч се консидерэ,

кэ ротация ын журул аксей принципале де инерции — аксей де ротации  $Oz$  — есте стабилэ. Дакэ ынсэ ачесте мэримь креск нелимитат, атунч ротация ын журул аксей принципале де инерции есте консицератэ нестабилэ. Пресупунынд, кэ ротация ын журул аксей  $Oz$  есте стабилэ, сэ дедучем кондицииле, каре детерминэ стабилитатя ачестей ротаций. Дакэ ротация ын журул аксей  $Oz$  есте стабилэ, атунч витезеле унгуларе  $\omega_x$  ши  $\omega_y$  сынт мичь ши деч ын екуацииле (18) поате фи неглижат терменул ку  $\omega_x \omega_y$ . Субституиунд  $\omega_z \approx \omega_0$ , дин (18) обцинем, абстракцие фэкынд де термений де ординул ал дойля де мичиме

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_x + \frac{J_z - J_y}{J_x} \omega_0 \omega_y &= 0, \\ \dot{\omega}_y + \frac{J_x - J_z}{J_y} \omega_0 \omega_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Дупэ дериваре ши мичь трансформэрь екуацииле дифференциале (19) пот фи адусе ла форма

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\omega}_x + \alpha \omega_x &= 0, \\ \ddot{\omega}_y + \alpha \omega_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

унде

$$\alpha = \frac{(J_z - J_y)(J_z - J_x)}{J_x J_y} \omega_0^2. \quad (21)$$

Пентру  $\alpha < 0$  солуцииле екуацилор (20) сынт

$$\begin{aligned} \omega_x &= C_1 e^{\sqrt{|\alpha|} t} + C_2 e^{-\sqrt{|\alpha|} t}, \\ \omega_y &= C_3 e^{\sqrt{|\alpha|} t} + C_4 e^{-\sqrt{|\alpha|} t}. \end{aligned}$$

Пентру  $\alpha > 0$  солуцииле системулуй (20) сынт

$$\begin{aligned} \omega_x &= C'_1 \cos \sqrt{\alpha} t + C'_2 \sin \sqrt{\alpha} t, \\ \omega_y &= C'_3 \cos \sqrt{\alpha} t + C'_4 \sin \sqrt{\alpha} t, \end{aligned}$$

унде  $C_1, C_2, C_3, C_4, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$  сынт константеле арбитраре але интегрэрий. Резултэ, кэ ротация ын журул аксей принципале де инерции  $Oz$  есте стабилэ дакэ  $\alpha > 0$ . Кондиция  $\alpha > 0$  поате авя лок ын урмэтоареле доуэ казурь:

$$J_z > J_y, \quad J_z > J_x$$

ши

$$J_z < J_y, \quad J_z < J_x.$$

Дин ачесте кондиций реесе, кэ ротация ын журул аксей принципале де инерции  $Oz$  есте стабилэ атунч, кынд моментул



де инерция ын рапорт ку ачасть акса есте чел май маре сау чел май мик. Ын казул  $a < 0$  требуе сэ аштептэм апария ин-стабилитэций. Ын ачест каз валоаря луй  $J_z$  се афлэ ынтре валориле луй  $J_x$  ши  $J_y$ .

Ын диспозитивеле жирокопиче се фолосеск де обичей жирокоапеле, моментеле де инерция але кэра ын рапорт ку акса де ротация проприе ау чя май маре валоаре, адикэ жирокоапеле ау форма унуй диск, ши ну а унуй цилиндр. Ын тоате челелалте кондийций егале ачасть дуче, ын примул рынд, ла ун момент чинетик проприу максимал, яр ын рындул ал дойля, акса де ротация а жирокопулуй ку моментул де инерция максимал есте май стабилэ фацэ де акциуны форцелор де резистенцэ, каре депинд линиар де витеза унгуларэ де ротация а жирокопулуй.

---

## ТЕОРИЯ ЧОКНИРИЛОР

## § 1. НОЦИУНЬ ЖЕНЕРАЛЕ

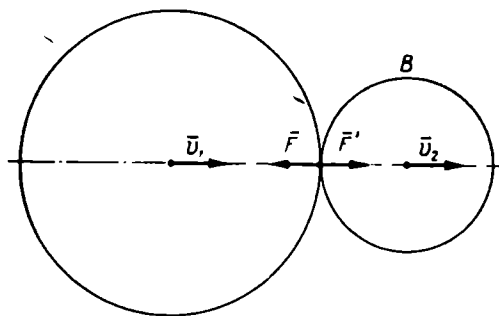
Дупэ карактерул акциуний лор асупра корпурилор се деосебеск *форце фините* (де екземплу форца де преутате), карескимбэ витезеле пунктелор ачестуй корп ынтр'ун оарекаре интервал финит де тимп, ши *форце инстантане сау де чокнире*, каре модификэ витезеле пунктелор корпулуй ынтр'ун интервал дестул де мик де тимп (зечимь сау фракциунь де секундэ).

Се нумеште форцэ инстантане сау де чокнире, форца, че акционязэ ынтр'ун интервал де тимп фоарте мик, ынсэ валоаря ей есте атыт де маре, ынкыт импулсул ачестей форце есте о мэриме финитэ.

Фие  $\bar{F}$  есте форца инстантане, яр  $\tau$  — тимпул акциуний ачестей форце. Атунч импулсул ачестей форце ын интервалул де тимп  $\tau$  есте

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt.$$

Аич  $S$  есте о мэриме финитэ. Евидент, ачаста есте посибил атунч, кынд мэримя форцей есте де ординул  $\frac{1}{\tau}$ , унде  $\tau$  есте о мэриме



Фиг. 297.

дестул де микэ. Импулсул  $S$  есте нумит импулс де чокнире сау перкусиуне.

Феноменул, ын каре се наск форцеле инстантане сау де чокнире, се нумеште *чокнире*.

Сэ експликэм прочесул чокнирий пе база екземплулуй чокнирий а доуэ корпурь. Фие корпуриле А ши В каре се чокнеск. Сэ адмitem, кэ контактул лор аре лок ынтр'ун

сингур пункт (фиг. 297). Ын моментул кынд корпуриле ын контакт витеза корпулуй А есте  $\bar{v}_1$ , яр витеза корпулуй В —  $\bar{v}_2$ . Сэ пресупунем, кэ корпуриле ефектуязэ о мишкаре де трансляcie. Пентру фиксаря идеилор адмitem, кэ  $v_1 > v_2$ . Нормала комунэ ла супрафецеле корпурилор че се чокнеск ын пунктул де атинжере ал лор есте нумитэ *линия де чокнире*.

Се нумеште *чокнире центрикэ* чокниря, ла каре центреле ма-

селор корпурило ч се чокнеск, се афлэ пе линия де чокнире. Чокниря чентрикэ есте нумитэ *директэ*, дакэ ла ынчепутул чокнирий витезеле чентрелор маселор корпурило ч се чокнеск, сынт ындрептате дупэ линия де чокнире.

Пентру симплитате сэ пресупунем, кэ чокниря корпурило  $A$  ши  $B$  есте чентрикэ ши директэ. Сэ адмitem, кэ корпуриле  $A$  ши  $B$  сынт абсолют нетеде. Дупэ чокнире амбеле корпури се деформязэ. Ын ачест прочес витеза корпулуй  $A$  се микшорязэ, яр витеза корпулуй  $B$  се мэреште. Прочесул де деформаре се терминэ атунч, кынд витезеле корпурило се егальязэ. Ачастэ парте а феноменулуй де чокнире есте нумитэ *фазэ де деформаре*. Сэ нотэм ку  $\tau_1$  дурата ачестей фазе.

Форца де чокнире  $\bar{F}$ , каре акцияязэ асупра корпулуй  $A$  дин партя корпулуй  $B$ , есте ындрептатэ дупэ линия де чокнире спре стынга. Форца  $\bar{F}$  че акцияязэ дин партя корпулуй  $A$  асупра корпулуй  $B$  есте ориентатэ дупэ линия де чокнире спре дряпта ши  $\bar{F}' = -\bar{F}$ .

Импулсул де чокнире ал форцей  $\bar{F}$  ын тимпул уней фазе де деформаре есте

$$\bar{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \bar{F} dt.$$

Сэ нотэм ку  $\bar{S}_1'$  импулсул форцей  $\bar{F}'$  ын ачеш фазэ. Есте евидент, кэ

$$\bar{S}_1' = -\bar{S}_1.$$

Дакэ корпуриле сынт ынтр'о мэсурэ оарекаре еластиче, атунч дупэ сфыршитул фазей де деформаре еле ышь рестабилиск форма лор. Ачастэ парте а феноменулуй де чокнире есте нумитэ *фазэ де реституири*. Сэ нотэм дурата ачестей фазе ку  $\tau_2$ . Фаза де реституири се терминэ ын моментул деспэрций корпурило. Импулсул форцей де чокнире, каре акцияязэ асупра корпулуй  $A$ , ын ачастэ фазэ есте

$$\bar{S}_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} \bar{F} dt,$$

унде  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  есте дурата тоталэ а чокнирий.

Ефектул акциуний форцей де чокнире се характеризязэ прин импулсул ачестей форце, валоря ачестуй импулс дупэ кум с'а менционат май сус, финид финитэ. Ын теоремеле женерале але теорией чокнирило фигурызэ ну форцеле де чокнире, чи импулсуриле лор сау перкусиуниле.

Еластичитатя корпурило ч се чокнеск, се характеризязэ прин рапортул перкусиуний ын фаза де реституири кэтре перкусиуны ын фаза де деформаре, адикэ прин рапортул  $\frac{S_2}{S_1}$ .

Се нумеште *коэффициент де реституире* коэффициентул фэрэ дименсиуне  $k$

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \quad (1)$$

Коефициентул де реституире се детерминэ де обичей пе кале експерименталэ. Ын функции де натура корпурилор ел вариация ын лимите  $0 \leq k \leq 1$ .

Пентру  $k=0$  мэрия  $S_2=0$ , адикэ фаза де реституире липсеште, чея че есте посибил ын казул чокнирий корпурилор абсолут нееластичэ. О асемения чокнире есте нумитэ *чокнире абсолут нееластичэ*.

Ын казул кынд  $k=1$  мэрия  $S_2=S_1$ . Ын ачест каз се поате консидера, кэ ын фаза де реституире корпуриле шы-ау реституит комплект форма са. О асемения чокнире есте нумитэ *чокнире абсолут-еластичэ*.

Пентру  $0 < k < 1$  аре лок чокниря корпурилор де о еластичитате медие, яр чокниря есте нумитэ *чокнире еластичэ*.

## § 2. АКЦИУНЯ ФОРЦЕЙ ДЕ ЧОКНИРЕ АСУПРА ПУНКТУЛУЙ МАТЕРИАЛ

Фие асупра пунктулуй материал ку маса  $m$  акцияызэ Форца де чокнире  $\bar{F}$  ши форца финитэ  $\bar{Q}$ . Сэ нотэм ку  $\tau$  дурата акциуний форцей де чокнире, ку  $\bar{v}$  — витеза пунктулуй материал ла ынчепутул чокнирий, ку  $\bar{u}$  — витеза ла сфыршитул чокнирий. Ын конформитате ку теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй материал авем

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_0^\tau \bar{F}dt + \int_0^\tau \bar{Q}dt. \quad (2)$$

Прима интегралэ есте перкусиуня  $\bar{S}$  ши, прин урмаре, мэрия ей есте финитэ. Пентру чя де а доуа интегралэ (импулсул форцей  $\bar{Q}$ ) дупэ теорема деспре валоаря медие авем

$$\bar{S}_Q = \int_0^\tau \bar{Q}dt = \bar{Q}_{\text{мед}} \tau,$$

унде  $\bar{Q}_{\text{мед}}$  есте о мэриме финитэ, яр  $\tau$  о мэриме дестул де микэ ши дин ачастэ каузэ путем адмите  $S_Q = 0$ . Егалитатя (2) капэтэ ын ачест каз форма

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}, \quad (3)$$

адикэ вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй материал ын тимпул чокнирий есте егалэ ку перкусиуня, че акцияызэ асупра пунктулуй консидерат.

Екуация (3) есте нумитэ *екуация де базэ а динамичий пунктулуй ла чокнире*. Пентру витеза пунктулуй материал ла сфыршитул чокнирий обцинем дин ачастэ екуацие

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{1}{m} \bar{S}. \quad (4)$$

Аич  $u$  есте о мэриме финитэ, деоарече  $v$ ,  $S$  ши  $m$  сынт мэримь фините.

Сэ детерминэм акум дистанца, паркурсэ де пунктул материал ын тимпул чокнирий. Азем:

$$l = \int_0^{\tau} v dt,$$

унде  $v$  есте витеза вариабилэ а пунктулуй ын интервалул де тимп  $(0, \tau)$ .

Ын конформитате ку теорема деспре валораь медие

$$l = v_{\text{мед}} \tau.$$

Аич  $v_{\text{мед}}$  есте о мэриме финитэ, яр  $\tau$  — о мэриме дестул демикэ, деачея путем адмие  $l \approx 0$ .

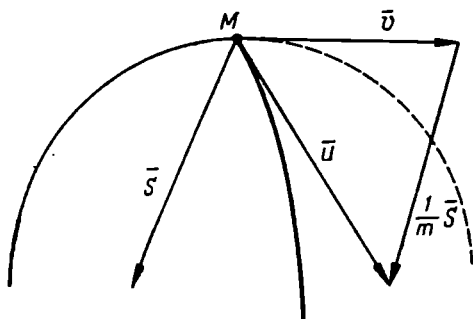
Прин урмаре, путем траже урмэтоареле конклузий:

1) акциуня форцелор фините ын тимпул акциуний форцелор де чокнире поате фи неглижатэ;

2) депласаря пунктулуй материал ын тимпул акциуний форцелор де чокнире се неглижазэ;

3) акциуня форцелор де чокнире асупра пунктулуй материал се манифестэ ын скимбаря инстантанее а мэримий ши дирекцией витезей дупэ формула (4).

Пе фигура 298 сынт репрезентате витеза  $\bar{v}$  ла ынчепутул чокнирий, перкусиуня  $\bar{S}$  ши витеза  $\bar{u}$  ла сфыршитул чокнирий, векторий  $\bar{v}$  ши  $\bar{u}$  финид конструиць дин ачелаш пункт.



Фиг. 298.

### § 3. ТЕОРЕМЕЛЕ ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ КАНТИТЭЦИЙ ДЕ МИШКАРЕ СИ ДЕСПРЕ МИШКАРЯ ЧЕНТРУЛУЙ МАСЕЛОР СИСТЕМУЛУЙ ЛА ЧОКНИРЕ

Сэ консидерэм ун систем де пункте материала  $B_1, B_2, \dots, B_N$ . Ынтр'ун момент оарекаре асупра пунктелор ачестуй систем ынчеп сэ акционезе форцеле екстериоре ши интериоре де

чокнире. Сэ неглижэм акциуня форцелор фините. Нотэм прин  
 т тимпул акциуний форцелор де чокнире,  $\bar{v}_k$  — витеза пункту-  
 луй  $B_k$  ла ынчепутул чокнирий,  $\bar{u}_k$  — ла сфыршитул чокнирий,  
 $\bar{F}_k^{(e)}$  — резултанта форцелор екстериоаре де чокнире,  $\bar{F}_k^{(i)}$  — ре-  
 зултанта форцелор интериоаре де чокнире.

Дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а  
 системулуй куноаштём, кэ вариация кантитэций де мишкаре а  
 системулуй ынтр'ун оарекаре интервал де тимп есте егалэ ку  
 сума импулсурило р тутутор форцелор екстериоаре, каре акцио-  
 нязэ асупра системулуй ын ачелаш интервал де тимп. Пентру  
 вариация кантитэций де мишкаре а системулуй ын тимпул чок-  
 нирий ын конформитате ку теорема аминтитэ авем

$$\sum m_k \bar{u}_k - \sum m_k \bar{v}_k = \sum \int_0^{\tau} \bar{F}_k^{(e)} dt = \sum \bar{S}_k^{(e)} \quad (5)$$

сау

$$\Delta \bar{Q} = \sum \bar{S}_k^{(e)}, \quad (5')$$

унде  $\bar{S}_k^{(e)}$  есте перкусиуня екстериоарэ.

Ын проекций пе акселе де координате авем

$$\sum m_k u_{kx} - \sum m_k v_{kx} = \sum S_{kx}^{(e)}.$$

Егалитэць аналожиче авем ши пентру акселе  $y$  ши  $z$ .

Егалитатя (5) експримэ теорема деспре вариация кантитэ-  
 ций де мишкаре а системулуй ла чокнире: *вариация кантитэ-  
 ций де мишкаре а системулуй ын тимпул чокнирий есте егалэ  
 ку сума жгеометрикэ а перкусиунило р екстериоаре, апликате  
 системулуй.*

Формула (5) поате фи репрезентатэ суб о алтэ формэ, дакэ  
 експримэм кантитатя де мишкаре а системулуй ла ынчепутул  
 ши сфыршитул чокнирий прин витеза чентрулуй маселор. Сэ  
 нотэм витеза чентрулуй маселор ла ынчепутул чокнирий ку  $\bar{v}_c$ ,  
 ла сфыршитул чокнирий ку  $\bar{u}_c$ , маса ынтрегулуй систем ку  $M$ .  
 Вом авя

$$M(\bar{u}_c - \bar{v}_c) = \sum \bar{S}_k^{(e)}. \quad (6)$$

Ын проекций пе акселе де координате дупэ егалитатя (6)  
 -авем

$$M(u_{cx} - v_{cx}) = \sum S_{kx}^{(e)}. \quad (6')$$

Екуация (6) експримэ теорема деспре скимбаря мишкэрий  
 чентрулуй маселор системулуй ла чокнире.

Ын казул партикулар, кынд  $\sum \bar{S}_k^{(e)} = 0$  дин формула (5) ре-  
 зултэ

$$\sum m_k \bar{u}_k = \sum m_k \bar{v}_k.$$

Дин формула (6) резултэ

$$\bar{u}_c = \bar{u}_c.$$

Аша дар, дакэ сума жеометрике а перкусиунилор екстериоаре, че акционязэ асупра системулуй, есте егалэ ку зеро, атунч кантитатя де мишкаре а системулуй ши витеза центрулуй маселор системулуй ла чокнире ну се скимбэ.

#### § 4. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ МОМЕНТУЛУЙ ЧИНЕТИК АЛ СИСТЕМУЛУЙ ЛА ЧОКНИРЕ

Ын конформитате ку теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй авем

$$\frac{\partial \bar{K}_O}{\partial t} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}),$$

унде  $\bar{K}_O = \sum(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k)$  есте моментул чинетик ал системулуй ын рапорт ку пунктул фикс  $O$ ,  $\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}) = \sum(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)})$  — моментул принципал ал форцелор екстериоаре, че акционязэ асупра системулуй, ын рапорт ку ачелаш пункт  $O$ .

Сэ ынмулцим ку  $dt$  амбеле пэрць але егалитэций, каре експримэ теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй, ши сэ ынлокуим моментул принципал ал форцелор екстериоаре ку експресия са. Вом авя

$$d\bar{K}_O = \sum(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)})dt.$$

Сэ интегрэм ачастэ екуацие дупэ тимп ын лимите де ла зеро пынэ ла  $\tau$ , унде  $\tau$  есте дурата чокнирий:

$$\int_0^\tau d\bar{K}_O = \int_0^\tau \sum(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)})dt.$$

Партя стынгэ а ачестей екуаций карактеризязэ вариация ын тимпул чокнирий а моментулуй чинетик ал системулуй ын рапорт ку пунктул  $O$ . Сэ нотэм ачастэ вариацие ку  $\Delta \bar{K}_O$ . Сэ трансформэм партя дряптэ, скимбынд ординя сумэрий ши интегрэрий ши апой скоцынд  $\bar{r}_k$  ын фаца семнулуй интегралей. Депласэриле пунктелор системулуй ын тимпул чокнирий се неглижазэ ши, прин урмаре, векторул  $\bar{r}_k$  поате фи консидерат констант ын интервалул де интеграре  $(0, \tau)$ . Астфел, пентру експресия дин партя дряптэ а егалитэций обцинем

$$\int_0^\tau \sum(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)})dt = \sum \int_0^\tau (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)})dt = \sum (\bar{r}_k \times \int_0^\tau \bar{F}_k^{(e)}dt).$$

Дар  $\int_0^{\cdot} \bar{F}_k^{(e)} dt = \bar{S}_k^{(e)}$  есте перкусиуня екстериоарэ ши деч

$$\Sigma(\bar{r}_k \times \int_0^{\cdot} \bar{F}_k^{(e)} dt) = \Sigma(\bar{r}_k \times \bar{S}_k^{(e)}) = \Sigma \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(e)}).$$

Авем дефинитив

$$\Delta \bar{K}_O = \Sigma \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(e)}). \quad (7)$$

Егалитатя (7) експримэ теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ын казул чокнирий. Резултатул обцинут поате фи формулат ын фелул урмэтор: *вариация моментулуй чинетик ал системулуй фацэ де ун пункт оарекаре ын тимпул чокнирий есте егалэ ку сума жеометрикэ а моментелор перкусиунилоор екстериоаре, апликате системулуй, фацэ де ачелаш пункт.*

Проектынд амбеле пэрць але егалитэций (7) пе акселе системулуй де координате ку орижиня ын  $O$ , обцинем

$$\Delta K_x = \Sigma M_x(\bar{S}_k^{(e)}), \quad (7')$$

адикэ вариация моментулуй чинетик ал системулуй фацэ де о аксэ оарекаре ын тимпул чокнирий есте егалэ ку сума моментелор перкусиунилоор екстериоаре фацэ де ачеш аксэ.

Ын казул партикулар, кынд  $\Sigma \bar{M}_O(\bar{S}_k^{(e)}) = 0$ , дин формула (7) резултэ  $\Delta K_O = 0$ , адикэ дакэ сума моментелор перкусиунилоор екстериоаре, апликате системулуй, фацэ де ун пункт оарекаре есте егалэ ку zero, атунч моментул чинетик ал системулуй фацэ де ачелаш пункт ла чокнире ну вариязэ.

