

UNIVERSITE HASSAN II-MOHAMMEDIA
FACULTE DES SCIENCES BEN M'SIK
CASABLANCA

CONTROLE DE PHYSIQUE STATISTIQUE I

(S_R, Année 2006, Durée 1h30)

Serie (1)

Question 1 : Rappeler les propriétés fondamentales de l'opérateur densité. Cet opérateur densité est-il un projecteur ?

Question 2 : Démontrer l'équation de Liouville-von Neumann satisfaite par l'opérateur densité : $i\hbar d\hat{D}/dt = [\hat{H}, \hat{D}]$.

Question 3 : Démontrer que l'évolution temporelle des éléments de matrice de l'opérateur densité est telle que :

$$D_{np}(t) = D_{np}(0) \times \exp \{-i(E_n - E_p)t/\hbar\}$$

Faire des commentaires.

trouver les population (les éléments diagonaux)

Question 4 : Démontrer l'équation de Liouville satisfaite par la densité en phase : $\partial D/\partial t = \{H, D\}$.

Question 5 : Quels sont les états accessibles d'un système à 3 spins 1/2 d'énergie donnée $E_0 = -\mu_B B$? Quelle est la dimension du sous-espace des états accessibles ?

Ecrire l'opérateur densité.



UNIVERSITÉ HASSAN II- MOHAMMEDIA
CASABLANCA
FACULTÉ DES SCIENCES BEN M'SIK
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
Année universitaire 2012/2013
Filières -SMP
Semestre 5 – Parcours Fondamental



Contrôle 1 Physique statistique
Mercredi 12 décembre 2012
Durée 1H

- 1- Rappeler la définition d'un état pur ou microétat.
- 2- Rappeler sans démonstration les propriétés de l'opérateur densité d'un état pur
- 3- Démontrer l'équation de Liouville-von Neumann $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$
- 4- Rappeler les conditions d'équilibre statistique
- 5- Démontrer que si deux parties A et B d'un même système sont statistiquement indépendantes, alors $\hat{D} = \hat{D}_A \otimes \hat{D}_B$ dans le cas quantique, et $D = D_A \times D_B$ dans le cas classique. *Produit tensoriel*
- 6- Rappeler la définition d'un état accessible. En donner un exemple.
- 7- Énoncer les trois postulats de la physique statistique.
- 8- Quelle est la conséquence de l'indépendance statistique
- 9- définir l'élément de volume de l'espace des phases. $d\tau$
- 10- Énoncer le théorème de Liouville relativement à l'évolution dans le temps de l'élément de volume de l'espace des phases.

Exercice 1

Soit un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω . On désigne par (q, p) l'état du système

- Quel est le sous-espace des états accessibles d'énergie inférieure à une valeur E_0 ?
- Même question pour une énergie supérieure à E_0 .

Exercice 2

On considère 4 spins $1/2$, dans un champ d'induction magnétique $\vec{B} // OZ$. Les énergies sont quantifiées:

$$E_m = -\mu_B B (m_1 + m_2 + m_3 + m_4); \quad m_i = \pm 1.$$

où μ_B est le magnéton de Bohr.

- Déterminer les états accessibles d'énergies égales à: $-3\mu_B B, 0, 3\mu_B B$.
- Déterminer les états accessibles d'énergies inférieures à: $-2\mu_B B, 0, 2\mu_B B$.

Exercice 3 Etude d'un système à deux spins

On considère un système composé de deux particules a et b de spin $1/2$. On désigne par $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, les états de polarisation individuels. Les états du système global sous-tendent alors un espace de Hilbert engendré par la base tensorielle à 4 éléments: $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$.

- Montrer que les valeurs possibles du moment magnétique total sont: $-2\mu_B, 0, 2\mu_B$. Ici, $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ est le magnéton de Bohr.
- On suppose que les deux spins a et b sont couplés dans l'état singulier

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Démontrer que l'opérateur densité global \hat{D} est donné par

$$\hat{D} = \frac{1}{2} (|+-\rangle\langle+-| - |+-\rangle\langle-+| - |-+\rangle\langle+-| + |-+\rangle\langle-+|)$$

Représenter cet opérateur matriciellement dans la base tensorielle.

~~Exercice 4~~ Soit un spin $1/2$ d'états $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ avec des probabilités p et q : telle que $p+q=1$. Donner l'expression de l'opérateur densité associé \hat{D}_1 :

Ex 4

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \quad \text{qui s'écrit aussi comme : } \hat{D}_1 = p|+\rangle\langle+| + q|-\rangle\langle-|.$$

2/ Considérons deux spins $1/2$ indépendants.

