

vectors

(*) العامل التفاضلي للتجهات ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

(*) إذا أثر ∇ على دالة قياسية فإن الناتج يكون متجه :

$$f(x, y, z) \Rightarrow \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k}$$

(*) $\frac{\partial f}{\partial x}$ هو معدل تغير الدالة f عندما تتحرك في اتجاه x فقط ،
 y, z ثوابت

* * * * *

(*) تطبيقات ال grad ∇ :

① Directional derivative : المشتقة الاتجاهية

← وهو معدل تغير الدالة f عند النقطة P في
 اتجاه متجه الوحدة \underline{u}

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \underline{u}$$

المشتقة
 الاتجاهية

ضرب قياسي

متجه الوحدة



② Normal to surface : إيجاد المتجه العمودي على السطح

$$\text{Normal to surface} = \nabla f$$

إذا كانت معادلة السطح

$$f(x, y, z) = C$$

* * * * *

③ Greatest rate of change

المتجه الذي يحدد اتجاه التغير الأقصى :

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \underline{u} = |\nabla f| \cdot |\underline{u}| \cos \theta$$

* $|\underline{u}| = 1$ دائماً يساوي واحد لأنه متجه وحدة

* $\cos \theta = 1$ عندما $\theta = 0$

$$\therefore \text{greatest rate} = |\nabla f|$$

* * * * *



⊗ divergence :

⊗ عندما يؤثر ∇ على متجه على طريق الضرب القياسي ← ينتج كمية قياسية

Ex: $\underline{A} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$

$$\therefore \nabla \cdot \underline{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right) \cdot (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k})$$

$$\therefore \text{div } \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial a_1}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \underline{k}$$

⊗ إذا كان \underline{A} solenoidal $\text{div } \underline{A} = 0$ قيات :

* * * * *

⊗ عندما يؤثر ∇ على متجه على طريق الضرب الاتجاهي :

⊗ curl \Rightarrow الدوران

ينتج كمية متجهة

$$\text{curl} = \nabla \wedge \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

⊗ إذا كان \underline{f} is irrotational $\nabla \wedge \underline{f} = 0$ (غير دوراني)



* Example :- Find the angle between tangents of curve $\underline{v}(t) = t^2 \underline{i} + 2t \underline{j} + t^3 \underline{k}$ at points $t = \pm 1$

Solution

Calculation tangent $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = 2t \underline{i} + 2 \underline{j} + 3t^2 \underline{k}$

at $t = 1 \Rightarrow \underline{v}_1 = 2 \underline{i} + 2 \underline{j} + 3 \underline{k}$

at $t = -1 \Rightarrow \underline{v}_2 = -2 \underline{i} + 2 \underline{j} - 3 \underline{k}$

$$\cos \theta = \frac{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2}{|\underline{v}_1| \cdot |\underline{v}_2|} = \frac{(2 \underline{i} + 2 \underline{j} + 3 \underline{k}) \cdot (-2 \underline{i} + 2 \underline{j} - 3 \underline{k})}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-3)^2}}$$

* * * * *

* Example :- $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$

$w = yz + zx + xy$

Prove that ∇u , ∇v and ∇w are coplanar

Solution

هو موجود في نفس المستوى

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \underline{k} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$$

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \underline{k} = 2x \underline{i} + 2y \underline{j} + 2z \underline{k}$$

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \underline{k} = (z+y) \underline{i} + (z+x) \underline{j} + (x+y) \underline{k}$$

المatrix الثلاثي القياس

$$\nabla u, \nabla v, \nabla w \text{ are coplanar} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ z+y & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$$

$\nabla u, \nabla v, \nabla w$ are coplanar



⊗ **Example 2** Find the unit vector of Normal to the surface $x^2y + 2xz = 4$ at Point $P(2, -2, 3)$

Solution

∴ Normal to surface = ∇f

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k} = (2xy + 2z) \underline{i} + x^2 \underline{j} + 2x \underline{k}$$

at Point $P_5 (2, -2, 3)$

$$\therefore \text{Normal to surface} = -2 \underline{i} + 4 \underline{j} + 4 \underline{k}$$

$$\therefore \hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-2 \underline{i} + 4 \underline{j} + 4 \underline{k}}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{-1}{3} \underline{i} + \frac{2}{3} \underline{j} + \frac{2}{3} \underline{k}$$

unit normal

⊗ Find the values of A, B and C for sheet 2

the vector $\underline{r} = (x + y + az) \underline{i} + (bx + 3y - z) \underline{j} + (3x + cy + z) \underline{k}$

$(\underline{r} \cdot \nabla) \underline{r} = 0$ irrotational $\iff \nabla \wedge \underline{r} = 0$

Solution

∴ \underline{r} is irrotational ∴ $\nabla \wedge \underline{r} = 0$

$\nabla \wedge \underline{r}$	\underline{i}	\underline{j}	\underline{k}	
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$		$= 0$
$(x + y + az)$	$(bx + 3y - z)$	$(3x + cy + z)$		

$$\therefore (C+1) \underline{i} + (a-3) \underline{j} + (b-1) \underline{k} = 0$$

$$\therefore C = -1, a = 3, b = 1$$



⊛ show that the given vector field is solenoidal (cure)

$$\underline{V} = (x+3y)\underline{i} + (y-3z)\underline{j} + (x-2z)\underline{k}$$

Solution

$$\nabla \cdot \underline{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right) \cdot (V_1 \underline{i} + V_2 \underline{j} + V_3 \underline{k})$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \underline{V} = \text{div } \underline{V} = 0$$

$\therefore \underline{V}$ is solenoidal

* * * * *

⊛ ملحظة مهمة : كل المسائل التي أتت في الشرائح
بالإضافة لرقم ١ ، ٣ ، ٥ في الشريحة الثانية
رقم ١١ في الشريحة الأولى كل ذي مسائل مهمة

للأسف