Ын мод аналог дин формула (7') пентру  $\Sigma M_x(\bar{S}_k^{(e)}) = 0$  резултэ  $\Delta K_x = 0$ , адикэ ын ачест каз моментул чинетик ал системулуй фацэ де акса  $x$  ну вариязэ ла чокнире.

## § 5. ВАРИАЦИЯ ВИТЕЗЕЙ УНГЮЛАРЕ А КОРПУЛУЙ, КАРЕ СЕ РОТЕШТЕ ЫН ЖУРУЛ УНЕЙ АКСЕ ФИКСЕ, ЛА ЧОКНИРЕ

Сэ нотэм акса де ротацие ку  $z$ , яр пунктеле фиксе ку  $A$  ши  $B$ . Ла чокниря корпулуй пот сэ се наскэ реакциуниле де чокнире  $\bar{R}_A$  ши  $\bar{R}_B$ , прин урмаре, ши перкусиуниле  $\bar{S}_A$  ши  $\bar{S}_B$ . Сэ нотэм витеза унгюларэ а корпулуй ла ынчепутул чокнирий ку  $\omega$ , яр ла сфыршитул чокнирий прин  $\omega_1$ .

Ын конформитате ку теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ла чокнире, проектатэ пе акса де ротацие  $z$ , авем

$$\Delta K_z = \Sigma M_z(\bar{S}_k^{(e)}). \quad (8)$$



Менционэм, кэ моментеле перкусиунило<sup>р</sup>  $\bar{S}_A$  ши  $\bar{S}_B$  ын рапорт ку акса де ротация сынт егале ку зеро, деачея ын партия дряптэ а ултимей егалитэць фигурызэ нумай моментеле перкусиунило<sup>р</sup> консидерате (активе).

Се штие, кэ моментул чинетик ал корпулуй, каре се ротеште ын журул уней аксе фиксе, ын рапорт ку ачаствэ аксэ де ротация, се детерминэ дупэ формула  $K_z = J_z \omega$ , унде  $J_z$  есте моментул де инерция ал корпулуй ын рапорт ку акса де ротация. Прин урмаре, моментул чинетик ал корпулуй ын рапорт ку акса де ротация ла ынчепутул чокнирий есте  $J_z \omega$ , яр ла сфыршитул чокнирий  $J_z \omega_1$ . Вариация моментулуй чинетик ын тимпул чокнирий есте

$$\Delta K_z = J_z \omega_1 - J_z \omega = J_z (\omega_1 - \omega).$$

Авем дефинитив урмэтоаря формэ а еквацияей (8)

$$J_z (\omega_1 - \omega) = \sum M_z(S_k^{(e)}), \quad (9)$$

адикэ продусул моментулуй де инерция ал корпулуй ын рапорт ку акса де ротация прин вариация витезей унгуларе ын тимпул чокнирий есте егал ку сума моментелор перкусиунило<sup>р</sup> екстериоре, ын рапорт ку акса де ротация.

#### **§ 6. АКЦИУНЯ ФОРЦЕЛО<sup>р</sup> ДЕ ЧОКНИРЕ АСУПРА КОРПУЛУЙ, КАРЕ ЭФЕКТУЯЗЭ О МИШКАРЕ ПЛАН-ПАРАЛЕЛЭ**

Сэ консидерэм ун корп ын мишкаре план-паралелэ. Сэ дучем прин чентрул маселор корпулуй  $C$  планул  $H$  паралел ку планул мишкэрий. Сэ луэм ын планул  $H$  системул де координате фикс  $Oxy$  ши системул де координате мобил  $Cx$  ку орижина ын чентрул маселор  $C$  ши каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция ымпреунэ ку чентрул маселор. Асупра корпулуй акциязэ асфел де форце де чокнире, ынкыт дупэ чокнире мишкаря корпулуй рэмыне паралелэ ку планул фикс.

Ын конформитате ку теорема деспре мишкаря чентрулуй маселор системулуй ла чокнире (6'), проекатэ ле акселе  $x$  ши  $y$ , авем

$$M(u_{Cx} - v_{Cx}) = \sum S_{kx}^{(e)}, \quad M(u_{Cy} - v_{Cy}) = \sum S_{ky}^{(e)}. \quad (a)$$

Теорема деспре вариация моментулуй чинетик фацэ де пунктул фикс ал системулуй ын мишкаря абсолютэ ши теорема аналожикэ ын рапорт ку чентрул маселор пентру системул механик ын мишкаря релятивэ фацэ де системул де координате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляция ымпреунэ ку чентрул маселор, се формулязэ ши се енуунэ ын мод аналог. Деачея еквацияи (7) ши (7') сынт жусте ши пентру мишкаря релятивэ, дакэ моментул чинетик ши перкусиуниле се консидерэ ын рапорт ку чентрул маселор сау ын рапорт ку акселе де коордо-

нате, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляție ымпреунэ ку чентрул маселор.

Деачея пентру вариация моментулуй чинетик ал корпусулуй ын рапорт ку акса  $Cz$ , каре трече прин чентрул маселор корпусулуй, перпендикулар пе планул  $H$ , ын акорд ку екуацииле (7') авем

$$\Delta K_{Cz} = \sum M_{Cz} (\bar{S}_k^{(e)})$$

сау, циньнд конт де екуация (9),

$$J_{Cz}(\omega_1 - \omega) = \sum M_{Cz} (\bar{S}_k^{(e)}). \quad (6)$$

Унинд екуацииле (а) ши (б), обцинем

$$\left. \begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S_{kx}^{(e)}, \\ M(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S_{ky}^{(e)}, \\ J_{Cz}(\omega_1 - \omega) &= \sum M_{Cz} (\bar{S}_k^{(e)}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Куноскьнд перкусиуниле, витеза чентрулуй маселор  $\bar{v}_C$  ши витеза унгюларэ а корпусулуй  $\omega$  ла ынчепутул чокнирий, дин екуацииле (10) путем детермина витеза чентрулуй маселор  $\bar{u}_C$  ши витеза унгюларэ а корпусулуй  $\omega_1$  ла сфыршитул чокнирий.

## § 7. ТЕОРЕМА ДЕСПРЕ ВАРИАЦИЯ ЕНЕРЖИЕЙ ЧИНЕТИЧЕ А СИСТЕМУЛУЙ ЛА ЧОКНИРЕ

### Теорема луй Келвин

Апликаря директэ а теоремей деспре вариация енержийей чинетиче ын казул чокнирий есте импосибилэ, деоарече негложэм депласэриле пунктелор ын тимпул чокнирий ши деачея ну путем калкула лукрул механик куноскьнд форцеле ши депласэриле пунктелор. Ын теория чокнирилор фигурызэ ну форцеле де чокнире, чи перкусиуниле, ши деачея требе сэ експримэм лукрул механик ал форцелор прин перкусиуниле лор. Сэ дедучем експресия кореспунзэтоаре.

Ын конформитате ку теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй ын интервалул де тимп де ла  $t_1$  пынэ  $t_2$  авем

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{S}.$$

Ынмулцинд ачастэ егалитате скалар ку  $\bar{v}_2$  ши  $\bar{v}_1$ , обцинем

$$\begin{aligned} m\bar{v}_2^2 - m\bar{v}_1\bar{v}_2 &= \bar{S}\bar{v}_2, \\ m\bar{v}_1\bar{v}_2 - m\bar{v}_1^2 &= \bar{S}\bar{v}_1. \end{aligned}$$

Дупэ адунаря ачестор екуаций ши ымпэриця ла 2 авем

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S} (\bar{v}_1 + \bar{v}_2),$$

ынсэ конформ теоремей деспре вариация енержіей чинетиче ын партя стынгэ а ачестей екуаций есте лукрул механик  $A$  ал форцей  $F$  пе депласаря пунктулуй ын интервалул де тимп консидерат.

Аша дар,

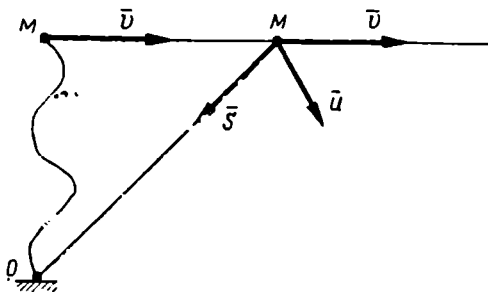
$$A = \frac{1}{2} \bar{S} (\bar{v}_1 + \bar{v}_2), \quad (11)$$

адикэ лукрул механик ал форцей, че акционязэ асупра пунктулуй ынтр'ун интервал оарекаре де тимп, есте егал ку продукул скалар ал импулсулуй форцей ын ачест интервал де тимп прин семисума витезелор инициалэ ши финалэ але пунктулуй. Ачастэ теоремэ есте нумитэ теорема Келвин.

#### Теорема луй Карно пентру казул импунерий инстантанеэ а легэтурилор идеале нееластиче

Легэтура, импусэ системулуй ла чокнире, есте нумитэ нееластикэ, дакэ еа рэмыне ши ла сфыршитул чокнирий.

Сэ консидерэм май ынтыи ун пункт материал. Казул, кынд пунктулуй материал и се импуне о легэтурэ идеалэ, стационарэ ши нееластикэ, есте репрезентат ын фигура 299. Фие пунктул материал есте легат ку ун фир импондерабил ши инекстенсibil де пунктул фикс  $O$ . Ла ынчепут ачест фир ну есте ынтинс. Пунктул материал се мишкэ ректи-линиу ши униформ ку витеза  $\bar{v}$ . Ынтр'ун момент оарекаре фирул се ынтинде, аре лок чокниря пунктулуй ку фирул ши пунктул ынчепе сэ се миште пе о курбэ сферикэ ку о алтэ витезэ. Сэ нотэм ачастэ витезэ ку  $\bar{u}$ . Ын моментул импунерий легэтурий асупра пунктулуй материал ынчепе сэ акционезе реакциуня де чокнире а фирулуй. Импулсул ачестей реакциунь есте ындрептат дупэ фир, адикэ  $\bar{S} \perp \bar{u}$ .



Фиг. 299.

Пе база теоремей луй Келвин вариация енержий чинетиче а пунктулуй материал есте

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \bar{u}^2 - \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \bar{S} (\bar{v} + \bar{u}).$$

Ынсэ продусул скалар  $\bar{S} \bar{u} = 0$ , деоарече  $\bar{S} \perp \bar{u}$  ши деч  $\Delta T = -\frac{1}{2} \bar{S} \bar{v}$ . Дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй материал ла чокнире авем

$$m \bar{u} - m \bar{v} = \bar{S}.$$

Ынмулцинд скалар амбеле пэрць але ачестей егалитэць ку  $S$  ши циньнд конт де егалитатя  $\bar{S} \bar{u} = 0$ , обцинем

$$-m \bar{S} \bar{v} = S^2 \text{ ши } \frac{1}{2} \bar{S} \bar{v} = -\frac{1}{2m} S^2.$$

Крештеря енержий чинетиче есте

$$\Delta T = -\frac{1}{2m} S^2 \quad (12)$$

сау, апликьнд релация  $\bar{S} = m(\bar{u} - \bar{v})$ , авем дефинитив

$$\Delta T = -\frac{1}{2} m(\bar{v} - \bar{u})^2. \quad (13)$$

Векторул  $\bar{v} - \bar{u}$  есте нумит *вiteză пердута*.

Дин формула (13) реесе, кэ  $\Delta T < 0$ , адикэ ла импунеря легэтурий енержия чинетикэ а пунктулуй материал се микшорязэ. Сэ нотэм енержия чинетикэ пердута ку  $T_{\text{перд}}$ . Дин (13) авем

$$T_{\text{перд}} = \frac{1}{2} m(\bar{v} - \bar{u})^2. \quad (14)$$

Резултатул обцинут поате фи жєнерализат пентру казул унуй систем де пункте материала. Вом авя

$$T_{\text{перд}} = \sum \frac{1}{2} m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2. \quad (15)$$

Екуация (15) експримэ концинутул примей теореме а луй Карно ши се енуицэ ын фелул урмэтор: *дакэ системулуй и се импун инстантанеу легэтурь идеале, стационаре ши нееластиче, атуиц аре лок пердеря енержией чинетиче а системулуй, каре есте егалэ дупэ мэриме ку енержия чинетикэ а системулуй, кореспунзэтоаре витезелор пердута.*

Теорема луй Карно пентру казул ынлэтурэрий инстантанеэ а легэтурилор стационаре

Сэ консидерэм ун пункт материал, супус уней легэтурь, витеза кэруя есте  $\bar{v}$ . Ачастэ легэтурэ есте ынлэтуратэ ын урма чокнирий, перкусиуня кэрея  $\bar{S}$  есте перпендикулярэ де витеза  $\bar{v}$ . Перкусиуня  $\bar{S}$  поате фи импулсул орькэрей форце де чокнире, каре есте перпендикулярэ пе витеза пунктулуй  $\bar{v}$  ши поате елибера пунктул материал де акциуня легэтурий. Сэ нотэм витеза пунктулуй ла сфыршитул чокнирий ку  $\bar{u}$ . Ын конформитате ку теорема луй Келвин крештеря енержіей чинетиче ын тимпул чокнирий есте

$$\Delta T = \frac{m\bar{u}^2}{2} - \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S}(\bar{u} + \bar{v}).$$

Ынсэ перкусиуня  $\bar{S}$  есте перпендикулярэ пе витеза  $\bar{v}$  ши деч  $\bar{S}\bar{v} = 0$ . Вом авя

$$\Delta T = \frac{1}{2} \bar{S}\bar{u}.$$

Дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй ла чокнире авем

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}.$$

Ынмулцим скалар амбеле пэрць але ачестей екуаций ку  $\bar{S}$ :

$$m\bar{u}\bar{S} = S^2 \text{ ши } \bar{S}\bar{u} = \frac{1}{m} S^2.$$

Ынлокуинд  $\bar{S}$  ку валоаря са  $\bar{S} = m(\bar{u} - \bar{v})$ , обцинем пентру крештеря енержіей чинетиче экспресия

$$\Delta T = \frac{1}{2m} S^2 = \frac{1}{2} m(\bar{u} - \bar{v})^2. \quad (16)$$

Дин формула (16) реесе, кэ  $\Delta T > 0$ , адикэ ла ынлэтураря легэтурий енержія чинетикэ а пунктулуй материал се мэреште. Векторул  $\bar{u} - \bar{v}$  есте нумит *витезэ добындите*.

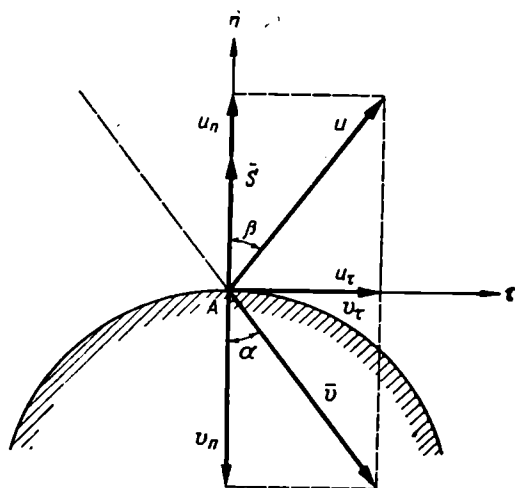
Сэ жєнерализем резултатул обцинут пентру ун систем де пункте материала:

$$T_{\text{доб}} = \Delta T = \sum \frac{1}{2} m_k (\bar{u}_k - \bar{v}_k)^2. \quad (17)$$

Прин урмаре, ла ынлэтураря инстантанеэ а легэтурилор импуре системулуй прин чокнире, перкусиуниле фиинд перпендикуларе пе витезеле пунктелор системулуй, енержія чинетикэ а системулуй креште ку о мэриме, егалэ ку енержія чинетикэ а системулуй, кореспунзэтоаре витезелор добындите.

## Теорема женералэ а луй Карно

Сэ черчетэм ун пункт материал, кэруя и се импуне инстантанеу о легэтурэ идеалэ, стационарэ ши еластикэ. Аич аре лок о чокнире, дупэ каре пунктул материал есте елиберат де акциуня легэтурий, деоарече еа есте еластикэ. Ын казул де фацэ ау лок амбеле фазе — фаза де деформаре ши фаза де рести-туире. Сэ студиём ачест феномен пе екземплул чокнирий пунктулуй материал де о супрафацэ фиксэ ши нетедэ (везь фиг. 300).



Фиг. 300.

Сэ нотэм витеза пунктулуй ла ынчепутул чокнирий ку  $\bar{v}$ , яр ла сфыршитул чокнирий ку  $\bar{u}$ . Фаза де деформаре се терминэ атунч, кынд ынчетязэ пэтрундеря пунктулуй материал ын интериорул супрафцей, адикэ атунч, кынд компонента нормалэ а витезей пунктулуй, микшорынду-се ын прочесул чокнирий, девине егалэ ку зеро. Ла сфыршитул ачестей фазе витеза пунктулуй се афлэ ын планул танжент ла супрафацэ. Сэ нотэм ачастэ витезэ ку  $\bar{u}_1$ , яр перкусиуня реакциуний супрафцей ын прима фазэ ку  $\bar{S}_1$ . Ачастэ перкусиуне есте ындрептатэ дупэ нормала ла супрафацэ, деоарече с'а пресупус, кэ супрафаца есте нетедэ. Феноменул чокнирий ын фаза де деформацие поате фи консидерат дрепт ун каз де импунере а уней легэтуры идеале, стационаре ши нееластиче, деоарече кондиция  $\bar{S}_1 \bar{u}_1 = 0$  аре лок. Сэ апликэм прима теоремэ а луй Карно ши дупэ формула (12)

$$\frac{m u_1^2}{2} - \frac{m v^2}{2} = -\frac{1}{2m} S_1^2. \quad (18)$$

Ынчепутул фазей де реституире коинчиде ку сфыршитул фазей де деформаре. Дин ачастэ каузэ витеза пунктулуй материал ла ынчепутул фазей де реституире есте де асеменя  $\bar{u}_1$ . Сэ нотэм ку  $\bar{u}$  витеза пунктулуй ла сфыршитул фазей де реституире. Витеза  $\bar{u}$  есте ши витеза пунктулуй ла сфыршитул чокнирий. Пунктул материал се ындепэртязэ де супрафацэ даторитэ перкусиуний реакциуний супрафецей ын чя де а доуа фазэ а чокнирий. Сэ нотэм ачастэ перкусиуне ку  $\bar{S}_2$ . Еа есте ындрептатэ тот аша, ка ши перкусиуны  $\bar{S}_1$ , адикэ  $\bar{S}_2 \perp \bar{u}_1$ . Прин урмаре, ын тимпул фазей де реституире пунктул материал есте елиберат де легэтурэ принтр'о чокнире, перкусиуны кэрея есте перпендикулярэ пе витеза пунктулуй.

Деч, путем сэ апликэм теорема а доуа а луй Карно ши дупэ формула (16) вом авя

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mu_1^2}{2} = \frac{1}{2m} S_2^2. \quad (19)$$

Адунынд егалитэциле (18) ши (19), обцинем

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{2m} (S_1^2 - S_2^2) = -\frac{1}{2m} (S_1 + S_2)(S_1 - S_2). \quad (20)$$

Сэ нотэм ку  $\bar{S}$  импулсул реакциуний супрафецей ын тимпул чокнирий. Есте евидент, кэ

$$S = S_1 + S_2 \text{ ши } S_2 = kS_1,$$

унде  $k$  есте коефициентул де реституире, каре характеризязэ propriétéциле еластиче але супрафецей.

Апой прин трансформэрь евиденте обцинем

$$S = S_1 + kS_1,$$

де унде

$$S_1 = \frac{S}{1+k} \text{ ши } S_1 - S_2 = \frac{S}{1+k} - \frac{kS}{1+k} = \frac{1-k}{1+k} \bar{S}.$$

Експримынд ын формула (20) импулсуриле  $S_1$  ши  $S_2$  прин импулсул сумар, обцинем

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{2m} \frac{1-k}{1+k} S^2. \quad (21)$$

Ын конформитате ку теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а пунктулуй материал ла чокнире пентру  $\bar{S}$  авем

$$\bar{S} = m(\bar{u} - \bar{v}).$$

Сэ субституим валоаря обцинутэ пентру  $\bar{S}$  ын формула (21).

Обцинем ын ачест каз

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{2} m \frac{1-k}{1+k} (\bar{v} - \bar{u})^2. \quad (22)$$

Дин формула (22) реесе, кэ пентру  $k < 1$  вариация енержіей чинетиче а пунктулуй материал

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} < 0,$$

адикэ енержія чинетикэ а пунктулуй материал се микшорязэ, деч аре лок пердеря ей.

Енержія чинетикэ пердута есте

$$T_{\text{сред}} = \frac{1}{2} m \frac{1-k}{1+k} (\bar{v} - \bar{u})^2. \quad (23)$$

Сэ менционэм, кэ пентру  $k=1$ , адикэ ын казул чокнирий абсолут еластиче а пунктулуй материал де о супрафацэ, енержія чинетикэ а луй ну вариязэ.