Démontrer que l'opérateur densité associé est:

$$\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

le système (deux particules) est s'écrit sous forme

Physique Statistique

Cas Quantique $\begin{cases} \rightarrow \text{Cas Pur} \\ \rightarrow \text{Cas Mélange} \end{cases}$

1) Cas Pur \Rightarrow Définir l'opérateur Densité $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$

$|\psi\rangle$ vecteur d'état

2) les Propriétés de $\hat{\rho}$ dans le cas Pur

$$\begin{cases} * \text{Tr } \hat{\rho} = 1 \\ * \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad (\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}^* = \hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} \text{ est hermitique} \\ * \hat{\rho} \geq 0 \\ * \hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad \hat{\rho} \text{ est un Projecteur.} \end{cases}$$

les Démonstrations

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{Tr } \hat{\rho} = 1 &\Rightarrow \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} (c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots) \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} |c_1|^2 & & & \\ & |c_2|^2 & & \\ & & |c_3|^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & |c_N|^2 \end{pmatrix} = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots + |c_N|^2 \\ &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 1 \quad \text{Wide Normalisation} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle = 1 &= (c_1^*, c_2^*, c_3^*, \dots) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = 1 \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \dots = 1 \end{aligned}$$

③ $\hat{\rho} \geq 0$ les éléments ≥ 0

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow A_{nn} = \langle U_n | A | U_n \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle U_i | \hat{\rho} | U_i \rangle &= \langle U_i | \psi \rangle \langle \psi | U_i \rangle = \langle U_i | \psi \rangle \langle U_i | \psi \rangle^* \\ &= |\langle U_i | \psi \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \Rightarrow \left(|\psi\rangle\langle\psi| \right)^2 = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1} \langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}$$

② Cas Pur Equation d'évolution de l'opérateur Densité
 Cas Mélange Equation de Liouville - von Neumann

Equation d'évolution de $\hat{\rho}$

Donne la loi d'évolution $\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$

$$\begin{array}{cc} \hat{\rho} & \hat{\rho}^* \\ \lambda & \lambda^* \\ A|\psi\rangle & \langle\psi|A^\dagger \\ A & A^\dagger \end{array}$$

~~$A < \psi |$~~

→ D'après l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

\hat{H} observable $\Rightarrow \hat{H}^\dagger = \hat{H}$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle\psi(t)| = \langle\psi(t)| \hat{H}$$

$$\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{d}{dt} \langle\psi(t)|$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \left(\frac{\hat{H} |\psi(t)\rangle}{i\hbar} \right) \langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle \left(\frac{\langle\psi(t)| \hat{H}}{i\hbar} \right)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$[A, B] = AB - BA$$

Cas Melange $\hat{\rho} = P_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + P_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \dots$
 $= \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

$$\hat{\rho} = \sum P_i \hat{\rho}_i$$

Q: la Probabilité d'avoir le système dans l'état $|\psi_i\rangle$
 les propriétés de $\hat{\rho}$ dans le cas d'un mélange

$$\text{tr} \hat{\rho} = 1 \Rightarrow \text{tr} (\sum P_i \hat{\rho}_i) =$$

$$\sum \text{tr} = \text{tr} \hat{E} = 1 \Rightarrow \text{tr} (A \cdot B) = \text{tr} A \cdot \text{tr} B$$

$$\Rightarrow \text{tr} (\sum P_i \hat{\rho}_i) = \sum \text{tr} P_i \hat{\rho}_i = \sum P_i (\text{tr} \hat{\rho}_i) = 1$$

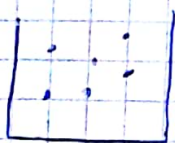
② $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ Dans le cas d'un mélange.

$$(\sum_k P_k \hat{\rho}_k)^2 = \sum_k P_k^2 \hat{\rho}_k^2 = \sum_k P_k^2 \hat{\rho}_k \neq \sum_k P_k \hat{\rho}_k$$

Donc $\Rightarrow \hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \Rightarrow \delta: \underline{\underline{P_k = P_k = 0 \text{ ou } 1}}$

Alors $\hat{\rho}$ n'est pas un projecteur.

I. Description Statistique des Systèmes



Espace de Phases

Classique

$$\mathcal{C} = \{\vec{q}, \vec{p}\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{q}} \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\vec{p} = m \dot{\vec{v}}$$



Quantique

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

$$\varphi = |\Psi|^2$$

\vec{q} les coordonnées généralisées
 \vec{p} les impulsions généralisées

Opérateur

Cas Pur



Cas Mélange Statistique

$\{P_k, |\Psi_k\rangle\}$ = Mélange Statistique Macro-état

Mélange Statistique est un ensemble des micro-états

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \rightarrow \text{l'opérateur Densité}$$

$$\hat{A} = \hat{H} / \hat{X} / \hat{P} / \hat{S} \dots$$

\rightarrow Cas Mélange $\hat{\rho} = \sum_{k=1}^N P_k \hat{\rho}_k$

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^N P_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|$$

$$\hat{\rho} = P_1 |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + P_2 |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| + P_3 |\Psi_3\rangle \langle \Psi_3| + \dots$$

Equation de Liouville Van-Neuman

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$$

$$\hat{\rho} = \sum_k P_k \hat{\rho}_k$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k P_k \hat{\rho}_k \right) = \sum_k P_k \left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}_k \right)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \sum_k P_k \frac{d}{dt} \hat{\rho}_k(t)$$

et d'après le cas I on a $i\hbar \frac{d\rho_k}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}_k(t)]$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \sum_k P_k \cdot \frac{[\hat{H}, \hat{\rho}_k(t)]}{i\hbar}$$

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \sum_k P_k [\hat{H}, \hat{\rho}_k(t)]$$

Rappel $\lambda[A, B] = [\lambda A, B] = [A, \lambda B]$

Donc $i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \sum_k P_k \hat{\rho}_k(t)]$

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$$

Question 3 $\rho_{np}(t) = P_{np}(t)$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$$

$\rho_{np} \Rightarrow$ les Coherences

$\rho_{nn} \Rightarrow$ les Populations

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Dnp ?? $i\hbar \frac{d}{dt} \langle U_n | \hat{\rho} | U_p \rangle = \langle U_n | [\hat{H}, \hat{\rho}] | U_p \rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{np}(t) = \langle U_n | \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} | U_p \rangle$$

Rappel $\vec{k} \cdot (\vec{C} - D\vec{C}) \vec{f}^0 = \vec{k} \cdot \vec{C} \vec{D} \vec{f} - \vec{k} \cdot D\vec{C} \vec{f}^0$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{np}(t) = \langle U_n | \hat{H} \hat{\rho} | U_p \rangle - \langle U_n | \hat{\rho} \hat{H} | U_p \rangle$$

Rappel \Rightarrow equation aux valeurs propres.

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \Rightarrow \hat{H} \text{ est hermitique}$$

$$\hat{H} | U_n \rangle = E_n | U_n \rangle \rightarrow \vec{v}_p$$

Matrice

$$\begin{aligned}
 \langle L_n | \hat{H} = E_n \langle L_n | \\
 i\hbar \frac{d}{dt} P_{np}(t) &= \langle L_n | E_n \hat{P}(t) | U_p \rangle - \langle L_n | \hat{P}(t) E_p | U_p \rangle \\
 &= E_n \langle L_n | \hat{P}(t) | U_p \rangle - E_p \langle L_n | \hat{P}(t) | U_p \rangle \\
 &= E_n P_{np} - E_p P_{np} = P_{np} (E_n - E_p)
 \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{d P_{np}(t)}{P_{np}(t)} = (E_n - E_p) dt$$

$$\int \frac{d P_{np}(t)}{P_{np}(t)} = \int \frac{-i}{\hbar} (E_n - E_p) dt + k$$

$$e(\ln P_{np}(t)) = e \left(\frac{i(E_p - E_n)}{\hbar} t + k \right)$$

$$P_{np}(t) = \exp \left(\frac{i(E_p - E_n)}{\hbar} t + k \right)$$

$$P_{np} = \exp \left(-\frac{i(E_n - E_p)}{\hbar} t \right) \exp(k)$$

$$P_{np}(t=0) = P_{np}(0)$$

$$P_{np}(t=0) = \exp(k) = P_{np}(0)$$

$$P_{np} = P_{np}(0) \exp \left(-\frac{i(E_n - E_p)}{\hbar} t \right)$$

$$\textcircled{D}_{np}(t) = D_{np}(0) \exp \left(-\frac{i(E_n - E_p)}{\hbar} t \right)$$

les populations $P(t)$ → les éléments diagonaux de la matriceⁿⁿ opérateur Densité

$$i\hbar \frac{d \hat{P}_{nn}}{dt} = [\hat{H}, \hat{P}]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle U_n | \hat{P} | U_n \rangle = \langle U_n | [\hat{H}, \hat{P}] | U_n \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} P_{nn} = \langle U_n | (\hat{H}\hat{P} - \hat{P}\hat{H}) | U_n \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} P_{nn} = \langle U_n | \hat{H}\hat{P} | U_n \rangle - \langle U_n | \hat{P}\hat{H} | U_n \rangle$$

$$H|U_n\rangle = E_n |U_n\rangle \Rightarrow \hat{H}\hat{P} = E_n \hat{P}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} P_{nn} &= E_n \langle U_n | \hat{P} | U_n \rangle - E_n \langle U_n | \hat{P} | U_n \rangle \\ &= E_n P_{nn} - E_n P_{nn} = 0 \end{aligned}$$

le population sont des Constantes

Micro-état classique

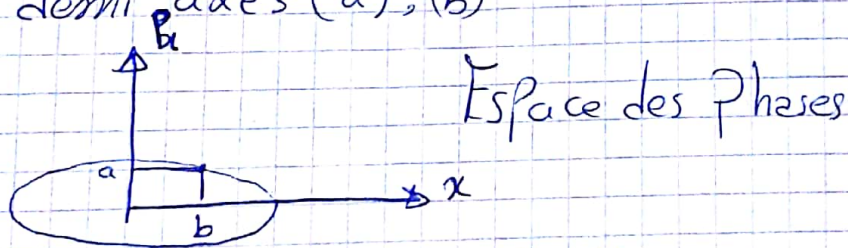
c'est un état parfaitement connu ~~classique~~ de $3N$ Coordonnées généralisées + $3N$ Impulsions généralisées soit une particule de masse d'énergie

$$E = E_0 = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \quad k = m \omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

l'énergie d'un oscillateur harmonique

$$\frac{P_x^2}{2m E_0} + \frac{1}{2} m \frac{\omega^2 x^2}{E_0} = 1$$

la forme de cette ~~ellipse~~ $\frac{P^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ l'équation d'une ellipse de demi-axes $(a), (b)$



les états ~~accessibles~~ accessibles d'un oscillateur dont l'énergie E_0 connu exact.