Сэ жгенерализем резултатул обцинут пентру ун систем де пункте материале. Сэ адмитем, кэ коефициентул де реституире  $k$  есте унул ши ачелаш пентру тоате легэтуриле импурсе инстантанеу. Енержія чинетикэ пердута есте

$$T_{\text{перд}} = \frac{1-k}{1+k} \sum \frac{1}{2} m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2. \quad (24)$$

Резултатул обцинут поате фи енуцат ын фелул урмэтор: *дакэ унуй систем де пункте материале и се импун инстантанеу легэтурь идеале, стационаре ши еластиче, атулч пердеря де енержіе чинетикэ ын процесул де чокнире ссте егал ку енержія чинетикэ а системулуй, кореспунзэтоаре витезелор пердута, ынмулцитэ ку коефициентул  $\frac{1-k}{1+k}$ .*

#### **§ 8. ЧОКНИРЯ ПУНКТУЛУЙ КУ О СУПРАФАЦЭ НЕТЕДЭ ФИКСЭ ШИ ДЕТЕРМИНАРЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЭ А КОЕФИЦИЕНТУЛУЙ ДЕ РЕСТИТУИРЕ**

Сэ консидерэм ун пункт материал, авынд витеза инициалэ  $\bar{v}$ , каре се чокнеште ку о супрафацэ нетедэ фиксэ. Сэ детерминэм витеза  $\bar{u}$  а ачестуй пункт ла сфыршитул чокнирий, дакэ проприетэциле еластиче але супрафецей се карактеризязэ прин коефициентул де реституире  $k$ . Ын фигура 300 пунктул А есте локул чокнирий пунктулуй материал ку супрафаца, акса  $n$  — нормала ла супрафацэ, сенсул позитив ал нормалей фиинд луат ын сус, акса  $\tau$  — дряпта танжентэ ла супрафацэ ши ситуатэ ын планул, каре трече прин векторул витезэ  $\bar{v}$  ши нормалэ,



$\alpha$  — унгул динтре векторул  $\bar{v}$  ши нормалэ (унгул де инчиденцэ),  
 $\beta$  — унгул динтре векторул  $\bar{u}$  ши нормалэ (унгул де рефлексие).  
 Ын конформитате ку теорема деспре вариация кантитэций  
 де мишкарэ а пунктулуй материал ла чокнире авем

$$m\bar{u}' - m\bar{v}' = \bar{S},$$

унде  $\bar{S}$  есте перкусиуня реакциуний, ындрептатэ дупэ нормала  
 ла супрафацэ, деоарече супрафаца есте нетедэ.

Проектынд амбеле пэрць але ачестей екуаций пе акселе  $\tau$   
 ши  $n$ , обцинем

$$m u_{\tau} - m v_{\tau} = 0, \quad m u_n - m v_n = S.$$

Дин прима екуацие резултэ, кэ  $u_{\tau} = v_{\tau}$ , адикэ ла чокнире  
 компонента танженциалэ а витезей ну се скимбэ. «Чя де-а доуа  
 екуацие концине доуэ некуноските:  $u_n$  ши  $S$ . Требуе сэ компу-  
 нем деч ынкэ о екуацие. Компонента нормалэ а витезей ын фа-  
 за де деформаре вариязэ де ла  $v_n$  пынэ ла 0, яр ын фаза де  
 реституиуре де ла 0 пынэ ла  $u_n$ . Конформ теоремей деспре ва-  
 риация кантитэций де мишкарэ а пунктулуй материал суб формэ  
 де проекций пе нормалэ пентру фаза де деформаре авем  
 $0 - m v_n = S_1$ ; пентру фаза де реституиуре  $m u_n - 0 = S_2$ .

Дин ачесте доуэ егалитэць резултэ

$$k = \frac{S_2}{S_1} = -\frac{u_n}{v_n}. \quad (25)$$

Формула (25) есте експресия чинематикэ а коефициентулуй  
 де реституиуре ын казул де фацэ ал чокнирий. Коефициентул де  
 реституиуре, калкулат дупэ формула (25) есте позитив, деоарече  
 семнеле проекцийлор  $u_n$  ши  $v_n$  сынт диферите.

Аша дар, пентру детерминаря мэримилор  $u_n$  ши  $S$  авем доуэ  
 екуаций  $m u_n - m v_n = S$ ,  $k = -\frac{u_n}{v_n}$ . Дин ачесте екуаций фолосинд  
 фигура 300, обцинем

$$u_n = -k v_n, \quad S = -m v_n(1+k) = m v \cos \alpha(1+k), \quad u_n = k v \cos \alpha.$$

Витеза пунктулуй  $u$  ла сфыршитул чокнирий поате фи кал-  
 кулатэ дупэ формула

$$u = \sqrt{u_{\tau}^2 + u_n^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}.$$

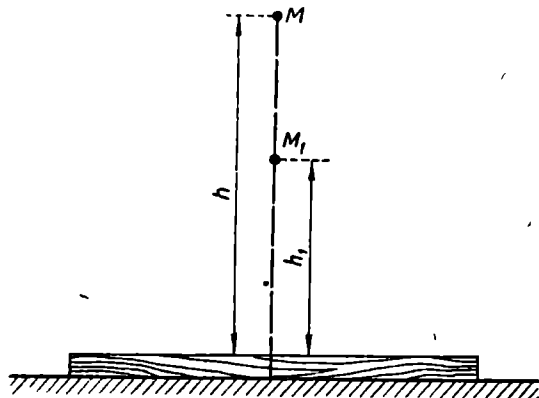
Пентру  $k=1$ , адикэ ын казул чокнирий абсолут еластиче,  
 $u = v$ . Апой, дин фигура 300 обсервэм, кэ

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{v_{\tau}}{v_n} : \frac{u_{\tau}}{u_n} = -\frac{u_n}{v_n} = k,$$

адикэ рапортул динтре танжента унгулуй де инчиденцэ ши

танжента унгулуй де рефлексие есте егал ку коэффициентул де реституире.

Екзистэ кытева методе експериментале пентру детерминаря коэффициенчулуй де реституире. Сэ не оприм асупра челей май симпле методе. О билэ, дин материалул черчетат жаде де ла ынэлцимя  $h$  ку витеза инициалэ нулэ пе о плакэ оризонталэ, фэкутэ дин ачелаш материал. Дуэ чокнире била се ридикэ ла ынэлцимя  $h_1$  (фиг. 301).



Фиг. 301.

Ын конформитате ку формула луй Галилеу

$$v = \sqrt{2gh}, \quad u = \sqrt{2gh_1} \text{ ши } k = -\frac{u_n}{v_n} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}. \quad (26)$$

Валориле коэффициенчулуй де реституире пентру диферите материалае пот фи гэсите ын диферите ындрумэтоаре. Де екземплу, коэффициенчул де реституире ла чокниря оцелулуй ку оцелул есте де  $\frac{5}{9}$ .

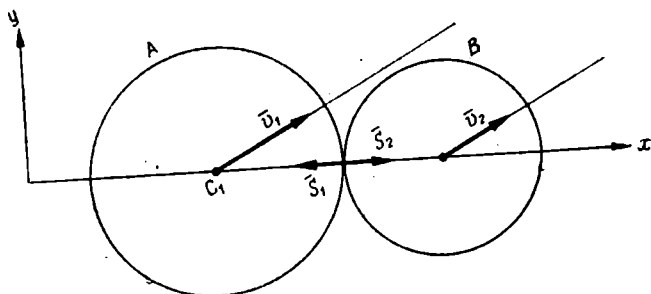
## § 9. ЧОКНИРЯ А ДОУЭ КОРПУРЬ

### Чокниря обликэ

Сэ нотэм маселе корпурилоу каре се чокнеск ку  $m_1$  ши  $m_2$ . Пресупунем, кэ мишкарэ лор есте мишкарэ де трансляcie. Нотэм витезеле корпурилоу ла ынчелутул чокнирий ку  $\vec{v}_1$  ши  $\vec{v}_2$ , яр ла сфыршит ку  $u_1$ ,  $u_2$ . Адмitem, кэ супрафецеле корпурилоу сынт абсолут нетеде. Чокниря есте чентрикэ, прин урмаре, чентреле маселор  $C_1$  ши  $C_2$  але корпурилоу, че се чокнеск, се афлэ пе линия де чокнире, адикэ пе нормала комунэ ла супрафаца

корпурило́р че се чокнеск ын пункту́л де контакт ал ачестора. Чокниря чентрикэ есте нумитэ обликэ, дакэ витезеле чентрелор маселор ла ынчепутул чокнирий ну се афлэ пе линия де чокнире. Даке ынсэ векторий ачестор витезе се афлэ пе линия де чокнире, атунч чокниря есте нумитэ директэ. Ын фигура 302 сынт репрезентате корпуриле  $A$  ши  $B$  ла ынчепутул чокнирий. Линия де чокнире есте луатэ дрепт акса  $x$ , яр акса  $y$  есте луатэ перпендикулар пе линия де чокнире. Дин партя корпулуй  $B$  асупра корпулуй  $A$  акционязэ перкусиуня  $\vec{S}_1$ , ындрептатэ дупэ линия де чокнире, деоарече супрафецеле корпурило́р сынт абсолут нетеде. Дин партя корпулуй  $A$  асупра корпулуй  $B$  акционязэ перкусиуня  $\vec{S}_2$ , унде  $\vec{S}_2 = -\vec{S}_1$ . Ын конформитате ку теорема деспрэ вариация кантитэций де мишкаре а корпулуй  $A$  ла чокнире авем

$$m_1 \vec{u}_1 - m_1 \vec{v}_1 = \vec{S}_1.$$



Фиг. 302.

Проектынд амбеле пэрць але ачестей екуаций пе акса  $y$  обцинем

$$m_1 u_{1y} - m_1 v_{1y} = 0,$$

де унде  $u_{1y} = v_{1y}$ . Ын мод аналог обцинем  $u_{2y} = v_{2y}$ . Дин челе обцинуте реесе, кэ проекциле витезелор корпурило́р че се чокнеск пе акса перпендикуларэ пе линия де чокнире ну вариязэ ла чокнире. Ын ачест каз вариязэ нумай проекциле витезелор корпурило́р пе линия де чокнире.

#### Чокниря чентрикэ директэ а доуэ корпуры

Сэ детерминэм витезеле корпурило́р  $\vec{u}_1$  ши  $\vec{u}_2$  ла сфыршитул чокнирий, дакэ куноаштем коефициентул де реституире  $k$ , яр витезеле  $\vec{v}_1$  ши  $\vec{v}_2$  сынт ындрептате ын лунгул линей де чокни-

ре. Кантитатя де мишкаре а корпурилор  $A$  ши  $B$  ла чокнире ну вариязэ, адикэ

$$m_1 \bar{v}_1 + m_1 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2.$$

деоарече асупра системулуй ну акционязэ перкусиунь екстериоре.

Ла сфыршитул чокнирий витезеле корпурилор  $u_1$  ши  $u_2$  сынт ориентате дупэ линия де чокнире, деоарече перкусиуня, каре акционязэ асупра фиекэруй корп, есте ындрептатэ де асеменя дупэ ачастэ линии. Проектынд амбеле пэрць але ултимей екуаций пе линия де чокнире, обцинем

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}.$$

Пентру комодитате сэ омitem семнеле проекциилор:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (27)$$

Ын егалитатя (27)  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $u_1$  ши  $u_2$  сынт валориле алжебриче але витезелор, адикэ витезеле ындрептате ынтр'ун сенс сынт консидерате позитиве, яр ын сенсул опус — негативе.

Екуация (27) концине доуэ некуноскуте —  $u_1$  ши  $u_2$ .

Сэ обцинем а доуа екуации. Ын казул чокнирий ку о супрафацэ фиксэ пентру коефициентул де реституире ын конформитате ку формула (25) авем  $k = -\frac{u_n}{v_n}$ . Експресия коефициентулуй

де реституире ын казул консидерат поате фи стабилитэ ын фелул урмэтор:  $v_n$  есте компонента нормалэ а витезей ку каре пунктул материал ынчепе сэ се афунде ын супрафаца фиксэ. Ын казул де фацэ корпул  $A$  се афунде ын корпул  $B$  ку витеза  $v_1 - v_2$ ;  $u_n$  есте компонента нормалэ а витезей, ку каре пунктул материал се ындепэртязэ де ла супрафацэ, деачея корпул  $A$  се ындепэртязэ де ла корпул  $B$  ку витеза  $u_1 - u_2$ . Мэримиле  $v_1 - v_2$  ши  $u_1 - u_2$  ау семне диферите.

Астфел пентру коефициентул де реституире ын казул де фацэ обцинем урмэтоаря експресие чинематикэ

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}. \quad (28)$$

Сэ уним екуацийле (27) ши (28):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}. \quad (29)$$

Системул де екуаций (29) пермите детерминаря витезелор  $u_1$  ши  $u_2$  ла сфыршитул чокнирий. Ын урма резолвэрий системулуй (29) обцинем:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 - (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_2 - v_1). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Сэ детерминэм вариация енержіей чинетиче  $T_2 - T_1$  а системулуй де корпури ла чокнире.

Есте евидент, кэ

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}(u_1^2 - v_1^2) + \frac{m_2}{2}(u_2^2 - v_2^2) = \\ = \frac{m_1}{2}(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + \frac{m_2}{2}(u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \quad (30')$$

Дин системул (30) авем

$$u_1 - v_1 = -(1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2),$$

$$u_2 - v_2 = (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_1 - v_2).$$

Субституим ачесте експресий ын партя дряптэ а екуацияей (30')

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (1+k)(v_1 - v_2)[-u_1 - v_1 + u_2 + v_2].$$

Ынсэ дин екуация (29)

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2).$$

Субституинд ачастэ експресие ын егалитатя [де май сус, общи-нем:

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (1+k)(v_1 - v_2)[k(v_1 - v_2) + v_2 - v_1] = \\ = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (1+k)(v_1 - v_2)^2(k-1)$$

сау дефинитив

$$T_2 - T_1 = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (1-k^2)(v_1 - v_2)^2. \quad (31)$$

Дин формула (31) реесе, кэ пентру  $k \neq 1$   $T_2 < T_1$ , адикэ аре лок пердеря енержіей чинетиче

$$T_{\text{перд}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (1-k^2)(v_1 - v_2)^2. \quad (31')$$

Пентру  $k=1$ , адикэ ын жазул чокнирий абсолюте еластиче,  $T_2 = T_1$ , адикэ чокниря аре лок фэрэ пердеря енержіей чинетиче.

Прима фазэ а чокнирий — фаза де деформаре — поате фи консидератэ дрепт казул де импунере инстантанее а легэтурилор нееластиче фиекэруй жорп, яр фаза а доуа — фаза де реституире — дрепт каз де ынлэтураре инстантанее а легэтурилор.

Ынсэ ын казул де фацэ легэтуриле импуге ши ынлэтурате ну сынт стационаре ши деч, енержія пердутэ де фиекаре корп ын парте, ну поате фи калкулатэ дупэ теорема луй Карно. Ынсэ енержія, пердутэ де системул дин доуэ корпуры че се чокнеськ, поате фи калкулатэ ку ажуторул теоремей луй Карно, деоарече аре лок кондиция

$$\overline{S_1 \bar{u}} + \overline{S_2 \bar{u}} = 0,$$

унде  $\bar{u}$  есте витеза комунэ а корпурилоу ла сфыршитул примей фазе ши  $\overline{S_2} = -\overline{S_1}$ . Ачестэ кондиция асигурэ апликаря теореме-лоу луй Карно ла прима ши а доуа фазэ, деоарече витеза финалэ а корпурилоу ын прима фазэ есте витеза инициалэ а корпурилоу ын фаза а доуа. Дупэ теорема женералэ а луй Карно енержія, пердутэ де систем ын тот прочесул чокнирий, конформ формулей (24) есте

$$T_{\text{перд}} = \frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{m_1}{2} (v_1 - u_1)^2 + \frac{m_2}{2} (v_2 - u_2)^2 \right]. \quad (32)$$

#### Казурь партикуларе але чокнирий центриче ши директе а доуэ корпуры

Сэ консидерэм чокниря абсолют неэластикэ, кынд  $k=0$ . Дин екуацииле (28) ши (29) авем

$$u = u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (33)$$

Формула (33) детерминэ витеза комунэ а корпурилоу ла сфыршитул чокнирий центриче, директе ши абсолют неэластикэ. Дин формула (31'), субституинд  $k=0$ , обцинем енержія чинетикэ пердутэ

$$T_{\text{перд}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (34)$$

Енержія чинетикэ пердутэ поате фи калкулатэ ши дин теорема луй Карно ку ажуторул формулей (32). Сэ консидерэм акум, кэ пынэ ла чокнире ун корп, де екземплу, корпул В, се афла ын репаус, адикэ  $v_2=0$ . Ын ачест каз дин формулеле (33) ши (34) авем

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad T_{\text{перд}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2.$$

Ла сфыршитул чокнирий амбеле корпуры се мишкэ ку витеза комунэ  $u$ . Деачея енержія чинетикэ рестантэ ла систем есте

$$T_{\text{рест}} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Енерҗия чинетикэ  $T$  а системулуй ла ынчепутул чокнирий (резерва де енерҗие) ера алкэтуитэ нумай дин енерҗия чинетикэ а корпуслуй  $A$ , адикэ  $T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ . Пентру енерҗия чинетикэ пердутэ ши чя рестантэ а системулуй авем

$$T_{\text{перд}} = \frac{m_2 T}{m_1 + m_2} = \frac{T}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad T_{\text{рест}} = \frac{m_1 T}{m_1 + m_2} = \frac{T}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \quad (35)$$

Практик чокниря се апликэ пентру а деформа корпусиле ши пентру а ле комуника витезэ. Енерҗия чинетикэ, пердутэ де систем, се келтуеште ла деформаре. Енерҗия чинетикэ рестантэ се консумэ пентру ынвинҗеря резистенцей ын мишкаря ултериоарэ. Дакэ чокниря есте фолоситэ пентру деформаре, енерҗия чинетикэ пердутэ алкэтуеште партя принципалэ а резервей тотале де енерҗие. Дин прима формулэ (35) реесе, кэ ачаста аре лок ын казул  $m_2 \gg m_1$ , адикэ маса корпуслуй фикс (де екземплу, а никовалей ын казул форжэрий) требуе сэ фие мулт май маре декыт маса корпуслуй че ловеште (а чоканулуй).

Дакэ чокниря есте фолоситэ пентру комуникаря витезей, атунч енерҗия чинетикэ рестантэ требуе сэ репрезинте партя принципалэ а резервей тотале де енерҗие. Дин а доуа формулэ (35) реесе, кэ ачаста аре лок дакэ  $m_2 \gg m_1$ , адикэ маса корпуслуй че ловеште (де екземплу, а чоканулуй) требуе сэ фие мулт май маре декыт маса корпуслуй фикс (де екземплу, а куюлуй).

Ын казул партикулар ал чокнирий абсолют еластиче а корпусилор ку масе егале, адикэ пентру  $k=1$  ши  $m_1=m_2$  дин формулеле (30) обцинем

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Резултатул обцинут поате фи формулат ын фелул урмэтор: *корпусиле ку масе егале ла чокниря абсолют еластикэ ышь скимбэ ынтре еле витезеле. Ын ачест каз ну авем пердерь де енерҗие чинетикэ.*

## § 10. ЧЕНТРУЛ ДЕ ЧОКНИРЕ

Сэ консидерэм, кэ асупра корпуслуй, каре се ротеште ын журул аксей  $z$ , пунктеле  $A$  ши  $B$  але кэрея сынт фиксе, акцияэ чокниря ку перкусиуны  $\bar{S}$ . Ла ачастэ чокнире ын пунктеле фиксе пот сэ се наскэ реакциунь де чокнире, импулсуриле кэроора ле нотэм ку  $\bar{S}_A$  ши  $\bar{S}_B$ . Нотэм ку  $\omega$  витеза унгуларэ а корпуслуй ла ынчепутул чокнирий. Сэ луэм дрепт орижине де координате  $O$  пунктул де ле акса де ротацие, пентру каре акса де ротацие есте ын ачелаш тимп ши аксэ принципалэ де инерциие а корпуслуй. Луэм акса  $u$  асфел, ынкыт центрул маселор

сэ се афле ын планул  $yOz$ , яр акса  $x$  перпендикулярэ пе ачест план (фиг. 303). Ла ачастэ алежере а акселор де координате

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \text{ ши } x_C = 0. \quad (36)$$

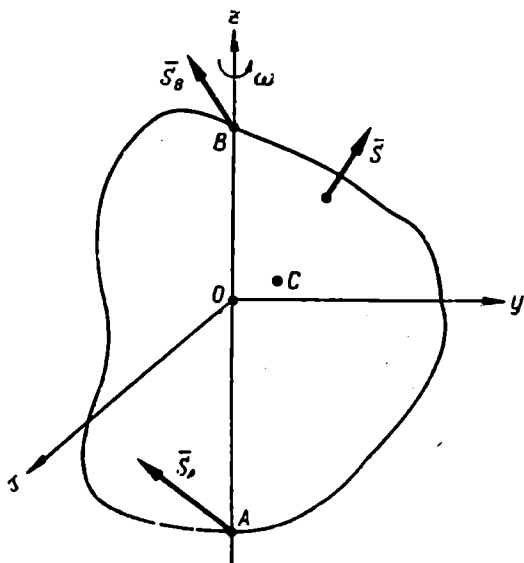
Сэ апликэм теорема деспре вариация кантитэций де мишкарэ а системулуй ши теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ла чокнире. Ын ачест каз

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{Q} &= \sum \bar{S}_k^{(e)} = \bar{S} + \bar{S}_A + \bar{S}_B; \\ \Delta \bar{K}_0 &= \bar{M}_0(\bar{S}) + \bar{M}_0(\bar{S}_A) + \bar{M}_0(\bar{S}_B). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Кантитатя де мишкарэ а корпулуй есте  $\bar{Q} = M\bar{v}_C = M(\bar{\omega} \times \bar{r}_C)$ . Де-пласаря корпулуй ын тимпул чокнирий се неглижазэ, деачея кантитатя де мишкарэ вариязэ нумай ын урма вариацией унгуларе  $\Delta\bar{\omega}$  ын тимпул чокнирий, адикэ

$$\Delta \bar{Q} = M(\Delta\bar{\omega} \times \bar{r}_C) = \Delta\bar{\omega} \times M\bar{r}_C,$$

унде  $M$  есте маса корпулуй, яр векторул  $\Delta\bar{\omega}$  есте ындрептат дупэ акса  $z$ .



Фиг. 303.