Micro-état

les états pur

les Complexions

les états accessibles suit une ellipse dans l'espace des phases.

Exercice ① (Série 2)

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{q^2}{2} m \omega^2 < E_0 \Rightarrow \frac{P^2}{2mE_0} + \frac{q^2}{2E_0} m \omega^2 < 1$$

$$\frac{P^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} < 1$$

les états accessibles sont à l'intérieur de l'ellipse de demi axe

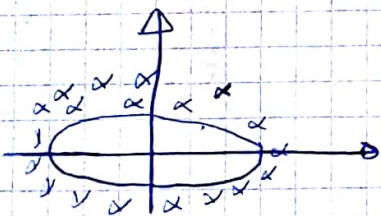
$$a = \sqrt{2mE_0} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \quad k = m\omega^2$$

la pulsation propre

la masse de la particule

$$E > E_0$$

les états situés à l'extérieur de l'ellipse



$$\frac{P^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} > 1$$

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{q^2}{2} m \omega^2 > E_0 \Rightarrow \frac{P^2}{2mE_0} + \frac{q^2}{2E_0} m \omega^2 > 1$$

Macro état Classique

Pour un système macroscopique les points qui le représentent d'une manière aléatoire

$$dP = D dZ$$

la Probabilité de trouver le point représentatif du système dans l'élément de volume de l'espace des phases dZ

dZ Élément de volume de l'espace des phases

$\rho = P$ Densité en phase Remplace l'opérateur Densité

$$dZ = \eta(N) \frac{1}{h^{3N}} \prod_{i=1}^{3N} d\vec{q}_i \cdot d\vec{p}_i$$

$\eta(N)$ facteur d'indistinguishabilité

$$\eta(N) = \begin{cases} \frac{1}{N!} & (\text{particule indistinguishable}) \\ 1 & (\text{particule distinguishable}) \end{cases}$$

$$d\tau = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \prod_{i=1}^N dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} dq_{xi} dq_{yi} dq_{zi}$$

$$d\tau = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \prod_{i=1}^N [dq_{xi} dq_{yi} dq_{zi} dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \cdot dq_{x2} dq_{y2} dq_{z2} \cdot dp_{x2} dp_{y2} dp_{z2} \cdot \dots]$$

$\eta(N)$ facteur d'indistinguishabilité $\rightarrow \frac{1}{N!}$
 h Constante de Planck

$\{dp_i, dq_i\}$ les Coordonnées Généralisées
 les impulsion Généralisées

↳ **théorème de Liouville** l'élément de volume de l'espace des Phases n'évolue pas en fonction de temps
 ↳ est resté constante lorsqu'on suit cette région d'une évolution

↳ ~~l'élément de volume de l'espace~~

Démonstration $d\tau \rightarrow d\tau' = J + d\tau$

$d\tau$ Élément de volume à l'instant t
 $d\tau'$ Élément de volume à $t + dt$

$d\tau' = J + d\tau$ Pour démontrer le théorème de Liouville.

il suffit de montrer que le Jacobien de la transformation est égale 1.

$$J = 1 + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \right) dt$$

D'après les équations d'Hom. Il en

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$J = 1 + \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right]$$

$$J = 1 + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) dt$$

on les grandeurs Physique Varie d'une manière

Continue $J = 1 + 0 = 1$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}$$

Quantique	Classique
$ \Psi\rangle$ ket	$\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\}$
\mathcal{E}_H	\mathcal{E}_P
Espace de Hilbert	Espace des phase.
$\hat{\rho} = \hat{D}$	$\rho = D$
Opérateur Densité	Dens. l'é en phase
$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$	$\frac{\partial D}{\partial t} = \{H, D\}$
tr	$\int dZ$
Observable (Matrice)	Grandeur Physique (fonction)
$\langle \hat{A} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{A}$	$\langle A \rangle = \int dZ D A$
la valeur d'une observable	la valeur moyenne d'un grandeur physique

le rôle de l'opérateur Densité pour calculer les valeurs
Densité pour calculer les valeurs moyennes observables
 $\rho(q, p, t)$

↳ Démonstration:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}$$

$$d\rho = \rho d\tau$$

$$\frac{d}{dt}(d\rho) = \frac{d\rho}{dt} \cdot d\tau + \rho + \frac{d}{dt}(d\tau) \quad \begin{matrix} \text{car ne varie pas} \\ \text{dans le temps} \end{matrix}$$

$$0 = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\{\rho, H\} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}$$

2) / mainly > 1
 Question 4 (Série 1)
 on veut Démontrer $\frac{\partial P}{\partial t} = \{H, P\}$

P = Densité en Phase

① \Rightarrow Equation d'évolution de Densité en Phase $P = D$

$f(x, y, z)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}$$

① $(\vec{q}, \vec{p}, t) = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots) (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots), t)$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial D}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial p_i} \dot{p}_i \right]$$

Pour $N=1$ (Nombre de Particule)