Пентру комодитатя проектэрий експресией  $\Delta\bar{Q}$  пе акселе де координате с'о презентэм суб формэ де детерминант

$$\Delta \bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \Delta\omega \\ Mx_C & My_C & Mz_C \end{vmatrix}. \quad (6)$$



Проекцииле векторулуй  $\bar{K}_0$  не акселе де координате пот фи детерминате дупэ формулеле пентру казул корпулуй ку ун пункт фикс

$$\left. \begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z; \\ K_y &= -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z; \\ K_z &= -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Ын казул де фацэ  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

Сэ проектэ амбеле пэрць але екуацией (а) не акселе де координате. Апликынд формулеле (б), (в) ши кондицииле (36) обцинем

$$\left. \begin{aligned} -M_{y_C} \Delta \omega &= S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \quad 0 = M_x(\bar{S}) + M_x(\bar{S}_A) + M_x(\bar{S}_B), \\ 0 &= S_y + S_{Ay} + S_{By}; \quad 0 = M_y(\bar{S}) + M_y(\bar{S}_A) + M_y(\bar{S}_B), \\ 0 &= S_z + S_{Az} + S_{Bz}; \quad J_z \Delta \omega = M_z(\bar{S}) + M_z(\bar{S}_A) + M_z(\bar{S}_B). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Системул де екуаций (37) пермите детерминаря перкусиуни-лор  $\bar{S}_A$  ши  $\bar{S}_B$  ши а вариацией витезей унгуларе а корпулуй  $\Delta \omega$  дакэ есте куноскутэ перкусиуня  $\bar{S}$ . Аша дар, авем шапте некуноскуте: шасе проекций але перкусиунилор  $\bar{S}_A$  ши  $\bar{S}_B$  не акселе де координате ши  $\Delta \omega$ . Мэримиле  $S_{Az}$  ши  $S_{Bz}$  сынт неде-терминате, деоарече амбеле се концин нумай ынтр'о сингурэ екуации. Рестул де некуноскуте але системулуй (37) сынт мэ-римь, каре пот фи детерминате.

Сэ стабилим акум кондицииле, ын каре чокниря ну наште реакциунь ын пунктеле А ши В. Ын ачест каз авем

$$S_A = S_B = 0.$$

Дин системул де екуаций (37) обцинем

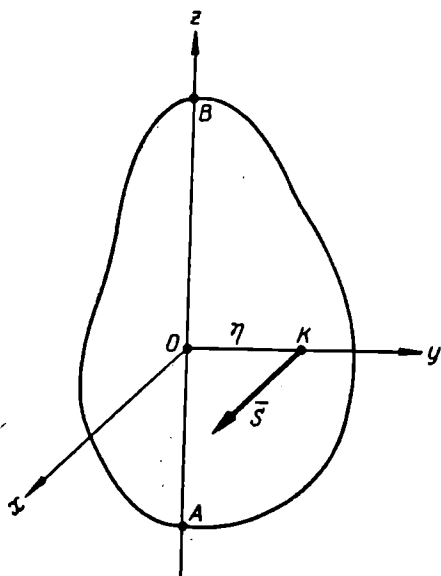
$$\left. \begin{aligned} -M_{y_C} \Delta \omega &= S_x, \quad S_y = 0, \quad S_z = 0, \\ M_x(\bar{S}) &= 0, \quad M_y(\bar{S}) = 0 \text{ ши } J_z \Delta \omega = M_z(\bar{S}). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Кондицииле  $S_y = S_z = 0$  ынсямнэ, кэ перкусиуня  $\bar{S}$  есте пара-лелэ ку акса  $x$ , деч есте сатисфэкутэ ши кондиция  $M_x(\bar{S})$ . Кондиция  $M_y(\bar{S}) = 0$  ынсямнэ, кэ линия де акциуне а перкусиу-ний  $\bar{S}$  интересктязэ акса  $y$ , прин урмаре, линия де акциуне а перкусиуний  $\bar{S}$  се афлэ ын планул  $xOy$ , деоарече еа ын ачелаш тимп есте паралелэ ку акса  $x$  (фиг. 304). Акум дин прима ши ултима кондиций (38) сэ детерминэм дистанца  $\eta$  де ла акса  $x$  пынэ ла линия де акциуне а перкусиуний  $\bar{S}$ :

$$-M_{y_C} \Delta \omega = S; \quad J_z \Delta \omega = -S \eta$$

$$\gamma_1 = -\frac{J_z \Delta \omega}{S} = \frac{J_z \Delta \omega}{M y_C \Delta \omega} = \frac{J_z}{M y_C}. \quad (39)$$

Дин екуация (39) реесе, кэ  $\eta$  ши  $y_C$  ау ачелаш семн, адикэ линия де акциуне а перкусиуний  $S$  се афлэ де ачеш парте а аксей де ротации  $x$  ка ши центрул маселор  $C$ .



Фиг. 304.

Прин урмаре, чокниря корпулуй, че се ротеште ын журул аксей фиксе, ну се трансмите асупра пунктелор де сприжин атулч, кынд сынт сатисфэкуте урмэтоареле кондиций:

1. Чокниря есте ындрептатэ перпендикулар пе планул, каре трече прин центрул маселор корпулуй ши акса де ротации ( $S_y = S_z = 0, x_C = 0$ ).

2. Планул, каре есте перпендикулар пе акса де ротации ши трече прин линия де акциуне а перкусиуний интерсектяэ акса де ротации ын пунктул, пентру каре ачаств аксэ есте акса принципалэ де инерции а корпулуй ( $J_{xz} = J_{yz} = 0$ ).

3. Пунктул де интерсекция а линии де акциуне а перкусиуний ку планул, каре трече прин центрул маселор корпулуй ши акса де ротации, се афлэ де ачеш парте а аксей де ротации, ка ши центрул маселор корпулуй. Дистанца пунктулуй де интерсекция де ла акса де ротации есте егалэ ку

$$\gamma_1 = \frac{J_z}{M y_C}.$$

Дакэ ла чокнире импурсуриле форцелор де реакциуне ын пунктеле де сприжин липсеок, атулч пунктул де интерсекция ал линии де акциуне а перкусиуний ку планул, каре трече прин центрул маселор корпулуй ши акса де ротации, есте нумит *центру де чокнире*. Ын фигура 304 ачест пункт есте нотат ку  $K$ .

Дупэ формула (39) се детерминэ лунжия редусэ а пендулуй физик. Деачея дистанца динтре центрул де чокнире ши акса де ротации есте егалэ ку лунжия редусэ а пендулуй физик, каре се обцине, дакэ акса де ротации есте оризонталэ

ши пендулуд осниляээ суб акциуня форцей де греутате ын журул ачестей аксе.

Ын казул партикуляр, кынд центрул де греутате ал корпусей се афлэ пе акса де ротацие,  $u_C = 0$  ши дин формула (39) резултэ кэ  $\gamma$  есте инфинит де маре, адикэ ын ачест каз центрул чокнирий ну екзистэ. Ын казул де фацэ  $\Delta Q = 0$  ши дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а корпусей ла чокнире урмязэ кэ

$$\vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B = 0,$$

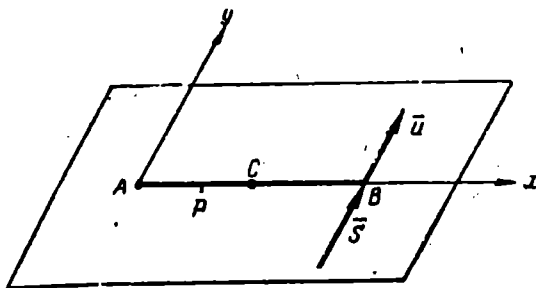
де унде

$$\vec{S}_A + \vec{S}_B = -\vec{S}.$$

Прин урмаре, дакэ центрул маселор корпусей се афлэ пе акса де ротацие, атунч чокниря каре акционязэ асупра корпусей, се трансмите комплект пунктелор де сприжин.

## § 11. ЕКЗЕМПЛЕ АЛЕ ФЕНОМЕНУЛУЙ ДЕ ЧОКНИРЕ

1. Пе ун план оризонтал нетед се афлэ вержяуа оможенэ  $AB$  ку лунжия  $l$ . Экстремитатя  $B$  а вержелей есте чокнитэ ын дирекция перпендикулярэ пе вержя. Ка резултат екстремитатя  $B$  капэтэ витеза  $u$  перпендикулярэ пе вержя. Сэ се детермине витеза унгуларэ а вержелей ла сфыршитул чокнирий ши позиция центрулуй инстантанеу ал витезелор (фиг. 305).



Фиг. 305.

Резолваре. Мишкаря вержелей есте о мишкаре план-паралелэ. Сэ луэм дрепт орижине а системулуй де координате екстремитатя  $A$  а вержелей, акса  $x$  о ориентэм ын лунгул вержелей, яр акса  $y$  ын планул оризонтал перпендикуляр пе вержя. Сэ нотэм центрул маселор вержелей прин  $C$ .

Дупэ кондициле проблемей, перкусиуня  $\vec{S}$  есте апликатэ ын пунктул  $B$  ши есте паралелэ ку акса  $y$ .

Сэ аппликэм екуация (10) пентру детерминаря витезелор ла офыршитул чокнирий.

Ын казул де фацэ чокниря есте ефектуатэ асупра унуь корп фикс, деч  $v_C=0$ ,  $\omega=0$ .

Екуацииле (10) капэтэ форма

$$Mu_C = S, \quad J_{Cz} \omega_1 = S \frac{l}{2}. \quad [(a)]$$

Ын системул (а) авем трей некуноските:  $u_C$ ,  $\omega_1$ ,  $S$ .

Екуация суплиментарэ резултэ дин мишкаря план-паралелэ а корпуслуй:

$$\bar{u}_B = \bar{u}_C + \bar{u}_{BC}$$

сау, деоарече векторул  $\bar{u}_C$  есте перпендикулар пе вержя,

$$u = u_C + \frac{1}{2} l \omega_1. \quad (b)$$

Дин системул (а), циньнд конт кэ  $J_{Cz} = \frac{1}{12} M l^2$ , обцинем

$$\frac{1}{12} M l^2 \omega_1 = S \frac{l}{2},$$

де унде

$$S = \frac{1}{6} M l \omega_1.$$

Апой

$$Mu_C = \frac{1}{6} M l \omega_1, \quad u_C = \frac{1}{6} l \omega_1.$$

Акум дин (б)

$$u = \frac{1}{6} l \omega_1 + \frac{1}{2} l \omega_1 = \frac{2}{3} l \omega_1 \quad \text{ши} \quad \omega_1 = \frac{3}{2} \frac{u}{l}.$$

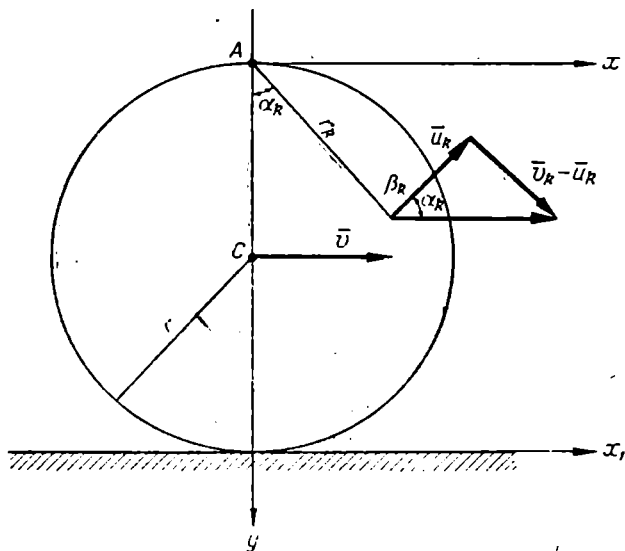
Чентрул инстантанеу ал витезелор се афлэ пе перпендикулара дусэ ла витеза  $\bar{u}$ , адикэ пе акса  $x$ . Сэ детерминэм дистанца  $BP$ :

$$BP = \frac{u}{\omega_1} = \frac{2}{3} l.$$

Аша дар, чентрул инстантанеу ал витезелор вержелей се афлэ ла дистанца де  $\frac{2}{3}$  дин лунжия вержелей де ла екстремитатя, ын каре а акционат чокниря.

2. Ун диск оможен ку маса  $m$  ши раза  $r$ , планул кэруя есте вертикал, ефектуязэ о мишкаре де трансляция ку витеза  $v$ , алу-некьнд ын ачелаш тимп пе акса нетедэ  $x$ . Ынтр'ун момент оарекаре пунктул де сус  $A$  ал дискулуй се фиксязэ. Сэ се детермине витеза унгуларэ а дискулуй ын ачест момент (фиг. 306).

Резолваре. Ын моментул фиксэрий пунктулуй де сус ал диокулуй форца де чокнире есте апликатэ ын ачест пункт. Делласаря пунктелор системулуй ын тимпул чокнирий се неглизазэ, деачея пунктул  $A$  поате фи консицерат фикс ын тимпул чокнирий ши путем аплика теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ын рапорт ку акса, каре трече прин  $A$ , перпендикуляр пе планул мишкэрий.



Фиг. 306.

Ын конформитате ку ачестэ теоремэ (формула 7')

$$\Delta K_A = \sum M_A(\bar{S}_k^{(e)}) = 0.$$

деоарече перкусиуня акционязэ ын пунктул  $A$ . Вариация моментулуй чинетик  $K_A$  ын тимпул чокнирий есте егалэ ку zero, прин урмаре, ла чокнире ачест момент чинетик ну вариязэ. Моментул чинетик ал дискулуй ла сфыршитул чокнирий поате фи детерминат дупэ формула пентру моментул чинетик ын рапорт ку о акса а корпусулуй, каре се ротеште ын журул ачестей аксе фиксе. Моментул де инерциие ал дискулуй  $J_A$  поате фи калкулат пе база теоремей луй Штайнер. Егалынд моментеле чинетиче ла ынчепутул ши ла сфыршитул чокнирий, обцинем

$$mvr = J_A \omega,$$

де унде

$$\omega = \frac{mvr}{J_A} = \frac{mvr}{\frac{1}{2}mr^2 + mr^2} = \frac{2}{3} \frac{v}{r}.$$

Ын ачасть резолваре ну фигурыз перкусуня, резолваря фиинд дестул де скуртэ. Фиксаря моментанэ а пунктулуй А есте де фапт импунеря уней легэтурь идеале стационаре ши нееластиче асупра дискулуй. Деачея путем сэ апликэм ын казул де фацэ прима теоремэ а луй Карно. Ачасть теоремэ пермите резолваря проблемей, деоарече ын екуация, каре експримэ ачасть теоремэ де асеменя ну фигурыз перкусуня

Дунэ прима теоремэ а луй Карно.

$$T_{\text{перд}} = \sum \frac{1}{2} m_k (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2.$$

Енержия чинетикэ а дискулуй ла ынчепутул чокнирий

$$T_1 = \frac{1}{2} m v^2,$$

яр ла сфыршитул чокнирий

$$T_2 = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \text{ ши } T_{\text{перд}} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} J_A \omega^2.$$

Сэ калкулэм енержия чинетикэ а дискулуй, кореспунзэтоаре витезелор пердуге. Пентру ачасть сэ консидерэм пе диск пунктул  $B_k$  ку координателе  $x_k, y_k$ . Нотэм дистанца ачестуй пункт ла акса А ку  $r_k$  (фиг. 306). Пентру ачест пункт

$$v_k = v \text{ ши } u_k = r_k \omega, \quad \bar{u}_k \perp AB_k.$$

Пентру патратул витезей, пердуге де пунктул  $B_k$ , конформ теоремей косинусурило авем

$$\begin{aligned} (\bar{v}_k - \bar{u}_k)^2 &= v^2 + r_k^2 \omega^2 - 2v\omega r_k \cos \alpha_k = \\ &= v^2 + r_k^2 \omega^2 - 2v\omega y_k. \end{aligned}$$

Ын ачест каз

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{2} m_k (\bar{u}_k - \bar{u}_k)^2 &= \sum \frac{1}{2} m_k v^2 + \sum \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 - \\ &- \sum m_k v \omega y_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 - \\ &- \omega v \sum m_k y_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 - m r \omega v, \end{aligned}$$

деоарече

$$\sum m_k y_k = m y_c = m r.$$

Егалынд енержия чинетикэ пердугэ ку енержия чинетикэ, кореспунзэтоаре витезелор пердуге, обцинем

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 - m r \omega v.$$

Алой

$$J_A \omega^2 = m r \omega v,$$

де унде

$$\omega = \frac{m r v}{J_A} = \frac{2}{3} \frac{v}{r}.$$

Астфел, фолосинд теорема луй Карно, ам обцинут ачелаш резултат.

3. О вержя, каре се ротеште ын планул вертикал ын журул аксей оризонтале  $O$ , есте абзтутэ де ла вертикалэ суб унгул  $\varphi_1$  ши есте лэсатэ сэ кадэ ку витеза инициалэ нулэ. Ла о дистанцэ оаре-каре де ла акса  $O$  ачастэ вержя аре моннатэ о плакэ дин материалаул черчетат, каре се ловеште де ун абстакон немишкат дин ачелаш материал, дупэ чокнире вержяуа абзтынду-се де ла вертикалэ суб унгул  $\varphi_2$ .

Сэ се детермине коэффициентул де реституире а материалулуй, (фиг. 307).

Резолваре. Сэ нотэм ку  $2l$  лунжия вержелей. Дистанца плэчий де ла акса  $O$  есте егалэ ку  $x$ . Сэ детерминэм май ынтый витеза унгуларэ а вержелей  $\omega$  ла ынчепутул чокнирий ку абстаколул. Ын ачест скоп апликэм теорема деспре вариация енержіей чинетиче  $T - T_0 = \sum A_k$ ;  $T_0 = 0$ , деоарече вержяуа ынчепе сэ кадэ ку витеза инициалэ нулэ. Вом авя

$$T = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad \sum A_k = Pl(1 - \cos \varphi_1),$$

деоарече лукрул механик есте ефектуат нумай де форца де греутате.

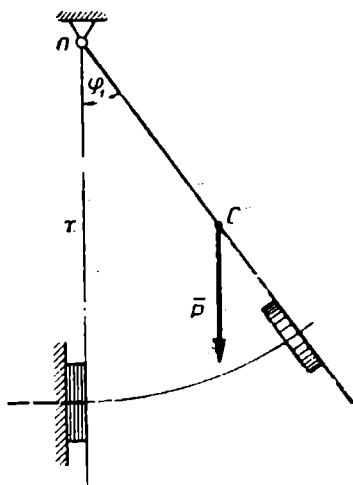
Витеза унгуларэ  $\omega$  се детерминэ дин екуация

$$\frac{1}{2} J_0 \omega^2 = Pl(1 - \cos \varphi_1) = 2Pl \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}. \quad (a)$$

Сэ детерминэм витеза унгуларэ а вержелей  $\omega_1$  ла сфырши-тул чокнирий.

Апликынд ачеш теоремэ пентру вариация енержіей чинетиче, обцинем

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_1^2 = 2Pl \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}. \quad (b)$$



Фиг. 307.

Витеза плэний монтате ла ынчепутул чокнирий есте  $v = x\omega$ ,  
яр ла сфыршитул чокнирий  $u = x\omega_1$ .

Коефициентул де реституире поате фи детерминат дин формула (28)

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

Примул корп есте обстаколул, чел де-ал дойля плака. Ын экспресия пентру  $k$  требуе сэ консидерэм кэ

$$v_1 = u_1 = 0; v_2 = v; u_2 = -u.$$

Астфел

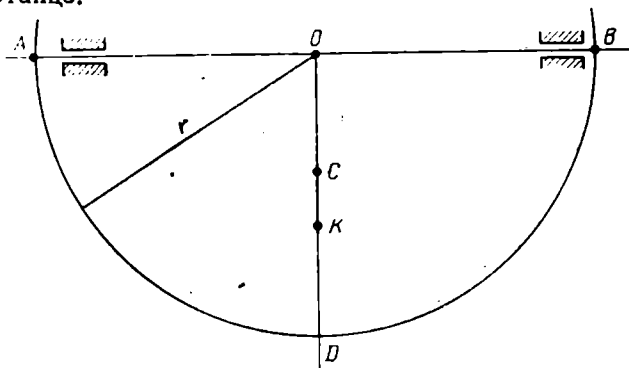
$$k = \frac{u}{v} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Апликынд екуацииле (а) ши (б), обцинем

$$k^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}} \quad \text{ши} \quad k = \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Ла детерминаря коефициентулуй де реституире дупэ ачестэ методэ се ефектуязэ о serie де експериенце ку диферите унгуры инициале де абатерё  $\varphi_1$ . Дрепт коефициент де реституире се адоптэ валоаря медие а мэримилор обцинуте.

Де обичей плака се монтязэ ын централ де чокнире ал вержёлей (ла дистанца  $\frac{2}{3}$  дин лунжимя вержёлей де ла акса  $O$ ). Ын ачест каз чокнириле ну здрунчинэ акса. Ын локул вержёлей поате фи луат орьче алт корп, деоарече дин резолваре реесе, кэ мэримя моментулуй де инерции ал корпулуй ну жоакэ нич о импортантэ.



Фиг. 308.

4. О ушницэ аре форма семичеркулуй  $ADB$  де разэ  $r$  каре се ротеште ын журул диаметрулуй  $AB$ . Ушица се дескиде ын урма уней чокнирь. Кум требуе ефектуатэ чокниря, ка еа сэ ну се трансмитэ асупра артикулациилор (фиг. 308)?



Резолваре. Чокниря пребуе ефектуатэ ын дирекция перпендикулярэ пе планул ушицей. Центрул де чокнире  $K$  се афлэ пе акса де симетрие а семичеркулуй, деоарече ын казул де фактэ планул, каре есте перпендикуляр пе акса де ротацие ши трече прин линия де акциуне а перкусииуний, интерсектязэ акса де ротацие ын пунктул, пентру каре, даторитэ симетрией, акса  $OD$  есте акса принципалэ де инерциие а ушицей.

Дистанца центрулуй де чокнире  $K$  ла акса де ротацие поате фи детерминатэ дупэ формула (39)

$$\eta_1 = OK = \frac{J_{AB}}{m y_C},$$

унде  $m$  есте маса ушицей,  $J_{AB}$  — моментул де инерциие ал ушицей ын рапорт ку акса  $AB$ ,  $y_C$  — дистанца де ла центрул маселор  $C$  але ушицей пынэ ла центрул жеометрик  $O$  ал семичеркулуй.

Моментул де инерциие  $J_{AB}$  поате фи детерминат, апликынд формула пентру моментул де инерциие ал дискулуй ын рапорт ку диаметрул  $AB$

$$J_{\text{диск}} = \frac{1}{4} M r^2,$$

унде  $M$  есте маса дискулуй. Ын ачест каз

$$J_{\text{диск}} = \frac{1}{4} 2m r^2 = \frac{1}{2} m r^2.$$

Есте евидент, кэ пентру моментул де инерциие ал ушицей ын рапорт ку акса  $AB$  авем

$$J_{AB} = \frac{1}{2} J_{\text{диск}} = \frac{1}{4} m r^2.$$

Мэримя  $y_C$  поате фи детерминатэ дупэ формула пентру дистанца центрулуй де греутате ал семичеркулуй ла центрул сэу жеометрик

$$y_C = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,42r.$$

Авем дефинитив

$$OK = \frac{m r^2 3\pi}{4m 4r} = \frac{3\pi}{16} r \approx 0,59r.$$

Дин резултатул обцинут реесе, кэ центрул де чокнире  $K$  се афлэ май жос декыт центрул де греутате  $C$  ал ушицей. Ын казул симетрик центрул де чокнире коинчиде ку центрул де осцилаций ал ушицей, каре есте консидератэ дрепт ун пендул физик, яр центрул де осцилаций ал пендулулуй физик се афлэ ын тогдьяуна май жос декыт центрул де греутате.

## ЕЛЕМЕНТЕ АЛЕ КОСМОНАУТИЧИЙ

Сукчеселе штиинцей ши техникий советиче ау дус ла инаугураля уней ере ной ын история оменирий — ера пэтрундерий омулуй ын космос.

Ла 4 октомбрие 1957 оамений советичь пентру прима датэ ын история штиинцей ау конструит ши лансат ун апарат космик де збор — примул сателит советик ал Пэмынтулуй.

Ла 12 априлие 1961 омул советик — космонаутол-ероу Ю. А. Гагарин а ефектуат примул збор космик.

Дупэ ачаша ши алць космонауць советичь: Г. С. Титов, А. Г. Николаев, П. Р. Попович, В. Ф. Быковский, В. В. Терешкова-Николаева, В. М. Комаров, К. П. Феокистов ши Б. Б. Егоров ау реализат зборурь космиче де дуратэ май лунгэ.

О ноуэ етапэ ын кучериля космосулуй а фост инаугуратэ де кэтре П. И. Беляев ши А. А. Леонов. Космонаутол А. А. Леонов пентру прима датэ ын историе а пэрэсит кабина корабией ши а ешит ын спациул космик.

Ла 3 фебруарие 1966 штиинца ши техника советикэ ау обцинут ун ноу сукчес мэрец ын кучериля космосулуй. Стация советикэ «Луна-9» а аселенизат лент пе Лунэ, а фотографият супрафаца ей ши а трансмис имажиниле пе Пэмынт.

Ла 1 мартие 1966 стация советикэ аутоматэ «Венера-3» а дус пе планета Венус ун фанион ши о медалие ку стема УРСС.

Ла 3 априлие 1966 а фост ефектуат ун ноу експеримент стрэлучит. Ын УРСС а фост конструит ши лансат ку ажуторул стацией аутомате «Луна-10» примул сателит артифициал ал Лунай.

Ачесте експерименте афирмэ ынкэ одатэ нивелул дестул де ыналт ал штиинцей ши техникий советиче, каре а дескис каля студийерий ултериоаре а космосулуй.

О импортанцэ маре ын валорификаря спациулуй космик о аре механика теоретикэ. Калкулул компликат ши екзакт ал траекториилор космиче ла депэртэрь де зечь ши суте де милиоане де километри, методеле де кондучере а зборурилор, конструиря апаратажулуй корэбиилор космиче — тоате ачестя сынт базате пе методеле елаборате де ачаштэ штиинцэ екзактэ.

Сэ студием пе скурт принципиле фундаментале але зборурилор либере (балистиче) але апарателор де збор космик. Теория зборурилор космиче либере се базязэ пе лежилие луй Ньютон — Кеплер дин механика черяскэ. Ын конформитате ку ачесте лежь фиэкаре пункт материал, каре се афлэ нумай суб акциуня форцей де атракцие а унуй сингур чентру, аре о мишкаре анумитэ фацэ де ачест чентру. Ачаштэ мишкаре депинде нумай де кондицииле инициале, адикэ де позиция пе каре о окупэ пункт-

тул материал ын моментул инициал, кынд ел се афлэ нумай суб акциуня форцей де атракцие, ши де витеза луй ын ачест момент. Пе база ачестор принципий се мишкэ центрул маселор фиекэруй апарат де збор космик.

## § 1. НОЦИУНЬ ФУНДАМЕНТАЛЕ

Конформ лежий гравитацией универсале, стабилите де Ньютон, фиекаре доуэ корпурь материале интеракциязэ ку форцеле де атракцие речипрокэ, егале ка мэриме, опусе ка сенс ши апликате фиекэруй корп:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1$  (фиг. 309).

Мэримя фиекэрей форце се детерминэ дупэ формула урмэтоаре:

$$F_1 = \gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

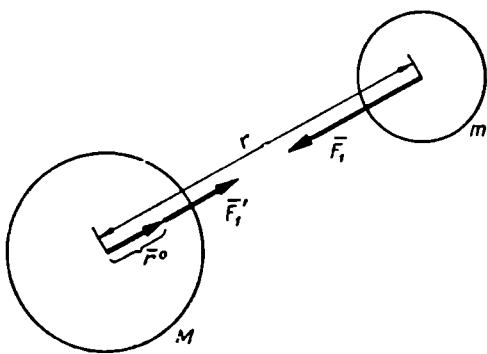
унде  $M$  ши  $m$  сынт маселе корпурилоу че интеракциязэ,  $r$  — дистанца динтре еле,  $\gamma$  — константа гравитационалэ, каре ын системул СИ есте егалэ ку  $6,69 \cdot 10^{-11} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \text{сек}^{-2}$ .

Фиекаре дин ачесте форце комуникэ корпулуй, асудра кэруя акциязэ, о акчелерация кореспунзэтоаре масей корпулуй. Неглижынд дименсиуниле корпурилоу ын компарация ку дистанца динтре еле, путем консидера, кэ пунктеле де апликаре а форцелор коинчид ку центреле маселор корпурилоу.

Ын казул, кынд маса унуй корп есте екстрем де микэ ын компарация ку маса челуйлалт корп, де фапт, се мишкэ нумай корпул ку маса микэ, яр корпул ку маса маре есте ун. центру фикс де атракцие, ын рапорт ку каре корпул атрас — пунктул материал —

дескрие о траекторие анумитэ. Ачестэ афирмация рэмыне жустэ ын казул апарателор де збор космик лансате ын кымпул форцелор де атракцие але Пэмынтулуй сау але алтор планете.

Аша дар, Пэмынтул сау о алтэ планетэ оарекаре, консидератэ ка о сферэ оможенэ, атраже фиекаре пункт материал дин екстериорул луй тот аша, дупэ кум ачест пункт ар фи фост атрас де ун пункт материал, каре ар авя маса егалэ ку маса сферей ши с'ар афла ын центрул сферей дате.



Фиг. 309.

Сэ апликэм акум формула (1) ла ун пункт материал ку маса  $m$ , каре се афлэ ын апропиеря супрафецей Пэмынтулуй. Сэ нотэм раза Пэмынтулуй ку  $R$ , яр акчелерация кэдерий либере ын апропиеря супрафецей Пэмынтулуй ку  $g_0$ . Сэ егалэм продусул масей пунктулуй прин акчелерация са ку форца, че акционязэ асупра ачестуй пункт

$$mg_0 = \gamma \frac{Mm}{R^2}.$$

Де анч

$$\gamma M = R^2 g_0. \quad (2)$$

Ла дистанца  $r$  де ла чентрул Пэмынтулуй

$$\gamma M = r^2 g. \quad (2')$$

Ын ачест каз

$$R^2 g_0 = r^2 g, \quad \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2}. \quad (3)$$

Експресия векториалэ а форцей де атракције есте

$$F = - \gamma \frac{Mm}{r^2} r^0, \quad (4)$$

унде  $\bar{r}^0$  есте версорул дирекцией де ла чентрул Пэмынтулуй спре пунктул де апликације ал форцей  $\bar{F}$ ; прин урмаре, проекция форцей  $\bar{F}$  пе дирекция разей-вектоаре  $\bar{r}$  а пунктулуй ей де апликације есте

$$F_r = - \gamma \frac{Mm}{r^2}. \quad (5)$$

Дин екуация (5) резултэ, кэ кымпул форцелор де атракције поате фи карактеризат прин функция де форцэ

$$U = \gamma \frac{Mm}{r} \quad (6)$$

ши енергия потенциалэ

$$P = - \gamma \frac{Mm}{r}. \quad (7)$$

Проблема луй Ньютон есте урмэтоаре: сэ се афле траектория мишкэрий пунктулуй суб акциуня форцей де атракције спре чентрул Пэмынтулуй, кынд пунктул се мишкэ фацэ де системул де координате, легат ку глобул пэмынтеск. Ачест систем де координате поате фи консидерат апроксиматив инерциал, деоарече мишкаря Пэмынтулуй пе о ларте а орбитей сале ын журул Соарелуй есте апроксиматив униформэ ши ректилиние даторитэ фаптулуй, кэ дистанца динтре Пэмынт ши Соаре есте маре ши периоада де ротация а Пэмынтулуй пе орбита са де асемениа есте маре. Дин ачастэ каузэ форца де инерције ын мишкаря де транспорт ши форца де инерције а луй Кориолис пот

фи negliжате, яр системул де координате, легат рижид ку Пэмынтул ши ку орижина ын центрул Пэмынтулуй, фацэ де каре се черчетязэ мишкаря пунктулуй материал, поате фи консидерат дрепт систем инерциал.

## § 2. ИНТЕГРАЛЕЛЕ ПРИМЕ АЛЕ ЕКУАЦИИЛОР МИШКЭРИЯ

Форма векториалэ а екуацией динамиче диференциале а мишкэрий пунктулуй материал суб акциуня форцей де атракцие а Пэмынтулуй есте

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (8)$$

унде  $\bar{a}$  есте акчелерация пунктулуй, яр  $\bar{F}$  — форца де атракцие дин партя Пэмынтулуй.

Дин теорема деспре моментул кантитэций де мишкаре обцинем доуз консецинце: ын примул рынд, есте евидент, кэ траектория пунктулуй каре се мишкэ суб акциуня форцей де атракцие, есте о курбэ планэ, планул кэрея трече прин центрул де атракцие; ын рындул ал дойля, витеза ареоларэ а пунктулуй  $\bar{v}_0 = \cos \psi$ ; ачастэ мэриме константэ поате фи детерминатэ дин кондицииле инициале

$$\overline{\text{const}} = \frac{1}{2} \bar{M}_0(\bar{v}_0), \quad (8)$$

унде  $\bar{v}_0$  есте витеза инициалэ а пунктулуй.

Сэ студием мишкаря пунктулуй фацэ де системул де координате поларе луат ын планул траекторией пунктулуй ку орижина ын центрул де атракцие. Ын ачест каз векторул витезей ареоларе есте перпендикулар пе ачест план; сэ луэм сенсул позитив ал мэсурэрий унгюрилор поларе ын кореспундере ку сенсул векторулуй витезей ареоларе. Ла мишкаря пунктулуй пе траектория са планэ арэ лок интеграла ариилор; каре експримэ фаптул, кэ мэримя алжебрикэ а витезей, ареоларе есте о мэриме константэ

$$r^2 \dot{\varphi} = k, \quad (9)$$

унде

$$k = 2v_0^0 = M_0(\bar{v}_0) = v_0 h_0 = v_0 r_0 \sin \psi_0. \quad (10)$$

Аич  $\varphi_0$  есте унгюл динтре раза вектоаре а пунктулуй ын позиция са инициалэ  $B_0$  (фиг. 310) ши векторул витезей инициале  $\bar{v}_0$  а пунктулуй.

О алтэ интегралэ есте интеграла енержіей, деоарече мишкаря арэ лок ын кымпул уней форце потенциале; ын прочесул мишкэрий енержія механикэ тоталэ а пунктулуй материал есте о мэриме константэ:

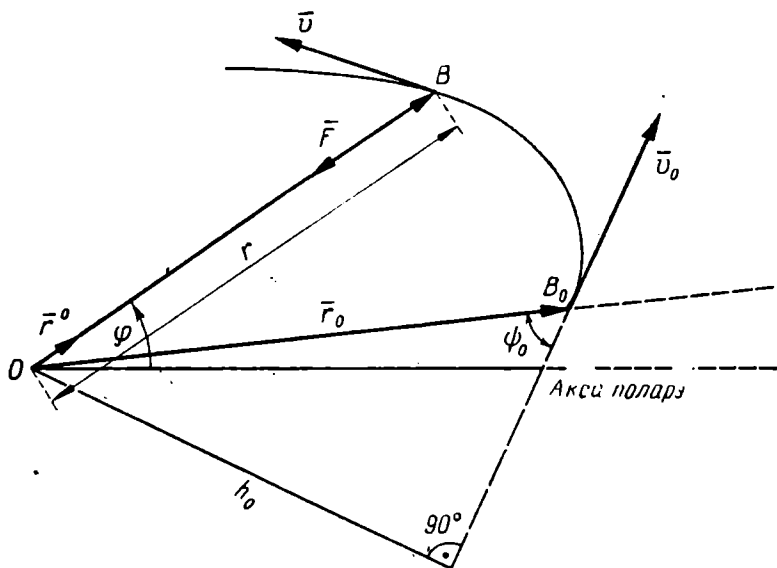
$$T + \Pi = h. \quad (11)$$

Константа  $h$  поате фи детерминатэ дин кондицилле инициале

$$h = T_0 + \Pi_0, \quad (11')$$

пентру

$$t=0, T_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad \Pi_{t=0} = \Pi_0 = -\gamma \frac{Mm}{r_0}.$$



Фиг. 310.

Субституинд ачесте валорь ын екуация (11) ши луинд пентру енергия чинетикэ експресия са ын координате поларе, обцинем

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Симплификынд тоць термений прин  $m$ , експримэм интеграла суб форма:

$$\frac{1}{2} (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma M}{r} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0}. \quad (12)$$

### § 3. ДЕТЕРМИНАРЯ ТРАЕКТОРИЕЙ

Сэ детерминэм форма траекторией пунктулуй реешинд дин екуацилле диференциале (9) ши (12). Ын ачест скоп сэ аппликэм ши идентитатя.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \equiv \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (13)$$

Пентру деривата  $\dot{\varphi}$  дин (9) авем

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{r^2}.$$

Дупэ субституирия ачестей деривате ын (13) обцинем

$$\dot{r} = \frac{k}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (14)$$

Сэ субституим ын (12) ын локул луй  $\dot{\varphi}$  експресия са дин (9), яр ын локул луй  $\dot{r}$  експресия са дин (14). Се обцине о екуацие ку вариабиле сепарабиле, каре дупэ резолваря фацэ де  $\frac{dr}{d\varphi}$  аре аспект

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r^2}{k} \sqrt{v_0^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{2\gamma M}{r}}. \quad (15)$$

Сэ студием мишкаря, ын каре одатэ ку мэрия унгюлуй  $\varphi$  креште ши мэрия  $r$ . Сэ адучем експресия де суб радикал ла о формэ май комодэ пентру интеграре. Ын ачест каз екуация 15 капэтэ форма

$$d\varphi = + \frac{kdr}{r^2 \sqrt{v_0^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} + \frac{\gamma^2 M^2}{k^2} - \left(\frac{k}{r} - \frac{\gamma M}{k}\right)^2}}. \quad (16)$$

Сэ нотэм

$$A^2 = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} + \frac{\gamma^2 M^2}{k^2}, \quad (17)$$

ши сэ ынлокуим вариабиле де интеграре

$$u = \frac{k}{r} - \frac{\gamma M}{k}. \quad (18)$$

Дин екуация (16) обцинем

$$d\varphi = - \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}}, \quad (19)$$

де унде

$$\varphi = \arccos \frac{u}{A} + C. \quad (20)$$

Константа  $C$  се детерминэ дин кондицииле инициале. Пентру  $t=0$

$$\varphi_{t=0} = \varphi_0; \quad u_{t=0} = u_0 = \frac{k}{r_0} - \frac{\gamma M}{k}.$$

Ын ачест каз

$$\varphi_0 = \arccos \frac{u_0}{A} + C,$$

де унде

$$C = \varphi_0 - \arccos \frac{u_0}{A}.$$

Нотынд

$$\varphi_0 - \arccos \frac{u_0}{A} = \alpha, \text{ авем}$$

$$C = \alpha. \quad (21)$$

Екуация (20) капэтэ форма

$$\varphi = \arccos \frac{u}{A} + \alpha, \quad (22)$$

де унде

$$u = A \cos(\varphi - \alpha). \quad (23)$$

Ынлокуинд акум  $u$  ку експресия са дин (18), обцинем екуация траекторией ын координате поларе

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (24)$$

унде

$$p = \frac{k^2}{\gamma M} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \psi_0}{M \gamma}, \quad (25)$$

$$e = \sqrt{1 + \left( v_0^2 - \frac{2\gamma M}{r_0} \right) \frac{k^2}{\gamma^2 M^2}}. \quad (26)$$

#### § 4. ЧЕРЧЕТАРЯ ТРАЕКТОРИЕЙ. ФОРМУЛЕЛЕ ПЕНТРУ ВИТЕЗЕЛЕ КОСМИЧЕ

Екуация (24) есте екуация уней курбе де ординул ал дойля (а уней секциунь кониче), унде орижия системулуй де координате поларе се афлэ, пе де о парте, ын центрул де атракцие (ын центрул Пэмынтулуй), яр пе де алтэ парте, дупэ кум аратэ екуация траекторией ын координате поларе, орижия координателор коинчиде ку унул дин фокареле курбей де ординул ал дойля. Аша дар, ын казул мишкэрий балистиче а апаратулуй де збор фацэ де планетэ центрул де атракцие (планета) се афлэ ын унул дин фокареле орбитей. Мишкаря есте нумитэ балистикэ, деоарече еа аре лок нумай суб акциуня форцей де атракцие спре центрул консидерат ын липса тракциуний дин партя мотоарелор апаратулуй де збор.

Мэримиле ( $e$ ,  $p$ ) дин екуация (24) детерминэ форма курбей ши дименсиуниле ей пе план. Уна дин мэримиле карактеристиче але траекторией есте эксцентритатя курбей  $e$ .



Пентру  $e < 1$ , чея че дупэ (26) аре лок атунч, кынд

$$v_0 < \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}, \quad (27)$$

траектория есте о елипсэ.

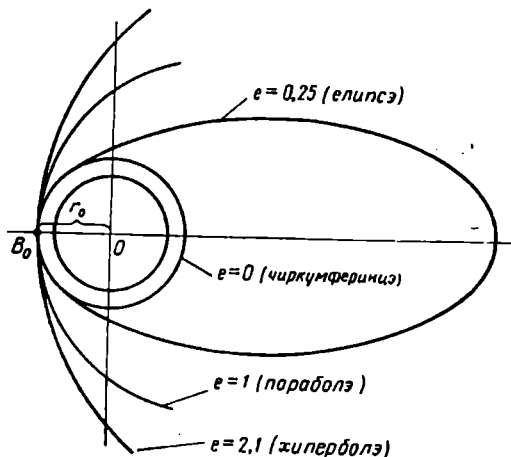
Пентру  $e = 1$  траектория есте о параболэ ши

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}. \quad (28)$$

Пентру  $e > 1$ , чея че аре лок дакэ

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}, \quad (29)$$

траектория есте о гиперболэ (фиг. 311)



Фиг. 311.

Траектория есте о циркумферинцэ атунч, кынд сынт сатисфэкуте кондицииле урмэтоаре: витеза инициалэ есте перпендикулярэ пе раза вектоаре инициалэ  $\vec{r}_0$ , адикэ  $\psi_0 = 90^\circ$ \*, адикэ

$$k = r_0 v_0. \quad (29')$$

Афарэ де ачаста требуе сэ фие сатисфэкутэ кондиция пентру витеза инициалэ де лансарэ

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}. \quad (30)$$

Ын ачест каз мэринмя  $e$  дин (26) дэвине егалэ ку zero.

\* Ачаста се ефектуязэ ла лансаря апаратулуй де збор ку ажуторул системелор де командэ.

Мэрия  $p$  де ла нумэрул екуацией траекторией (24) есте нумитэ *параметрул курбей де ординул ал дойля* ши есте егалэ ку лунжия перпендикуларей пе акса курбей, дусэ дин фокар пынэ ла интерсекции ку курба.

Апаратул де збор ва дескрие о траекторие ын журул Пэмынтулуй, адикэ ва фи ун сателит ал луй, атунч, кынд пентру валориле консидарате але витезей инициале  $v_0$  ши а дистанцей инициале  $r_0$  параметрул  $p$ , адикэ унгул  $\psi_0$  ва обцине о валоаре кореспунзэтоаре. Пот фи дедусе ануите формуле, каре експримэ кондицииле пентру унгул  $\psi_0$ , ла каре пентру витеза датэ, де екземплу еллиптикэ, траектория ну интерсектызэ Пэмынтул.

Прин урмаре, есте стабилитэ уна дин лежиле фундаментале але космонаутичий: дакэ асупра апаратулуй де збор акциязэ нумай форца де атракцие дин партя унуй корп оарекаре, атунч форма траекторией балистиче а ачестуй апарат есте педеплин детерминатэ де кондицииле инициале але ачестей мишкэрь — де витеза инициалэ  $v_0$  (витеза, каре о поседэ апаратул де збор ын моментул ынчетэрий функционэрий моторулуй), дистанца инициалэ  $r_0$  де ла центрул де атракцие, маса  $M$  а центрулуй де атракцие (ну де маса апаратулуй де збор) ши дирекция витезей инициале (де унгул  $\psi_0$ ).