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial q_x} \dot{q}_x + \frac{\partial D}{\partial q_y} \dot{q}_y + \frac{\partial D}{\partial q_z} \dot{q}_z + \frac{\partial D}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial D}{\partial p_y} \dot{p}_y + \frac{\partial D}{\partial p_z} \dot{p}_z$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial D}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial D}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right]$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\}$$

Crochet de Poisson

$$\{D, H\} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial D}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$dP = D d\tau$$

$$\frac{d}{dt}(dP) = \frac{dD}{dt} d\tau + D \frac{d}{dt}(d\tau)$$

D'après theoreme de Liouville

$$0 = \frac{dD}{dt} d\tau \Rightarrow d\tau \neq 0 \text{ Donc } \frac{dD}{dt} = 0$$

$$0 = \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\} = \{H, D\}$$

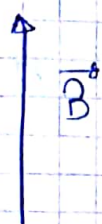
$$\frac{\partial D}{\partial t} = \{H, D\}$$

Quest. on 5:

les Fermions ont un spin Demi-entier
le Nombre de Possibilités Pour 3 Particule

$$N=3$$

$$2^N = 8$$



2^1 (Deux Microétats accessibles)

$2^N \Rightarrow$ le Nombre de Particule
 \Rightarrow le Nombre de Possibilité

$$2^N$$

le Nombre totale des états accessibles
Pour le spin.

$$E = -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \mu_B B$$

$\mu_i = 1 \Rightarrow$ (Particule i parallèle avec le champ magnétique)

$\mu_i = -1 \Rightarrow$ (Particule i ant. parallèle)

les Possibilités on peut donner (μ_1, μ_2, μ_3) Pour
vérifier $E = \mu_B B$

$$E = -\mu_B B(+1+1-1) \Rightarrow E = -\mu_B B$$

$$E = -\mu_B B(-1+1+1) \Rightarrow E = \mu_B B$$

$$E = -\mu_B B(1-1+1) \Rightarrow E = -\mu_B B$$

le Nombre des états accessibles dont l'énergie $E = -\mu_B B$
est 3

$$\Omega(E = -\mu_B B) = 3$$

la dimension du sous-espace \Rightarrow 3 dimensions

l'opérateur densité $\hat{\rho} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho$

$$\rho = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ |+, +, -\rangle, |+, -, +\rangle, |- , +, +\rangle \right\}$$

3 particules $|U_1\rangle = |+, +, -\rangle$ $|U_2\rangle = |+, -, +\rangle$ $|U_3\rangle = |- , +, +\rangle$

$$E = \sum_{i=1}^N \eta_i \mu B$$

→ Energie de N spins dans un champ magnétique

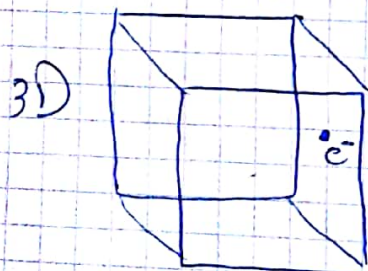
$$E = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)$$

→ Energie d'une particule dans une boîte (libre)

$$E = \hbar \omega (\eta_x + \eta_y + \eta_z + \frac{3}{2})$$

→ Energie d'un oscillateur harmonique en 3D

Boîte (libre)



$$E = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)$$

Puit infini



$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

Exercice 2 Serie 2

$$E_m = -\mu_B B (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \quad m_i = \pm 1$$

a/ le Nombre totale des états accessible $2^4 = 16$

$|++++>$ $|+++-->$, $|++-+->$ $|+-+++>$
 $|---++>$ $|---->$, $|+-+-->$ $|+--++>$
 $|+-+-->$ $|--+--+>$, $|--++->$ $|---+->$
 $|+---+>$ $|+-+-->$, $|+--+-->$ $|+--+-->$

$$E = -3\mu_B \quad E = -\mu_B (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

↳ 0 état d'énergie $E = -3\mu_B$

$E = 0$ = 6 état correspond à $E = 0$

Pour $E = 3\mu_B$ 0 état correspond à $E = 3\mu_B$

b/ Pour $E < -2\mu_B$

$$E = -\mu_B (+1 + 1 + 1 + 1) = -4\mu_B$$

↳ Un état $\{++++\}$

* Pour $E < 0$

$\{++++\}$, $\{+++--\}$, $\{++-+-\}$, $\{+-+++ \}$, $\{---++\}$

↳ 5 états

Pour $E < 2\mu_B$

* Pour $E < 2\mu_B$

$\{++++\}$ $\{++--\}$ $\{+-+--\}$ $\{+-+--\}$ $\{--++\}$
 $\{---++\}$ $\{+-+--\}$ $\{+-+--\}$ $\{+-+--\}$ $\{--++\}$
 $\{--++\}$

11 états dans l'énergie $E < 2\mu_B$

Exercice 4

$$\hat{D}_1 = P|+\rangle\langle+| + q|-\rangle\langle-|$$

$$\langle+|\hat{D}_1|+\rangle = P\langle+|+\rangle + q\langle+|-\rangle = P$$

$$\langle+|\hat{D}_1|+\rangle = P$$

$$\langle-|\hat{D}_1|-\rangle = q$$

autre méthode $\hat{D}_1 = P|+\rangle\langle+| + q|-\rangle\langle-|$

$$|U_1\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|U_2\rangle = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D}_1 = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