Ын кореспундере ку ачесте кондиций инициале екзистэ урмэтоареле витезе космиче инициале: циркуларэ, еллиптикэ, параболікэ ши гиперболичэ (фиг. 311). Кондицииле (27)—(30) але ачестор витезе пот фи репрезентате суб о алтэ формэ. Сэ нотэм ку  $g$  акчелерация кэдерий либере ла дистанца  $r_0 > R$  де ла центрул Пэмынтулуй ши сэ апликэм формула (2'). Ын ачест каз кондицииле пентру витезеле космиче капэтэ форма урмэтоаре:

пентру витеза циркуларэ

$$v_0 = \sqrt{r_0 g}; \quad (31)$$

пентру витезеле еллиптиче

$$v_0 < \sqrt{2r_0 g}; \quad (32)$$

пентру витеза параболікэ

$$v_0 = \sqrt{2r_0 g}; \quad (33)$$

пентру витезеле гиперболиче

$$v_0 > \sqrt{2r_0 g}. \quad (34)$$

Дакэ  $r_0 = R$  (раза Пэмынтулуй), адикэ пентру  $v_0 = \sqrt{Rg_0}$ , витеза циркуларэ есте егалэ ку 7,9 км/сек (*прима витезэ космичэ*,  $g_0$  есте акчелерация пентру  $r_0 = R$ ).

Ынчепынд нумай ку ачастэ витезэ корпул поате девени сателит ал Пэмынтулуй. Пентру  $r_0 = R$  витеза параболікэ  $v_0 = \sqrt{2g_0 R}$

есте егалэ ку 11,2 км/сек. Ла ачастэ витезэ ши ла ун унъ  $\varphi_0$  кореспунзэтор апаратул де збор се ындепэртязэ спре инфинит, адикэ плякэ дин кымпул де атракцие ал Пэмынтулуй. Деачея витеза параболикэ есте нумитэ *а доуа витезэ космикэ*, сау витеза де елибераре де суб атракция чентрулуй дат.

Ла о витезэ хиперболикэ егалэ ку 16,7 км/сек ынтр'о дирекцие кореспунзэтоаре корпул, ешинд дин сфера де атракцие а Пэмынтулуй, ынтрэ ын сфера де атракцие а Соарелуй ку о витезэ параболикэ фацэ де Соаре, адикэ пэрэсеште системул Со-лар.

Казул траекторийей чиркуларе. Дин лежя витезей ареоларе константе ла мишкаря пунктулуй суб акциуня форцей чентрале дупэ о чиркумферинцэ резултэ кэ витеза пунктулуй рэмыне константэ ка мэриме, яр дирекция ей есте перпендикуларэ пе дирекция разей вектоаре поларе. Пунктул аре нумай акчелерация нормалэ

$$r\ddot{\varphi}^2 = \frac{\mu}{r^2},$$

де унде

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu}{r^3} = \text{const},$$

унде

$$\mu = \gamma M.$$

Прин урмаре, мэримя витезей инициале, ла каре пунктул дескрие о траекторие, поате фи детерминатэ дин релация

$$v_{\text{чирк}} = r_0 \dot{\varphi}_0$$

сау

$$v_{\text{чирк}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}.$$

Дирекция витезей инициале есте перпендикуларэ пе  $\vec{r}_0$ . Сэ афлэм релация динтре витеза чиркуларэ ши чя параболикэ. Азем

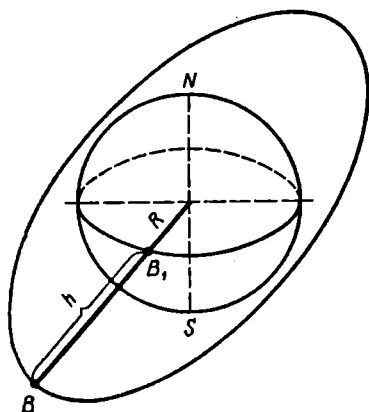
$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}, \quad v_{\text{чирк}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}},$$

де унде

$$\frac{v_{\text{пар}}}{v_{\text{чирк}}} = \sqrt{2}.$$

Дупэ кум ам възут май сус, витезеле космиче пот авя о алтэ формэ, май комодэ ла калкуле, ши ануме пот фи експримате прин  $g$ .

Сэ стабилым кондицилле, ын каре сателитул Пэмынтулуй ар фи немишкат фацэ де Пэмынт, адикэ сателитул ар авя ачеаш витезэ де ротацие ын журул аксей Пэмынтулуй, ка ши Пэмынтул. Есте евидент, кэ траектория унуй асеменя сателит фацэ де системул де координате фикс ын спациу ши ку орижина ын централ Пэмынтулуй, требуе сэ фие о циркуферинцэ, планул кэрея коинчиде ку планул екуаториал ал Пэмынтулуй. Сэ афлэм, ла че ынэлциме де асупра екуаторулуй требуе сэ комуникэм сателитулуй витеза кореспунзэтоаре. Пе де о парте, ачаствэ витезэ циркуларэ се експримэ прин формула



Фиг. 312.

$$v = \sqrt{gr}, \quad (35)$$

унде  $r = R + h$ , яр  $h$  есте ынэлцимья че требуе детерминатэ (фиг. 312).

Пе де алтэ парте, ачаствэ витезэ есте егалэ ку витеза, че ар авя-о сателитул, дакэ ел ар фи легат рижид ку Пэмынтул, авынды о витезэ комунэ де ротацие ын журул аксей Пэмынтулуй. Сэ консидерэм пунктул  $B_1$  де пе екуатор, каре се афлэ пе ачеаш разэ ку сателитул  $B$ . Витеза пунктулуй  $B_1$  есте  $v' = R\omega$ . Есте евидент, кэ пентру витеза сателитулуй авем

$$v = v' \frac{r}{R}. \quad (36)$$

Ын фавоаря формулей (3)

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2} \text{ ши } g = g_0 \frac{R^2}{r^2}.$$

Егалынды (36) ку (35) обцинем екуация

$$v' \frac{r}{R} = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{r^2} \cdot r} = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{r}},$$

унде  $r$  есте мэримья че требуе детерминатэ. Апой

$$\frac{v'^2 r^2}{R^2} = \frac{g_0 R^2}{r}$$

сау

$$r^3 = \frac{g_0 R^4}{v'^2},$$

унде

$$r=R\sqrt[3]{\frac{g_0 R}{v'^2}}.$$

Обцинем

$$v'=R\omega \approx 6400 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx \frac{4}{9} \text{ км/сек};$$

$$g_0 \approx 9,8 \text{ м/сек}^2 \approx 0,01 \text{ км/сек}; \quad r=R+h=$$

$$=R\sqrt[3]{\frac{0,01 \cdot 6400 \cdot 81}{16}} = R\sqrt[3]{64 \cdot 5} = 4R\sqrt[3]{5} = 6,8 \cdot R,$$

де унде

$$h=4\sqrt[3]{5} R_1 - R = (4\sqrt[3]{5} - 1) R.$$

Пентру валориле май екзакте але мэримилор  $R$  ши  $g_0$  лэ екуатор авем

$$h=35810 \text{ км.}$$

Прин урмаре, мишкаря сателицилор артифициаль ай Пэмын-тулуй (сау ай алтор планете) аре лок дупэ ачеляшь лежь, дупэ каре планете се мишкэ ын журул Соарелуй. Ачесте лежь ау фост дескоперите де Кеплер (1571—1630) ла ынчепутул секолулуй XVII пе база обсервациилор, фэкуте де ун алт савант — Тихо Браге (1546—1601). Лежице, че поартэ нумеле луй Кеплер, ау фост демонстрате теоретик май тырзну де кэтре Ньютон (1643—1727). Сэ формулэм челе трей лежь фундаментале але луй Кеплер:

1. *Траектория (орбита) фиекэрей планете се афлэ ынтр'ун план фикс фацэ де Соаре ши есте о елипсэ, ын унул дин фока-реле кэрея се афлэ Соареле.*

2. *Дряпта (раза вектоаре а планетей), каре унеште Соареле ку планета, дескрие ын интервале егале де тимп арий егале сау алтфел: витеза ареоларэ а планетей рэмыне константэ ла мишкаря ей.*

3. *Патрателе периоаделор де ротацие комплектэ а планетелор сынт пропорционале ку кубуриле дистанцелор медий але планетелор кореспунзэтоаре ла Соаре, адикэ ку кубуриле семи-акселор марь але орбителор лор*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Требуе сэ менционэм, кэ лежице луй Кеплер ну цин конт де оserie де факторь, че инфлуенцияэ асупра мишкэрий планетелор. Ын казул планетелор аша факторь сынт атракцилие лор речип-

роче. Асупра мишкэрий сателицилор артифициаль ай Пэмынтулуй инфлуенцязэ: абатеря формей Пэмынтулуй де ла форма сферикэ; акциуня де фрынаре дин партя атмосферей Пэмынтулуй; атракция дин партя Соарелуй ши а Луней; кымпул магнетик ал Пэмынтулуй ш. а. Пентру а калкула екзакт траекториие ши лежиле мишкэрий сателицилор пе ачесте траекторий есте нечесар сэ цинем конт де тоць ачешть факторы.

## § 5. АПРОПИЕРЯ САТЕЛИЦИЛОР ДИРИЖАЦЬ АЙ ПЭМЫНТУЛУЙ

Пентру дезволтаря де май департе а космонаутичий ши а зборурило интерпланетаре есте нечесар сэ резолвэм проблема апропиерий апарателор космиче де збор. Сэ студием чел май симплу каз ал ачестей проблеме. Сэ консидерэм дой сателищ артифициаль ай Пэмынтулуй  $S$  ши  $S_1$ , че се мишкэ пе траекторий циркуларе дестул де апропияте уна де алта, дар ын плане диферите. Ынчепынд ку о позиции речипрокэ а сателицилор (дистанца динтре дынший фиинд де зечь де километри) сателитул  $S_1$  ынчепе маневра ынтылнирий ку сателитул  $S$ : ку ажуторул диспозитивелор де командэ сателитул  $S_1$  ышь скимбэ витеза са орбиталэ дупэ дирекциие ши мэриме ши трече пе орбита апропиерий ку сателитул  $S$ .

Сэ компунем екуацииле диференциале але мишкэрий де тречере ын системул де координате мобил ку орижина ын центрул маселор сателитулуй  $S$ . Сэ ориентэм акса  $Sx$  дупэ танжента ла орбита сателитулуй  $S$ , акса  $Sy$  — спре центрул Пэмынтулуй  $T$ , акса  $Sz$  — перпендикуляр пе планул орбитей (фиг. 313). Сэ ынTRODучем урмэоареле нотаций:  $\vec{r} = \vec{TS}$ ;  $\vec{r}_1 = \vec{TS}_1$ ;  $\vec{p} = \vec{SS}_1$  ( $BD = y$ ;  $SD = x$ ,  $S_1B = z$  сынт проекцииле векторулуй  $\vec{p}$ , адикэ координателе пунктулуй  $S_1$ );  $\omega$  — витеза унгуларэ а векторулуй  $\vec{TS}$ , прин урмаре, ши а системулуй де координате мобил; мэримя  $\omega$  поате фи детерминатэ, дакэ есте куноскутэ периоада де ротации а сателитулуй ын журул Пэмынтулуй. Аич  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$ ;  $M$  есте маса Пэмынтулуй;  $m_1$  — маса сателитулуй  $S_1$ ;  $m$  — маса сателитулуй  $S$ ;  $\gamma$  — константа атракций универсале;  $g$  — акчелерация кэдерий либере спре Пэмынт ла дистанца  $r$  де ла центрул луй.


Сэ апликэм теорема динамикэ а луй Кориолис

$$m_1 \ddot{\vec{p}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_e + \vec{F}_k + \vec{\Phi}, \quad (30)$$

унде форца де атракцие дин партя Пэмынтулуй есте

$$\vec{F}_1 = - \frac{\gamma M m_1}{r_1^3} \vec{r}_1. \quad (31)$$

Форца де инерцие ын мишкаря де транспорт есте  $\bar{F}_e = -m_1 \bar{a}_e$ ; яр форца де инерцие а луй Кориолис  $\bar{F}_x = -m_1 \bar{a}_x$ ;  $\bar{\Phi}$  есте форца де акциуне асупра сателитулуй  $S_1$  дин партя диспозитивулуй де командэ (адикэ дин партя мотоарелор реактиве ку о форцэ де тракциуне релатив микэ, чей че не пермите сэ консидерэм маса  $m_1$  апроксиматив константэ).



$$\bar{a}_e = \bar{a}_s - \hbar\omega^2, \quad (32)$$

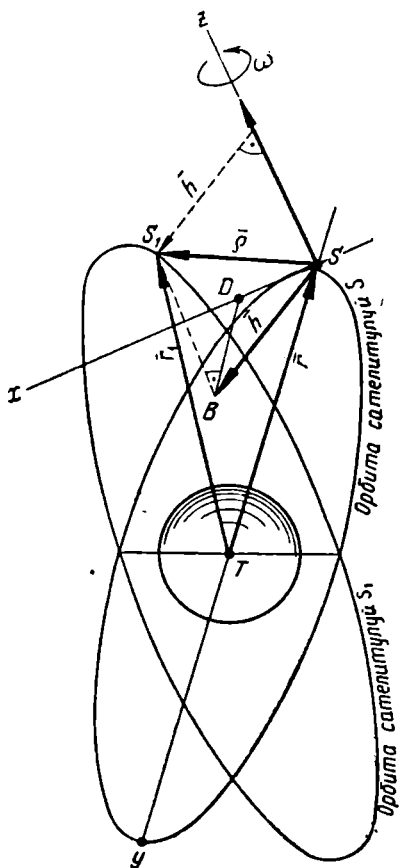
## Акчелерация луй Кориолис

унде  $\dot{r}$  ши  $\ddot{r}$  сынт деривателе  
локале, детерминате прин дерива-  
теле проекциилор векторулуй  $\dot{r}$   
пе акселе системулуй де коордо-  
нате мобил.

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{p}. \quad (33)$$

$$\bar{a}_s = -\bar{r}\omega^2.$$

Циньд конт де формулеле (34), (33), (32), (31), пентру екуация (30) обцинем



дин партя Пэмынтулуй, авынд ын ведере мишкаря луй пе орбита циркуларэ, суб форма

$$|\bar{F}| = \frac{\gamma M}{r^2} m = mg = m r \omega^2,$$

де унде

$$\gamma M = r^3 \omega^2. \quad (36)$$

Ын казул ачеста

$$\ddot{\bar{\rho}} = -\frac{r^3}{r_1^3} \omega^2 \bar{r} - \frac{r^3}{r_1^3} \omega^2 \bar{\rho} + \bar{r} \omega^2 + \bar{h} \omega^2 - 2(\bar{\omega} + \dot{\bar{\rho}}) + \frac{1}{m_1} \bar{\Phi} \quad (37)$$

сау

$$\ddot{\bar{\rho}} = -\omega^2 \left[ \left( \frac{r^3}{r_1^3} - 1 \right) \bar{r} + \frac{r^3}{r_1^3} \bar{\rho} \right] + \bar{h} \omega^2 - 2(\bar{\omega} + \dot{\bar{\rho}}) + \frac{1}{m_1} \bar{\Phi}. \quad (37')$$

Апой

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \left( \frac{r_1}{r} \right)^{-3} = \left( \frac{r_1^2}{r^2} \right)^{-3/2} = \left[ \frac{(\bar{r} + \bar{\rho})^2}{r^2} \right]^{-3/2} = \left( 1 + \frac{2\bar{r}\bar{\rho} + \bar{\rho}^2}{r^2} \right)^{-3/2}. \quad (38)$$

Терменул  $\frac{r^2}{r^2}$  поате фи неглижат, деоарече мэримя  $\rho$  есте микэ ын компарацие ку  $r$ . Продусул скалар поате фи экспримат прин проекциле векторилор  $\bar{r}$  ши  $\bar{\rho}$ . Вом авя

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \left[ 1 + \frac{2(r_x x + r_y y + r_z z)}{r^2} \right]^{-3/2}.$$

Ынсэ

$$r_x = 0, \quad r_y = -r, \quad r_z = 0.$$

Сэ десфэшурэм биномул ши сэ не мэржимин ку примий дой термень

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \left( 1 - \frac{2y}{r} \right)^{-3/2} = 1 + 3 \frac{y}{r}. \quad (39)$$

Субституим (39) ын (37') ши консидерэм ын экспресия факторулуй де пе лынгэ  $\bar{\rho}$ , кэ мэримиле  $r_1$  ши  $r$  сынт егале ынтре еле, адикэ  $\frac{r_1^3}{r^3} \approx 1$ . Ын ачест каз

$$\ddot{\bar{\rho}} = -3\omega^2 \frac{y}{r} \bar{r} - \omega^2 \bar{\rho} + \bar{h} \omega^2 - 2(\bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}) + \frac{1}{m_1} \bar{\Phi}. \quad (40)$$

Де аич, цинынд конт, кэ  $\bar{r} = -r\bar{j}$ ,  $\bar{h} = x\bar{i} + y\bar{j}$ , обцинем

$$\ddot{\bar{\rho}} = 3\omega^2 y \bar{j} - \omega^2 (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) + (x\bar{i} + y\bar{j})\omega^2 - 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} + \frac{1}{m_1} \bar{\Phi}, \quad (41)$$



унде  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  сынт версорий акселор системулуй де координате  $Sxyz$ .

Проектынд амбеле пэрць але экспресией (41) пе акселе ко-  
респунзэтоаре, обцинем екуацииле дифференциале але мишкэрий

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \frac{1}{m_1}\Phi_x; \quad \ddot{y} = 3\omega^2y - 2\omega\dot{x} + \frac{1}{m_1}\Phi_y; \\ \ddot{z} &= -\omega^2z + \frac{1}{m_1}\Phi_z.\end{aligned}\quad (42)$$

Дакэ сателиций ну сынт дирижаць, адикэ пентру  $\bar{\Phi}=0$ , екуа-  
ция (42) дескрие зборул космик либер. Екуация траекторией  
унуй асеменя збор поате фи обцинутэ интегринд екуацииле (42).  
Ын калитате де койдиций инициале але интегрэрий требуе сэ  
луэм координателе  $x_0, y_0, z_0$  але сателитулуй  $S_1$  ла ынчепутул  
мишкэрий де тречере ши проекцииле  $v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$  але витезей  
инициале де маневраре, адикэ а витезей сателитулуй  $S_1$  дупэ  
коректаря витезей орбитале а луй.

Ынсэ траектория зборулуй либер поате сэ ну адукэ ла  
ынтылниря сателицилор. Ын ачест каз есте посибил сэ алежем  
о аша програмэ де командэ, адикэ аша функций  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$ ,  
даторитэ кэрора поате фи обцинутэ апропиеря дефинитивэ. Ла  
дирижаре пот фи фолосите челе май диферите мижлоаче (радио-  
технике, оптиче ш. а.).

Ын партикулар, зборуриле космиче либере пот фи ефектуате  
ши ла зборуриле интерпланетаре де дистанце марь. Де екзем-  
плу, ын унеле варианте але зборулуй де ла Пэмынт спре Марте  
ши Венус корабия космикэ требуе сэ збоаре дупэ траекторий  
анумите, калкулате де кэтре Хоман ши Кроко (Hohmann,  
L. Crosso).

Ун екземплу де збор дирижат есте апропиеря стацией сове-  
тиче «Луна-9» де супрафаца Луней. Ын партикулар, реализа-  
ря ултимей етапе немижлочит ынаинте де аселенизаре а фост о  
проблемэ фоарте компликатэ. Ла ынэлцимья де 75 км де асупра  
пунктулуй де аселенизаре витеза стацией ера де 2600 м/сек  
(2,6 км/сек). Ын тимп де 48 сек ачастэ витезэ с'а микшорат пы-  
нэ ла зеро.

Пентру калкуларя системулуй де командэ а уней мишкэрь  
де ачест фел есте нечесар сэ резолвэм о проблемэ мулт май  
компликатэ, каре се реферэ ла механика корпулуй ку масэ ва-  
риабилэ ку мотоаре де фрьнаре, каре ау о форцэ маре де трак-  
циуне, кыт ши ла аутоматикэ. Ын проблемеле де ачест фел пот  
фи апликате ши методеле вариационале, уна дин каре есте ба-  
затэ пе принципиул луй Хамилтон.

**МИШКАРЯ ПУНКТУЛУЙ ДЕ МАСЭ ВАРИАБИЛЭ**

Ын техника модернэ се ынтылнесп аша казурь, кынд маса пунктулуй ши а системулуй механик ын тимпул мишкэрий ну рэмыне константэ, чи вариазэ. Де екземплу, ын казул зборулуй ракетелор космиче даторитэ елиминэрий продуселор ардерий ши а ынлэтурэрий пэрцилор инутиле але ракетелор вариация масей атинже 90—95% дин маса инициалэ тоталэ а ракетей. Дестул де мулт вариазэ маса авиоанелор реактиве модерне ын урма консумэрий комбустибилулуй даторитэ функционэрий мотоарелор, кыт ши ын алте казурь. Кяр ши ынтр'о аша рамурэ а техничий, ка индустрия текстилэ, ын кондицииле витезелор модерне але струнгурилоор ши машинилоор вариазэ мулт маса диферитор фусурь, сувейчь ши сулурь.

Сэ студием партикуларитэциле принципале, кондиционате де вариация масей, черчетынд мишкаря унуй пункт де масэ вариабилэ. Вом консидера пунктул де масэ вариабилэ дрепт ун пункт жеометрик де о масэ финитэ, каре вариазэ континуу ын тимпул мишкэрий. Ын локул пунктулуй путем консидера де асеменя ун корп де масэ вариабилэ, дакэ ел ефектуязэ о мишкаре де трансляцие.

**§ 1. ЕКУАЦИИЛЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЕ АЛЕ МИШКЭРИЙ ПУНКТУЛУЙ ДЕ МАСЭ ВАРИАБИЛЭ**

Лежя фундаменталэ а динамичий пунктулуй де масэ константэ ну поате фи апликатэ немижлочит ла пунктул де масэ вариабилэ.

Пентру а общине екуация диференциалэ а мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ вом рееши дин лежя индепенденцей акциуний форцелор ши дин теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а системулуй. Се штие, кэ форцеле, каре акцияязэ асупра пунктулуй материал, ый комуникэ акчелераций, че ну депинд де акциуния алтор форце. Ын казул пунктулуй де масэ вариабилэ афарэ де форца  $\bar{F}$ , апликатэ немижлочит ын ачест пункт, акцияязэ форце, че се наск даторитэ десприндерий партикулелор ку маса  $d'M$  де ла пунктул дат.

Сэ адмitem, кэ вариацииле витезей  $v$  а пунктулуй де масэ вариабилэ, кондиционате де акциуния форцей  $\bar{F}$  ши вариация масей пунктулуй, сынт индепенденте, сау вариация тоталэ а витезей  $d\bar{v}$  ын интервалул де тимп  $dt$  есте егалэ ку вариация витезей  $d\bar{v}_1$  ын урма акциуний форцей  $\bar{F}$  асупра пунктулуй де масэ константэ плус вариация витезей  $d\bar{v}_2$  кондиционатэ де вариация

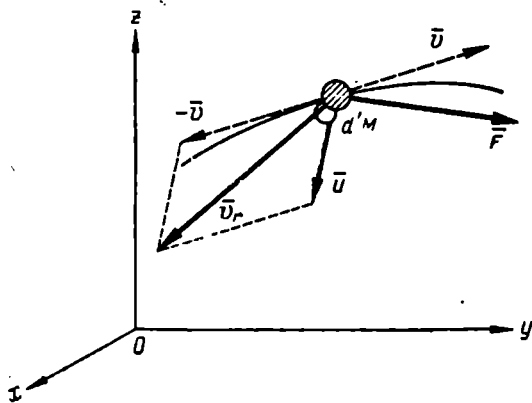
масей пунктулуй ын липса форцей  $\bar{F}$ . Аксиуня форцей  $\bar{F}$  асупра пунктулуй де масэ константэ ын интервалул де тимп  $dt$  про-  
воакэ вариация  $d\bar{v}_1$ , каре ын конформитате ку лежя фунда-  
менталэ а динамичий пунктулуй де масэ константэ, есте

$$d\bar{v}_1 = \frac{\bar{F}}{M} dt. \quad (1)$$

Вариация  $d\bar{v}_2$  а витезей пунктулуй ын интервалул де тимп  $dt$ , кондиционатэ де вариация масей луй ын липса акциуний форцей  $\bar{F}$ , поате фи детерминатэ пе база теоремей деспре ва-  
риация кантитэций де мишкаре а пунктулуй де масэ константэ.

Асупра системулуй механик, конституит дин пунктул де ма-  
сэ вариабилэ ши дин партикулеле деспринсе де дынсул, ну ак-  
ционязэ форце екстериоре, прин урмаре, кантитатя де миш-  
каре а луй есте о мэриме константэ. Форцеле интериоре де  
интеракциуне але пунктулуй ку партикулеле деспринсе ну моди-  
фикэ кантитатя де мишкаре а системулуй консидерат. Апли-  
кынд лежя консервэрий кантитэций де мишкаре ын интервалул  
де тимп де ла  $t$  пынэ ла  $t+dt$  авем

$$\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+dt}. \quad (2)$$



Фиг. 314.

Цинынд конт де интеракциуня динтре пунктул де масэ ва-  
риабилэ ши партикула ку маса  $d'M$ , деспринсэ де ачест пункт  
ын интервалул де тимп  $dt$ , ши неглижынд акциуня партикуле-  
лор деспринсе май ынаинте асупра пунктулуй де масэ вариabi-  
лэ ши а партикулей ку маса  $d'M$  (фиг. 314), обцинем

$$\bar{Q}_t = M \cdot \bar{v},$$

деоарече ын моментул  $t$  ера нумай ун пункт ку маса  $M(t)$ ,

каре се мишка ку витеза  $\bar{v}$  фацэ де системул де координате *Oxyz*.

Ын моментул  $t+dt$  авем пунктул ку маса  $M-d'M$  ши витеза  $\bar{v}+d\bar{v}_2$  ши партикула деспринсэ ку маса  $d'M$  ши витеза  $\bar{u}$  фацэ де ачелаш систем де координате *Oxyz*. Кантитатя де мишкаре а лор ын моментул  $t+dt$  есте

$$\bar{Q}_{t+dt} = (M - d'M) (\bar{v} + d\bar{v}_2) + \bar{u} \cdot d'M.$$

Егалынд кантитэциле де мишкаре ын конформитате ку (2), дупэ редучеря терменилор асемениа ши неглижаря терменилор де ординул дой де мичиме  $dM \cdot d\bar{v}_2$  ын компарацие ку термений де ординул ынтый де мичиме обцинем

$$d\bar{v}_2 = -\frac{d'M}{M} (\bar{u} - \bar{v}).$$

пентру  $d'M > 0$  сау, ынтродукынд семнул минус ын  $dM$  (ын ачест каз  $dM < 0$ ), авем

$$d\bar{v}_2 = \frac{dM}{M} (\bar{u} - \bar{v}). \quad (3)$$

Вариация тоталэ  $d\bar{v}$  а витезей есте

$$d\bar{v} = d\bar{v}_1 + d\bar{v}_2,$$

сау, цинынд конт де (1) ши (3),

$$d\bar{v} = \frac{\bar{F}}{M} dt + \frac{dM}{M} (\bar{u} - \bar{v}).$$

Ынмулцинд амбеле пэрць але ачестей екуаций ку  $M$  ши ымпэрцинду-ле ла  $dt$ , обцинем урмэтоаря формэ векториалэ а екуацией дифференциале а мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{dt} (\bar{u} - \bar{v}). \quad (4)$$

Екуация дифференциалэ (4) есте нумитэ екуация дифференциалэ а луй Мешчерский. Еа а фост дедусэ де ел ын анул 1897.

Дакэ легэм ку пунктул де масэ вариабилэ ун систем де координате мобил, каре ефектуязэ о мишкаре де трансляцие фацэ де системул де координате *Oxyz* атунч витеза абсолутэ  $\bar{u}$  а партикулей ку маса  $dM$ , каре с'а деспринс, ын конформитате ку теорема компунерий витезелор есте

$$\bar{u} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Ын казул консидерат  $\bar{v}_e = \bar{v}$ , прин урмаре витеза релативэ а партикулей деспринсе есте

$$\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}.$$

Субституиנד валoаря  $\bar{u} - \bar{v}$  ын (4), авем

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{dt} \bar{v}_r. \quad (4')$$

Дакэ нотэм  $\bar{\Phi}_r = \frac{dM}{dt} \bar{v}_r$ , атунч екуация (4') капэтэ форма

$$M \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi}_r. \quad (4'')$$

Мэримя  $\bar{\Phi}$ , есте нумитэ *форцэ реактивэ*. Мэримя  $\frac{dM}{dt}$

карактеризязэ вариация масей пунктулуй ынтр'о унитате де тимп, де екземплу, ынтр'о секундэ. Деачея форца реактивэ есте егалэ ку продусул вариацией масей пунктулуй ынтр'о секундэ прин витеза релативэ, ку каре партикулеле се деспринд де ла пунктул де масэ вариабилэ.

Дакэ ку тимпул маса пунктулуй се микшорязэ, атунч мэримя  $\frac{dM}{dt}$  есте негативэ; дакэ ынсэ маса пунктулуй креште, ачастэ мэриме есте позитивэ. Ла микшораря масей пунктулуй даторитэ десприндерий партикулелор де ла дынсул, форца реактивэ  $\bar{\Phi}_r$  есте ындрептатэ ын сенсул опус витезей релативе  $\bar{v}_r$ , а партикулелор че се деспринд. Ла крештеря масей пунктулуй мэримя  $\frac{dM}{dt}$  есте позитивэ, прин урмаре, форца реактивэ  $\bar{\Phi}_r$  есте ындрептатэ ын сенсул витезей релативе  $\bar{v}_r$ . Ын казул моторулуй реактив мэримя  $\frac{dM}{dt}$  есте негативэ ши есте егалэ ку консумул масей ынтр'о секундэ, яр  $\bar{v}_r$  есте витеза еширий газелор прин дуза моторулуй фацэ де мотор. Форца реактивэ, каузатэ де експулзаря газелор прин дузэ, есте форца де тракциуне а моторулуй, финнд ындрептатэ ын сенс опус витезей еширий газелор дин дуза моторулуй.

Проектынд амбеле пэрць але екуацией (4'') ле айселе системулуй ректангулар де координате картезиене, обцинем екуацииле диференциале але мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \Phi_{rx}, \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \Phi_{ry}, \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \Phi_{rz}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Дин (4'') ши (5) реесе, кэ екуацииле диференциале але мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ ау ачеш формэ ка ши ын

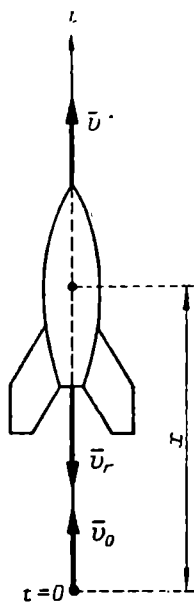
казул пунктулуй де масэ константэ, ку деосебиря, кэ асупра пунктулуй де масэ вариабилэ акционязэ суплиментар форца реактивэ, кондиционатэ де вариация масей пунктулуй.

Екуацинле диференциале але мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ се трансформэ ын екуацинле аналожиче але пунктулуй де масэ константэ атунч, кынд  $\frac{dM}{dt} = 0$ . Дин екуацинле диференциале але мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ пот фи дедусе теоремеле женерале але пунктулуй ши але системулуй де масэ вариабилэ, тот аша кум ау фост дедусе теоремеле кореспунзэтоаре ын казул пунктулуй ши а системулуй де масэ константэ.

## § 2. ПРОБЛЕМЕЛЕ ЛУЯ ЦИОЛКОВСКИЙ

Сэ консидерэм доуэ проблеме: мишкаря ректилиние а пунктулуй де масэ вариабилэ суб акциуня нумай а форцей реактиве, ши мишкаря вертикалэ а пунктулуй ын кымпул оможен ал форцей де греутатедин апропиеря супрафеей Пэмынтулуй. Пен-тру прима датэ ачесте проблеме ау фост черчетате де кэтре К. Е. Циолковский.

### Прима проблемэ а луй Циолковский



Фиг. 315.

Фие пунктул де масэ вариабилэ сау ракета се мишкэ ректилиниу ын спациу либер (дупэ терминология луй Циолковский) суб акциуня нумай а форцей реактиве. Сэ адмitem, кэ витеза релативэ  $\bar{v}_r$ , ку каре партикулеле се деспринд, есте константэ дупэ мэриме ши ын-дрептатэ ын сенсул опус витезей  $\bar{v}$  а пунктулуй де масэ вариабилэ (фиг. 315). Проект-ын-д ын ачест каз екуация (4'') пе акса  $Ox$ , ындрептатэ ын сенсул витезей пунктулуй, обцинем урмэтоаря екуацие диференциалэ а мишкэрий ректилиний а пунктулуй де масэ вариабилэ

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} v_r.$$

Сепарынд вариабилеле ши интегрынд амбеле пэрць але екуацией обцинуте, авем

$$\frac{1}{v_r} \int_{v_0}^v dv = - \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

унде  $v_0$  есте витеза инициалэ, ындрептатэ ын сенсул форцей реактиве,

яр  $M_0$  — маса инициалэ а пунктулуй.

Ын урма интегрэрий обцинем

$$v = v_0 + v_r \ln \frac{M_0}{M}. \quad (6)$$

Дакэ ын формула (6) субституим валориле мэримилор, че карактеризязэ сфыршитул ардерий комбустибилулуй, кынд маса пунктулуй (ракетей) есте егалэ ку маса  $M_p$  а корпусулуй ши утилажулуй ракетей, обцинем урмэтоаря експресие а витезей  $v_1$  ла сфыршитул ардерий комбустибилулуй

$$v_1 = v_0 + v_r \ln \left( 1 + \frac{m}{M_p} \right).$$

унде  $m$  есте маса комбустибилулуй.

Ынтродукынд нумэрул луй Циолковский  $Z + \frac{m}{M_p}$ , обцинем урмэтоаря формулэ а луй Циолковский

$$v_1 = v_0 + v_r \ln(1 + Z). \quad (7)$$

Дин формула луй Циолковский реесе, кэ витеза ла сфыршитул ардерий комбустибилулуй ну депинде де лежя ардерий, адикэ де лежя вариаций масей. Витеза ракетей ла сфыршитул ардерий поате фи мэритэ пе доуэ кэй. Уна дин ачесте кэй есте мэрия витезей релативе  $v_r$  а десприндерий партикулелор сау а витезей еширий газелор дин дуза моторулуй реактив ын казул ракетей.

Комбустибилеле кимиче модерне пермит о обцинере а витезей де ешире а газелор дин дуза моторулуй реактив де 2—2,3  $\frac{\text{км}}{\text{сек}}$ . Конструиря мотоарелор ку ионь ши ку фотонь пермите о мэрире консидабилэ а ачестей витезе. О алтэ калэ де мэрире а витезей ла сфыршитул ардерий комбустибилулуй констэ ын мэримя аша нумитулуй рекул де масэ сау де греутате а ракетей, адикэ мэрия нумэрулуй  $Z$ . Ын ракетеле модерне ку май мулте трепте нумэрул  $Z$  поате фи дестул де маре.

Пентру а афла екуация мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ сэ скрием формула (6) ын форма урмэтоаре

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + v_r \ln \frac{M_0}{M}$$

сау, сепарынд вариабилеле ши интегрынд, обцинем

$$x = v_0 t + v_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M} dt, \quad (8)$$

унде пентру  $t=0$  авем  $x=0$ .

Ын лукрэриле теоретиче, консакрате динамичий ракетелор, се студиязэ де обичей доуэ лежэ але вариацией масей—лежэ линиарэ ши лежэ экспоненциалэ. Ын казул лежий линиаре маса пунктулуй вариазэ ку тимпул ын фелул урмэтор:

$$M = M_0 (1 - \alpha t), \quad (9)$$

унде  $\alpha = \text{const}$  ( $\alpha$  есте консумул специфик), яр  $M_0$  есте маса пунктулуй ын моментул инициал.

Ын казул лежий экспоненциале вариация масей аре [лок дупэ формула

$$M = M_0 e^{-\alpha t}. \quad (10)$$

Эфектуынд ын (8) интеграря ын казул лежий линиаре (9) а вариацией масей, обцинем урмэтоаря екуацие а мишкэрий пунктулуй

$$x = v_0 t + \frac{v_r}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln (1 - \alpha t) + \alpha t]. \quad (11)$$

Дакэ маса вариазэ [дупэ лежэ экспоненциалэ (10), атунч авем

$$x = v_0 t + \frac{\alpha v_r t^2}{2}. \quad (12)$$

Сэ менционэм, кэ ын казул лежий линиаре (9) а вариацией масей дакэ  $v_r = \text{const}$ , атунч консумул масей ынтр'о секундэ

$$\left(-\frac{dM}{dt}\right) = \alpha M_0 = \text{const}$$

ши форца реактивэ

$$\Phi_r = \left(-\frac{dM}{dt}\right) v_r = \alpha M_0 v_r = \text{const}.$$

Ын казул лежий экспоненциале консумул масей ынтр'о секундэ ши форца реактивэ сынт вариабиле, ынсэ акчелерация  $a_r$  а пунктулуй де масэ вариабилэ, кондиционатэ нумай де форца реактивэ  $\Phi_r$ , есте константэ, адикэ

$$a_r = \frac{\Phi_r}{M} = \alpha v_r = \text{const}.$$

#### Проблема а доуэ а луй Циолковский

Дакэ пунктул де масэ вариабилэ (ракета) се мишкэ вертикал ын сус ын апропиеря супрафцей Пэмынтулуй (фиг. 315), атунч, консидерынд кымпул де гравитацие ал Пэмынтулуй оможен ( $g$  есте о мэриме константэ) ши неглижынд резистенца аерулуй, цинынд конт де асемения де пресупунериле реферитоаре



ла прима проблемэ а луй Циолковский, обцинем урмэтоаря екуа-  
ции дифференциалэ а мишкэрий пунктулуй

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} v_r.$$

Ын урма интегрэрий обцинем

$$v = v_0 - gt + v_r \ln \frac{M_0}{M}.$$

Пентру мэрия  $x$  ын функции де тимп, дакэ ка ши ын ка-  
зул примей проблеме а луй Циолковский мэсурэм  $x$  де ла по-  
зиция инициалэ а пунктулуй, обцинем формула урмэтоаре

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + v_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M} dt. \quad (13)$$

Дин (13) ын казул лежий линиаре (9) а вариацией масей  
обцинем

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{a} [(1 - at) \ln (1 - at) + at].$$

Ын казул лежий экспоненциале (10) а вариацией масей авем  
респектив

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{av_r t^2}{2}.$$


---

Префаиз	3
Витродучере	5

Объектул механикий ши импортанца ей пентру техника модернэ ши штинцеле натурий	5
--	---

## I СТАТИКА

Капитолул 1. Ноциунь, дефиниций ши аксиоме де базэ але статичий корпусулуй солид	
--	--

§ 1. Ноциунь ши дефиниций де базэ	9
§ 2. Аксиомеле статичий	11

## Капитолул 2. Системул де форце конкуренте

§ 1. Редучеря ла чел май симплу систем	19
§ 2. Кондицииле де екилибру	21

## Капитолул 3. Систем план де форце

§ 1. Моментул алжебрик ал уней форце ын рапорт ку ун пункт	28
§ 2. Редучеря а доуэ форце паралеле ла о резултантэ	29
Форце паралеле ориентате ын ачелаш сенс	29
Форце паралеле инегале ши де сенсуре контраре	31
§ 3. Куплурь де форце ын план	32
Куплул де форце ши моментул алжебрик ал куплулуй де форце	32
Теорема деспре сума моментелор алжебриче а форцелор унуй куплу	33
Теорема деспре екиваленца а доуэ куплурь де форце	34
Компунеря куплурилор де форце, ситуате ынтр'ун план	36
Кондицииле де екилибру але куплурилор де форце ситуате ынтр'ун план	38
§ 4. Редучеря унуй систем план де форце ла чел май симплу систем	39
Редучеря уней форце ынтр'ун четру дат	39
Редучеря унуй систем план де форце ла о форцэ ши ла ун куплу де форце	40
Кондицииле де екилибру але унуй систем план де форце	42
Казурь партикуларе де редучере а унуй систем план де форце	44
§ 5. Теорема деспре моментул уней форце резултанте (теорема луй Вариньон)	46
§ 6. Диферите форце де интерпретаре а кондициилор де екилибру а унуй систем план де форце	47
Теорема деспре трей моменте (а доуа формэ а кондициилор де екилибру	48
Форма а трей а кондициилор де екилибру	49
§ 7. Проблема статик детерминате ши статик недетерминате	51
§ 8. Екилибрул унуй систем де корпусь	52
§ 9. Форце репартизате	54
Форце паралеле де интенситате константэ, репартизате дупэ ун сегмент де дряптэ	55
Форце паралеле, репартизате дупэ ун сегмент де дряптэ, интен- ситатя кэзора вариязэ дупэ лежя линиаре	55
Реакциуня ынкастрэрий	57
§ 10. Резолвагя проблемелор ку привире ла екилибрул унуй систем план ла форце, апликаат унуй корп солид ши унуй систем де корпусь артикулате	58

## Капитолул 4. Фрекаря

§ 1. Фрекаря де алуекаре	64
Лежиле луй Кулон	66
Унгюл ши конул де фрекаре	67
Екилибрул унуй корп не о супрафацэ ку асперитэцэ	68
§ 2 Фрекаря де ростогаири	71

## Капитолул 5. Моментеле уней форце ын рапорт ку ун пункт ши ын рапорт ку о аксэ. Теория куплурило де форце ын спациу

§ 1. Векторул момент ал уней форце ын рапорт ку ун пункт	76
§ 2. Моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ	78
§ 3. Релация динтре моментул уней форце ын рапорт ку о аксэ ши векторул момент ал уней форце ын рапорт ку ун пункт, ситуат не аксэ	79
§ 4. Формуледе пентру моментеле уней форце ын рапорт ку акселе де координате	81
§ 5. Куплурь де форце ын спациу	82
Векторул момент ал унуй куплу де форце	82
Теорема деспре сума моментелор форцелор унуй куплу	84
Теорема деспре депласаря унуй куплу де форце ынтр'ун план паралел	85
Еквиваленца куплурило де форце	86
Компунеря куплурило де форце ын спациу	86
Кондицииле де екилибру але куплурило де форце ын спациу	89

## Капитолул 6. Редучеря системелор де форце ын спациу ла системе май симпле

§ 1. Редучеря унуй систем де форце ла о форцэ ши ла ун куплу де форце	91
Лема деспре депласаря паралелэ а уней форце ын спациу. Теорема де базэ а статичий	91
§ 2. Кондицииле де екилибру але унуй систем де форце ын спациу	95
Кондицииле де екилибру але унуй систем де форце ын формэ векториалэ	95
Кондицииле аналитиче де екилибру але унуй систем де форце ын спациу	95
Релацияиле динтре моментеле принципале але унуй систем де форце ын рапорт ку доуэ центре де редучере диферите	97
§ 3. Инварианций унуй систем де форце	99
§ 4. Казурь партикуларе де редучере а системелор де форце ын спациу ла системе май симпле	100
§ 5. Теорема луй Вариньон	106
§ 6. Казурь партикуларе де екилибру але унуй корп солид	106
Екилибрул унуй корп солид, каре аре ун пункт фикс	106
Екилибрул унуй корп солид ку доуэ пункте фиксе сау ку о аксэ фиксэ	107

## Капитолул 7. Системе де форце паралеле ын спациу

§ 1. Редучеря унуй систем де форце паралеле ын спациу ла ун систем май симплу	113
§ 2. Центрул унуй систем де форце паралеле	114