2) l'opérateur densité de système e

le produit tensoriel $\Rightarrow \hat{D} = \hat{D}_1 \otimes \hat{D}_2$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} & q \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Pq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qP & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

Quest. cor de Cours

Démonstration de Produit tensoriel. $\hat{D} = \hat{D}_A \otimes \hat{D}_B$

sous $\begin{array}{|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \hline A & B \\ \hline \end{array} \in \mathcal{E}_H \quad \mathcal{E}_H = \mathcal{E}_H^A \otimes \mathcal{E}_H^B$

① sous système A

② sous système B

A et B sont statistiquement indépendants

$\{|\Psi_\alpha^A\rangle, P_\alpha^A\} =$ Mélange statistique de sous système A

$\{|\Psi_\beta^B\rangle, P_\beta^B\} =$ Mélange statistique de sous système B

$|\Psi_{\alpha\beta}^{AB}\rangle = |\Psi_\alpha^A\rangle \otimes |\Psi_\beta^B\rangle = |\Psi_\alpha^A, \Psi_\beta^B\rangle$
l'état produit tensoriel.

Statistiquement indépendante $\Rightarrow P_{\alpha\beta}^{AB} = P_\alpha^A \cdot P_\beta^B$

l'opérateur densité de sous système A

$\hat{D}_A = \sum_\alpha P_\alpha^A |\Psi_\alpha^A\rangle \langle \Psi_\alpha^A|$

avec $\hat{D}_A = \hat{P}_A = \sum_\alpha$

$\hat{D}_B = \sum_\beta P_\beta^B |\Psi_\beta^B\rangle \langle \Psi_\beta^B|$ l'opérateur densité de sous système B

l'opérateur Densité totale :

$\hat{D}_{AB}^{AB} = \hat{D} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^{AB} |\Psi_{\alpha\beta}^{AB}\rangle \langle \Psi_{\alpha\beta}^{AB}|$

$\hat{D}_{AB}^{AB} = \sum_{\alpha,\beta} P_\alpha^A P_\beta^B (|\Psi_\alpha^A\rangle \otimes |\Psi_\beta^B\rangle) \cdot (\langle \Psi_\alpha^A| \otimes \langle \Psi_\beta^B|)$

$(|\Psi_\alpha^A\rangle \otimes \langle \Psi_\beta^B|) (\langle \Psi_\alpha^A| \otimes \langle \Psi_\beta^B|) =$

$= (|\Psi_\alpha^A\rangle \langle \Psi_\alpha^A| \otimes |\Psi_\beta^B\rangle \langle \Psi_\beta^B|)$

$$\hat{1} = \sum_{\alpha, \beta} \hat{P}_\alpha^A \hat{P}_\beta^B [|\Psi_\alpha^A\rangle \langle \Psi_\alpha^A| \otimes |\Psi_\beta^B\rangle \langle \Psi_\beta^B|]$$

$$= \sum_{\alpha} \hat{P}_\alpha^A |\Psi_\alpha^A\rangle \langle \Psi_\alpha^A| \otimes \sum_{\beta} \hat{P}_\beta^B |\Psi_\beta^B\rangle \langle \Psi_\beta^B|$$

$$\hat{1} = \hat{1}_A \otimes \hat{1}_B$$

$\hat{1} = \hat{1}_A \otimes \hat{1}_B$ cas classique

↳ Demonstration *traitement classique*

$$dP_A = D_A dZ_A \quad dP_B = D_B dZ_B$$

$$dP_{AB} = dP_A \cdot dP_B \text{ (statistiquement indépendante)}$$

$$\hookrightarrow dZ_A = \frac{\eta(N_A)}{h^{SA}} \prod_{i=1}^{SA} dP_i^A dQ_i^A$$

$$dZ_B = \frac{\eta(N_B)}{h^{SB}} \prod_{j=1}^{SB} dP_j^B dQ_j^B$$

$$dZ_{AB} = \frac{1}{h^{SA+SB}} \eta(N_A) \eta(N_B) \prod_{i,j} dQ_i^A dQ_j^B dP_i^A dP_j^B$$

$$dZ_{AB} = \frac{1}{h^{SA}} \eta(N_A) \prod_{i=1}^{SA} dQ_i^A dP_i^A \cdot \frac{1}{h^{SB}} \eta(N_B) \prod_{j=1}^{SB} dQ_j^B dP_j^B$$

$$dZ_{AB} = dZ_A \cdot dZ_B$$

$$dP_{AB} = D_{AB} dZ_{AB}$$

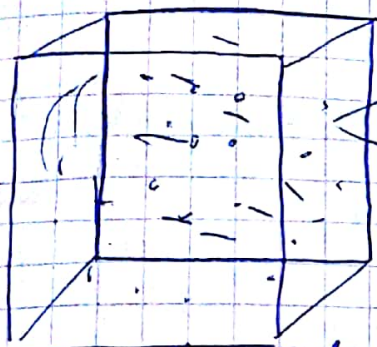
$dP \Rightarrow$ la Probabilité de trouver le point représentatif de système dans l'élément de volume dZ_{AB}

$$\Omega_A \Omega_B = \Omega_{AB} d\tau_A d\tau_B$$

$$\Omega_A \Omega_B = \Omega_{AB} d\tau_A d\tau_B$$

$$\Omega_{AB} = \Omega_A \cdot \Omega_B$$

Soit une Boite de volume V Contenant N Particule sans interaction (gaz parfait)

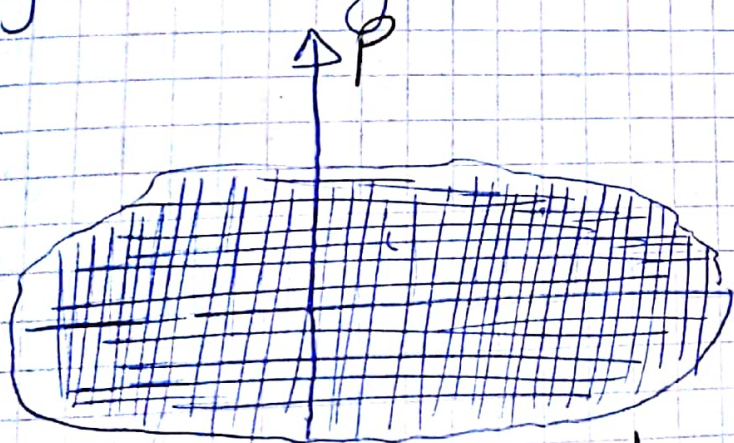


$$H = E = \frac{h^2 \pi^2}{2ma^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)$$

$$E_T = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$$

$$E_T = \sum_i \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

trouver le Nombre de Microetat accessible dont l'energie est inferieur ou egale a une valeur $E = E_0$



la surface d'une cellule elementaire $S = \Delta q \Delta p =$ le Nombre

$$\Omega = \int \delta q \delta p \Rightarrow h$$

desennable On peut faire la difference entre les particules

indesennable On ne peut pas faire la difference entre les particules.

Le gaz parfait classique
(les interactions entre les particules sont nulles)

$$E_0 = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{p_{\alpha}^2}{2m}$$

$$E_0 = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{p_{\alpha x}^2 + p_{\alpha y}^2 + p_{\alpha z}^2}{2m}$$

$$E_0 = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^{3N} \left[p_{\alpha x_1}^2 + p_{\alpha y_1}^2 + p_{\alpha z_1}^2 + p_{\alpha x_2}^2 + p_{\alpha y_2}^2 + p_{\alpha z_2}^2 + \dots \right]$$

En generale

$$\Omega = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \int_V \int_E \frac{1}{N!} d\vec{q}_{\alpha} d\vec{p}_{\alpha}$$

le Nombre de micro-état accessibles pour un gaz parfait

classique Dans l'espace des phases

$$\Omega = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \frac{1}{N!} \int_V \frac{1}{N!} d\vec{q}_{\alpha} \int_E \frac{1}{N!} d\vec{p}_{\alpha}$$

$$\Omega = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} I \cdot J$$

$$I = \int_V \frac{1}{N!} dq_{\alpha x} dq_{\alpha y} dq_{\alpha z}$$

$$= \int dq_{\alpha 1} dq_{\alpha 2} dq_{\alpha 3} \dots dq_{\alpha N}$$

$$\int_V dq_{\alpha} dq_{\beta} dq_{\gamma} = V = L^3$$

$$\text{Alors } \int_V \frac{1}{N!} dq_{\alpha 1} dq_{\alpha 2} dq_{\alpha 3} \dots dq_{\alpha N} = \frac{V^N}{N!}$$

il nous rest à evaluer l'integrale des impulsions

$$J = \int_E \frac{1}{N!} dp_{\alpha x} dp_{\alpha y} dp_{\alpha z}$$

$$\sqrt{2m E_0} = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha x}^2 + p_{\alpha y}^2 + p_{\alpha z}^2$$

$$\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha x}^2 + p_{\alpha y}^2 + p_{\alpha z}^2 = R^2$$

Pour N=1

C'est une equation d'un 3^e

$$V_P = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\int_V dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$

car $dx_1 dx_2 dx_3 = dP d\Omega r^2 dr$

on veut calculer le volume d'une sphere en 3N Dimensions

le Nombre de microetat accessible

$$\Omega = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \int_{E < E_0} dP$$

on s'agit d'un gaz parfait

$$2mE = \sum_{\alpha=1}^N P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

$$2mE = P_{x1}^2 + P_{y1}^2 + P_{z1}^2 + P_{x2}^2 + P_{y2}^2 + P_{z2}^2 + \dots$$

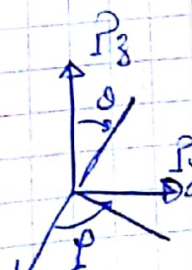
c'est l'equation d'une sphere dans l'espace des impulsions a 3N Dimensions $D = 3N$

$$V = \int \prod_{\alpha=1}^N dP_{x\alpha} dP_{y\alpha} dP_{z\alpha}$$

$$= \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)^N = \left(\frac{4}{3} \pi (2Em)^{3/2} \right)^N$$