## Капитолул 8. Центрул де греутате ал корпурило

§ 1. Детерминаря центрулуй де греутате ал унуй корп	118
---	-----

§ 2. Методеле де детерминаре а центрулуй де греутате . . . . .	121
Чентреле де греутате але унор фигурь оможене симетриче . . . . .	121
Метода дивизэрий унуй корп ын пэрць . . . . .	121
Метода маселор негативе . . . . .	122
§ 3. Чентреле де греутате але унор корпурь симпле . . . . .	123
Чентрул де греутате ал арней унуй триунгъ ши ал унуй арк де черк . . . . .	123
Чентрул де греутате ал супрафцей унуй сектор де черк ши ал волумулуй унуй кон . . . . .	124

## II ЧИНЕМАТИКА

### Капитолул 1. Принципиале де базэ але чинематичий пунктулуй

§ 1. Диферите модуль де дефинире а мишкэрий пунктулуй . . . . .	131
Модул натурал де дефинире а мишкэрий унуй пункт . . . . .	132
Дефинире мишкэрий пунктулуй ын координате картезиене ректангуларе . . . . .	133
Модул векториал де дефинире а мишкэрий пунктулуй . . . . .	134
§ 2. Витеза . . . . .	134
Витеза медие ши витеза реалэ а унуй пункт . . . . .	134
Витеза унуй пункт ын координате картезиене ректангуларе . . . . .	137
Ходографул витезей . . . . .	137
§ 3. Акцелерация . . . . .	139
Акцелерация медие ши акцелерация реалэ а унуй пункт . . . . .	139
Акцелерация ын координате картезиене ректангуларе . . . . .	140
Дериваря унуй вектор констант дупэ модул . . . . .	141
Акцелерациле тангенциалэ ши нормалэ ал унуй пункт . . . . .	142
Мишкаря униформ вариатэ а унуй пункт . . . . .	146
§ 4. Витеза ши акцелерация пунктулуй ын координате поларе . . . . .	151

### Капитолул 2. Чинематика пунктулуй ын координате курбилинний

§ 1. Ноциуниле женерале . . . . .	155
§ 2. Детерминаря витезей унуй пункт ын координате курбилинний . . . . .	157
§ 3. Детерминаря акцелераций унуй пункт ын координате курбилинний . . . . .	158

### Капитолул 3. Челе май симпле мишкэрь але унуй корп солид

§ 1. Ноциунь женерале . . . . .	165
§ 2. Мишкаря де трансляcie а унуй корп солид . . . . .	166
§ 3. Ротация унуй корп солид ын журул уней аксе фиксе . . . . .	169
Дефиниция ши екуация де ротация . . . . .	169
Витеза угюларэ ши акцелерация угюларэ а унуй корп . . . . .	170
Мишкаря де ротация униформэ ши униформ-вариатэ а унуй корп . . . . .	171
Детерминаря витезелор ши акцелерацийлор пунктелор унуй корп, кэре се ротеште . . . . .	172
Витеза угюларэ ши акцелерация угюларэ ка векторь . . . . .	174
Експрессиле векториале але витезелор ши акцелерацийлор пунктелор унуй корп солид, кэре се ротеште . . . . .	174

### Капитолул 4. Мишкэриле компусе але унуй пункт

§ 1. Ноциунь де базэ . . . . .	178
§ 2. Теорема компунерий витезелор ын мишкаря компусэ а унуй пункт . . . . .	180
§ 3. Ун каз партикулар ал теоремей деспре компунеря акцелерацийлор . . . . .	182
Ноциунь деспре деривата локалэ ши деривата тоталэ а унуй вектор . . . . .	182
Ун каз партикулар ал теоремей деспре компунеря акцелерацийлор, кынд мишкаря де транспорт есте де трансляcie . . . . .	183

### Капитолул 5. Мишкаря планэ а унуй корп солид

§ 1. Екуация мишкэрий плане а унуй корп солид . . . . .	187
§ 2. Дескомпунеря уней мишкэрь плане а унуй корп солид ынтр'о мишкаре де трансляcie ши уна де ротация . . . . .	188

§ 3. Витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ а унуй корп ын миш- каря планэ	190
§ 4. Витезеле пунктелор унуй корп ын мишкаря планэ	190
§ 5. Центрул инстантанеу ал витезелор	192
§ 6. Калкуларя витезей унгуларэ ын мишкаря планэ	137
§ 7. Акчелерация пунктелор унуй корп ын мишкаря планэ	198
§ 8. Центрул инстантанеу ал акчелерациилор	201
§ 9. Методеле де базэ де калкуларэ а акчелерацией унгуларэ ын мишкаря планэ	206
§ 10. Теореме деспре депласаря финитэ а уней фигурь плане	210
§ 11. Центрул инстантанеу де ротация. Центроиделе	211

#### Капитолул 6. Ротация унуй корп солид ын журул унуй пункт фикс ши казул жєнерал де мишкаре а унуй корп

§ 1. Унгюриле луй Ейлер. Екуацииле де ротация а унуй корп ын журул унуй пункт фикс	214
§ 2. Теорема деспре депласаря финитэ а унуй корп ку ун пункт фикс	217
§ 3. Аюса инстантанеу де ротация. Аксойделе	218
§ 4. Витеза унгуларэ ши акчелерация унгуларэ ла мишкаря унуй корп ын журул унуй пункт фикс	219
§ 5. Витезеле пунктелор унуй корп ла мишкаря де ротация ын журул унуй пункт фикс	220
§ 6. Акчелерацииле пунктелор унуй корп ын мишкаря де ротация ын журул унуй пункт фикс	224
§ 7. Калкуларя акчелерацией унгуларэ	228
§ 8. Казул жєнерал де мишкаре а унуй корп солид либер Дескомпунеря мишкєрий унуй корп либер ынтр'о мишкаре де транслация ши уна де ротация	231
Екуацииле мишкєрий унуй корп солид либер	232
Витезеле ши акчелерацииле пунктелор унуй корп солид либер ын казул жєнерал	233

#### Капитолул 7. Теорема деспре компунеря акчелерациилор пентру ун пункт ын каз жєнерал

§ 1. Дедучеря релацией динтре деривата тоталэ ши чя локалэ (формула луй Бур)	236
§ 2. Теорема чинематикэ а луй Кориолис	238
§ 3. Методеле де конструкия ши де калкул а акчелерацией луй Кориолис	240
§ 4. Конструиря акчелерацией луй Кориолис дупэ метода луй Жуковский	241

#### Капитолул 8. Чинематика мишкєрилор компусе але унуй корп солид

§ 1. Компунеря мишкєрилор де транслация	245
§ 2. Компунеря мишкєрилор де ротация але унуй корп солид	247
Компунеря мишкєрилор инстантанеу де ротация але унуй корп ын журул акселор, че се интероектыэ ынтр'ун сингур пункт	247
Компунеря мишкєрилор де ротация инстантанеу а унуй корп ын журул акселор паралеле	249
§ 3. Компунеря мишкєрилор инстантанеу де транслация ши де ротация але унуй корп солид	255
Компунеря мишкєрий де ротация ку чя де транслация ын казул, кынд, витеза мишкєрий де транслация есте перпендикулярэ пе акса де ротация а корпулуй	255
Компунеря мишкєрилор де транслация ши де ротация але унуй корп пентру о дирекция арбитрарэ а витезей мишкєрий де транслация	256
	655

Казул жєнерал де редучере а уней тоталитєць де мишкєрь ар- битраре але унуй корп ла чя май симплє мишкарє. Аналожий статиче	257
Проприєтєцилє де базє але мишкєрий еликондалє а унуй корп	258
§ 4. Екуациилє чинематичє але луй Ейлєр	259

### III динамика

#### Капитолул 1. Принципиилє де базє але динамичий

§ 1. Аксиомелє динамичий	265
Прима аксиомє а динамичий (прима лежє а луй Ньютон)	266
Аксиома а доуа а динамичий (лежя а доуа а луй Ньютон)	266
Аксиома а трея а динамичий	267
Аксиома а патра а динамичий	268
§ 2. Системе де унитєць	269

#### Капитолул 2. Екуациилє диференциалє ши проблемелє де базє але динамичий пунктулуй материал

§ 1. Екуациилє диференциалє але мишкєрий пунктулуй материал	270
§ 2. Доує проблемє де базє але динамичий пунктулуй материал	273
§ 3. Фелурилє принципалє але мишкєрий ректилиний а пунктулуй мате- риал	279
§ 4. Мишкаря курбилиннє а пунктулуй материал	286
§ 5. Мишкаря пунктулуй материал супус ла легєтурь	292
Мишкаря пунктулуй пе о супрафацє	293
Мишкаря пунктулуй материал пе о курбє нетєдє	295

#### Капитолул 3. Динамика мишкєрий релативє а пунктулуй материал

§ 1. Екуациилє динамичє диференциалє але мишкєрий релативє а пунктулуй материал	300
§ 2. Казурь партикуларє але теоремєй динамичє а луй Кориолис	302
§ 3. Екземпле де апликаций але теоремєй динамичє а луй Кориолис	304
§ 4. Импондєрабилитатя	305

#### Капитолул 4. Жеометрия маселор

§ 1. Центрул маселор системулуй	309
§ 2. Моментє де инерциє	311
Дєфинициє ши формулє жєнералє	311
§ 3. Теорема дєопрє моментелє де инерциє ын рапорт ку акселє па- ралелє (теорема луй Штайнер)	313
§ 4. Моментелє де инерциє але челор май симплє корпурь оможєнє Бара	315
Дискул	315
Чилиндрул чиркулар дрепт	316
Сфера	317
§ 5. Дєтєрминаря моментулуй де инерциє ал корпулуй ын рапорт ку акса, карє трєчє прин пунктул дат ын дирекция консидєратє	318
§ 6. Еллипсоидул де инерциє	320
§ 7. Акселє принципалє де инерциє але корпурилор симєтричє	324
§ 8. Проприєтєцилє аксєй принципалє чєнтралє де инерциє а корпулуй	325

#### Капитолул 5. Теоремелє жєнералє але динамичий пунктулуй ши системулуй

§ 1. Унелє проприєтєць симплє але форцелор интериоарє але системулуй	328
§ 2. Екуациилє диференциалє але мишкєрий системулуй	329
§ 3. Теоремелє дєспрє вариация кантитэций де мишкарє ши дєспрє мишкаря центрулуй маселор	331
Кантитатя де мишкарє а пунктулуй ши а системулуй	331
Калкуларя кантитэций де мишкарє а системулуй	332
Импульсул елєментар ши тотал ал форцєй	333

Теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а унуй пункт материал	333
Теорема деспре вариация кантитэций де мишкаре а унуй систем	335
Лежи.ле консервэрий кантитэций де мишкаре	337
Теорема деопре мишкаря чентрулуй маселор системулуй	339
§ 4. Теорема деспре вариация моментулуй чинетик	344
Моментул чинетик ал унуй пункт ши ал унуй систем	344
Моментул чинетик ал унуй рижид ын мишкаря де ротации ын рапорт ку акса де ротации	346
Теорема деопре вариация моментулуй чинетик ал пунктулуй	346
Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем	347
Лежи.ле консервэрий моментелор чинетиче	348
Мишкаря унуй пункт суб акциуны форцей централе. Теорема ариилор	352
Витеза ареоларэ. Теорема ариилор	352
Мишкаря унуй пункт суб акциуны уней форце централе	354
Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем ын мишкаря релативэ фацэ де чентрул маселор	355
Формула моментулуй чинетик ал системулуй ын казал мишкэрий луй компусе	356
Теорема деопре вариация моментулуй чинетик ал унуй систем ын мишкаря релативэ фацэ де чентрул маселор	358
Теорема луй Резал	359
§ 5. Теорема деопре вариация енержіей чинетиче	360
Лукрул механик ал уней форце	360
Лукрул механик елементар ал уней форце	360
Лукрул механик тотал ал уней форце	363
Путеря	365
Екземпле де калкул але лукрулуй механик ал форцей	365
Лукрул механик ал форцей де греутате	366
Лукрул механик ал уней форце еластиче линиаре	367
Лукрул механик ал уней форце апликате ынтр'ун пункт оарекаре ал рижидулуй	368
Лукрул механик ал форцелор интериоаре але рижидулуй	371
Енержія чинетикэ	373
Енержія чинетикэ а унуй пункт ши а унуй систем	373
Калкуларя енержіей чинетиче а унуй оистем ын мишкаря компусэ	374
Енержія чинетикэ а унуй рижид	375
Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй пункт	376
Теорема деопре вариация енержіей чинетиче а унуй оистем	379
Теорема деопре вариация енержіей чинетиче ын мишкаря релативэ	384
Теорема деспре вариация енержіей чинетиче а унуй пункт материал	384
Теорема деопре вариация енержіей чинетиче а унуй систем	385
§ 6. Кымпул потенциал де форце	386
Кымпул потекциал де форце ши функция де форцэ	387
Супрафее екипотенциале. Линия де форцэ	389
Енержія потенциалэ	392
Екземпле де калкул ал функциилор де форцэ	393
Функция де форцэ а кымпулуй оможен ал форцей де греутате	393
Функция де форцэ а форцей еластиче линиаре	394
Функция де форцэ а форцей атракцией универсале	394
Функция де форцэ ши енержія потенциалэ а унуй систем де форце	396
§ 7. Лежя консервэрий енержіей механиче	397
Лежя консервэрий енержіей механиче а унуй пункт материал	397
Лежя консервэрий енержіей механиче а унуй систем	398

## Капитолул 6. Динамика мишкэрилор де базэ але рижидулуй

§ 1. Екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий де трансляции а рижидулуй	400
---	-----

§ 2. Екуация динамик диференциалэ а мишкэрий де ротацие а рижидулуй ын журул уней аксе фиксе	400
§ 3. Екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий план-паралеле а рижидулуй	404

## Капитолул 7. Базеле механикий аналитиче

§ 1. Ноциунь фундаментале	412
Объектул механикий аналитиче	412
Легэтурь	412
Класификаря легэтурилюр	413
Координателе жeneralизате	415
Депласэрь виртуале	417
Експримаря депласэрилюр виртуале прин координате жeneralизате.	
Легэтурь олономе	418
Депласэриле виртуале але системелор механиче ку легэтурь не-олономе	420
Лукрул механик виртуал ал форцей	421
Легэтурь идеале ши неидеале	422
Форце жeneralизате	423
§ 2. Принципиул депласэрилюр виртуале	427
Формуляря жeneralэ а принципиулуй депласэрилюр виртуале	427
Демонстраря пинчипиулуй депласэрилюр виртуале ын казул унуй сингур пункт материал	427
Казул легэтурий реономе	429
Принципиул депласэрилюр виртуале пентру системул де пункте материал	429
Кондицииле де екилибру, експримате прин форцеле жeneralизате	430
§ 3. Принципиул луй Даламбер	436
Принципиул луй Даламбер ын казул пунктулуй материал	436
Принципиул луй Даламбер ын казул системулуй де пункте материал	437
Проприетэциле форцелор де инершие	439
§ 4. Детерминаря реакциунилюр динамиче але рулменцилюр рижидулуй маре се ротеште ын журул уней аксе фиксе	445
§ 5. Екуация жeneralэ а динамичий (принципиул луй Даламбер—Лагранж)	451
Дедучеря екуацией жeneralэ а динамичий	451
Екземпле	453
§ 6. Екуацииле луй Лагранж де специа а доуа	456
Трансформаря екуацией жeneralэ а динамичий ынтро екуацие ын координате жeneralизате	457
Дедучеря екуацилюр луй Лагранж де специа а доуа	460
Структура екуацилюр луй Лагранж де специа а доуа	461
Екуацииле луй Лагранж ын казул форцелор потенциал	463
Координате чикличе ши интеграле чикличе	464
Интеграла енержий	465
§ 7. Екуацииле конониче	468
§ 8. Принципиул луй Хамилтон	471
§ 9. Системе механиче неоломе	474
Дедучеря екуацилюр луй Апол	474
Формула луй Кьониг пентру енергия акцелерацилюр	478
Екуацииле ку факторий недетерминаць ай луй Лагранж	479
Проблема луй Чаплыгин-Каратеодорн	481
Мишкаря унуй вагонет пе ун друм ректилиниу	488
Мишкаря уней сфере ын интериорул унуй чилиндру	490

## Капитолул 8. Теория осцилацилюр

§ 1. Осцилацииле армониче либере але пунктулуй материал	494
§ 2. Осцилацииле амортизате але пунктулуй материал	500



§ 3. Мишкарят периодикэ амортизатэ	508
§ 4. Осцилацииле форцате але пунктулуй материал ын липса резистенцей	510
§ 5. Осцилацииле форцате але пунктулуй материал ын презенца резистенцей	518
§ 6. Пендулуй математик ши чел физик	526
§ 7. Стабилитатэ екилибрулуй	532
Принципииле женерале	532
Теорема луй Лагранж — Дирихле	534
§ 8. Енергия чинетикэ ши чя потенциалэ а системулуй ку ун град ши ку доуэ граде де либертате	540
Енергия чинетикэ	540
Енергия потенциалэ	542
Форма патратикэ а доуэ вариабиле	543
§ 9. Осцилацииле мичь але унуй систем ку ун град де либертате	544
§ 10. Осцилацииле мичь але системулуй ку доуэ граде де либертате	547
Екуацииле диференциале але мишкэрий системулуй	547
Интеграря екуацилор диференциале але унуй систем	548
Теорема деспре радэчииле екуацией фреквенцелор. Казул фреквенцелор егале	552

### Капитолул 9. Динамика рижидулуй ку ун пункт фикс

§ 1. Карактеристичь динамиче	557
Моментул чинетик ал рижидулуй, каре се ротеште ын журул унуй пункт фикс	557
Енергия чинетикэ а рижидулуй ку ун пункт фикс	559
§ 2. Екуацииле динамиче диференциале але мишкэрий рижидулуй ын журул унуй пункт фикс	560
Екуацииле динамиче але луй Ейлер	560
Екуацииле динамиче але луй Ейлер пентру рижидул ку ун пункт фикс, каре се мишкэ суб акциуня форцей де греутате	562
Екуацииле луй Пуассон	564
§§ 3. Интеграря екуациилор мишкэрий	565
§ 4. Казул луй Ейлер	567
§ 5. Казул луй Лагранж	569
Екуацииле мишкэрий ши интеграря лор	569
Жироскопеле, каре се рестабилиеск де ла сине	572
Жироскопул астатик	575
§ 6. Детерминаря форцей де реакциуне ын пунктул фикс	576
§ 7. Ротацииле перманенте ши мишкэриле пендуларе але рижидулуй ку ун пункт фикс	578

### Капитолул 10. Теория жироскопулуй

§ 1. Теория апроксимативэ а жироскопулуй	580
Пресупунериале де базэ але теорией апроксимативе	580
Партикуларитэциле мишкэрий аксей жироскопулуй	581
Моментул жироскопик	583
Апликаций техниче але жироскопелор	585
Теория апроксимативэ а прочесиуний жироскопулуй греу	587
§ 2. Пречесуния регулатэ а жироскопулуй	589
Моментул жироскопик ла пречесуния регулатэ	589
Пречесуния регулатэ ын виртута инерцией	592
Пречесуния регулатэ а жироскопулуй греу	592
§ 3. Стабилитатэ ротацией жироскопулуй еквилибрат ын журул акселор	593
принципале де инерции	593
	659

## Капитолул 11. Теория чокнирилор

§ 1. Ноциунь жєнерале	596
§ 2. Акциуня форцей де чокнире асупра пунктулуй материал	598
§ 3. Теоремеле деспре вариация кантитэций де мишкарє ши деспре мишкарє чентрулуй маселор системулуй ла чокнире	599
§ 4. Теорема деспре вариация моментулуй чинетик ал системулуй ла чокнире	601
§ 5. Вариация витезей унгуларє а корпулуй, карє се ротеште ын журул уней аксе фиксе, ла чокнире	602
§ 6. Акциуня форцелор де чокнире асупра корпулуй, карє ефектуязэ о мишкарє план-паралелэ	603
§ 7. Теорема деспре вариация енержіей чинетичє а системулуй ла чокнире	604
Теорема луй Келвин	604
Теорема луй Карно пентру казул импунерий инстантанєє а легэтурилор идеале нееластичє	605
Теорема луй Карно пентру казул ынлэтуларий инстантанєє а легэтурилор стационаре	607
Теорема жєнералэ а луй Карно	608
§ 8. Чокниря пунктулуй ку о супрафакэ нетедэ фиксэ ши детерминаря експерименталэ а коэффициентулуй де реституирє	610
§ 9. Чокниря а доуэ корпурь	612
Чокниря обликэ	612
Чокниря центрикэ директэ а доуэ корпурь	613
Казурь партикулярє але чокнирий чентричє ши директє а доуэ корпурь	616
§ 10. Чентрул де чокнире	617
§ 11. Екземпле але феноменулуй де чокнире	621

## Капитолул 12. Елементе але космонаутичий

§ 1. Ноциунь фундаментале	629
§ 2. Интегралеле приме але екуациилор мишкэрий	631
§ 3. Детерминаря траекторий	632
§ 4. Черчетаря траекторий. Формулеле пентру витезеле космичє	634
§ 5. Апролиєря сателицилор дирижаць ай Пэмынтулуй	640

## Капитолул 13. Мишкаря пунктулуй де масэ вариабилэ

§ 1. Екуацииле диференциале але мишкэрий пунктулуй де масэ вариабилэ	644
§ 2. Проблемеле луй Циолковский	648
Прима проблемэ а луй Циолковский	648
Проблема а доуа а луй Циолковский	650

Владимир Васильевич Добронравов, Николай Никитич Никитин,  
Александр Лазаревич Дворников.

### КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

(на молдавском языке)

Редактор А. Морару, Е. Шкиопу. Редактор артистик Б. Брынзеи. Техноредактор Т. Арнополина. Коректор В. Стажило. Дат ла кулес 4/IV-1969. Искэлит пентру типар 14/I-1970. Форматул хыртней 60×90/16. Коль де типар 41,25. Коль едиториале 33,43. Тиражул 2 000. Прецул 1 руб. 09 коп. Команда 785. Едитура «Лумина», Кишинэу, стр. Горкий, 24.



Типография № 2 дин Кишинэу а Полиграфпромулуй ал Комитетулуй де Стат ал Советулуй Министрилор ал РСС Молдовенешть пентру прєсэ.



**1 руб. 09 коп.**

**ЛУМИНА \* 1970**