Pour une seule particules

$$\sqrt{2mE} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

$$R^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$


$$V_P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{R(E)} r^2 dr$$

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi (2Em)^{3/2}$$

Donc finalement

le Nombre de Microetat accessible

$$\Omega = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \left(\frac{4}{3} \pi \right)^N (2mE)^{3N/2}$$

volume de la boîte

Serie 3

Exercice 1

Particule libre a se deplacer a l'interieur d'une boîte

Cubique de cote L

Boîte (Déplacement en 3D)

libre a se deplacer

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m}$$

$\Omega(E)$ le volume de l'espace des Phases

$$\Omega(E) = \int_V dq_x dq_y dq_z \int_E dP_x dP_y dP_z$$

$$E_P = \{ \{ q \} \{ P \} \}$$

$$\sqrt{2mE_0} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \sqrt{2Em}^{3/2}$$

$$\Omega(E) = \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \int_0^L dx_3 = \frac{4}{3} \pi (2mE)^{3/2}$$

$$= L^3 \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE_0)^{3/2}$$

le volume accessible dans l'espace des phases

Portion dans une Boite (L^3)

$$(\delta q \delta p)^3 = L^3$$

$$\Omega(E) = L^3 \frac{4}{3} \pi (2Em)^{3/2}$$

Portion dans une surface L^2

$$(\delta q \delta p)^2 = L^2 \pi (2Em) \rightarrow \pi R^2$$

$$b) \phi(E) = \frac{\Omega(E)}{h^3} = \frac{\Omega(E)}{(\delta q \delta p)^3}$$

Seule particule

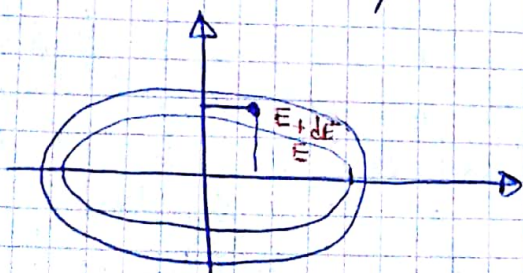
Le facteur de proportionnalité

$$\alpha = \frac{1}{h^3} = \frac{1}{(\delta q \delta p)^3}$$

Le Nombre de Micro. état accessible
= $\frac{\text{le volume accessible}}{\text{le volume d'une cellule.}}$

c. Le Nombre de Micro état accessible dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$

Exemple
Oscillateur harmonique



$$L \phi(E) = \bar{\omega}(E) = \phi(E + dE) - \phi(E)$$

Rappel

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x$$

$$\omega(E) = \phi(E) + \frac{d\phi(E)}{dE} \Delta E - \phi(E)$$

$$\omega(E) = \frac{d\phi(E)}{dE} \Delta E$$

$$\phi(E) = \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2Em)^{3/2}$$

$$\omega(E) = \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2m)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2} \Delta E$$

avec $\frac{dE^{3/2}}{dE} = \frac{3}{2} E^{1/2}$

$$\omega(E) = \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2m)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2} \Delta E$$

$$\omega(E) = \frac{L^3}{h^3} \frac{4}{3} \pi (2mE)^{3/2} \frac{3E^{-1}}{2} \Delta E$$

D'où

$$\omega(E) = \frac{3}{2} \phi(E) \frac{\Delta E}{E}$$

$$\omega(E) = K \frac{\phi(E)}{E}$$

$$K = \frac{3}{2} \Delta E$$

fonction de proportionnalité

le Nombre de Micro-états accessible par unité de volume

$$\phi_L = \frac{\phi(E)}{L^3} = \frac{4}{3} \frac{1}{h^3} (2mE)^{3/2}$$

Donner $\omega(r)$ en fonction de Nombre de Micros-états accessible par Unité d'énergie

$$\omega(r) = K \rho(E)$$

$$\text{avec } \rho(E) = \frac{\phi(E)}{E}$$

$$2) N \propto \omega^{2/3}$$

\propto Proportionnelle

$$\omega(E) = \frac{d\phi(E)}{dE} \Delta E$$

$$\phi(E) = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \Omega \int_{E \alpha=1}^{\frac{3N}{2}} d\vec{p}_\alpha$$

$$V_n = C_n R^n \text{ avec } n = \underbrace{3N}_{3 \text{ dim. par particule}} \underbrace{N}_{\text{particule}}$$

$$V_{3N} = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!} R^{3N}$$

$$V_{3N} = \int_E \prod_{\alpha=1}^N d\vec{p}_\alpha d\vec{p}_\alpha d\vec{p}_\alpha$$

$$\phi(E) = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \Omega \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!} (2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

$$\omega(r) = \frac{\eta(N)}{h^{3N}} \Omega^N \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!} (2m)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N}{2}} \Delta E$$

$$\omega(r) = C E^{\frac{3N}{2}-2} \Delta E$$

$$S = k_B \log \omega = -k_B \frac{1}{T} \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{NR}$$