UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES DE TETOUAN
Pr A. Djebli

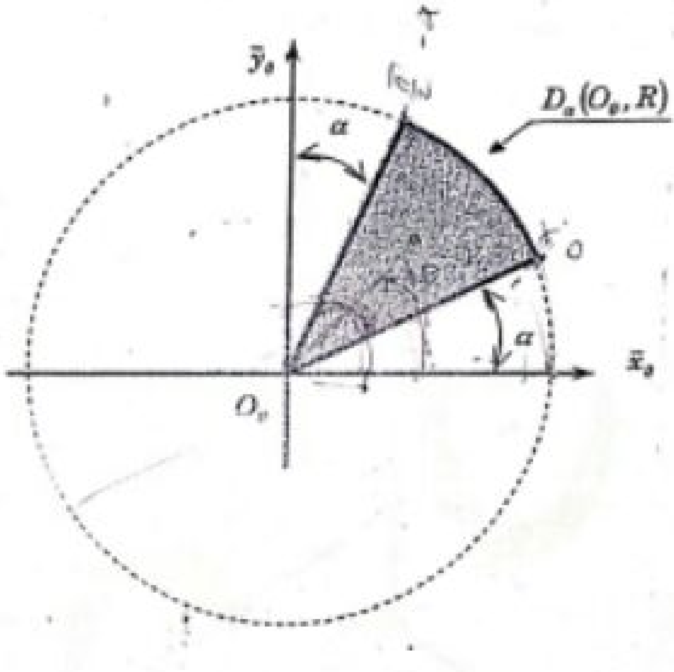
Année 2015/2016

Filière SMPC
Contrôle de Mécanique

I. (8 points)

On considère dans le repère $\Re_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ de base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le solide $D_\alpha(O_0,R)$ de masse m et de centre d'inertie G; partie d'un disque, homogène, de centre O_0 et de rayon R, définie par l'angle α comme le montre la figure.

1. Donner l'expression de la masse m en fonction de la densité surfacique σ de $D_\alpha(O_0,R)$.
2. Calculer dans la base $\mathcal{B}_0$ les coordonnées x_G , y_G et z_G de G.
3. Calculer dans la base $\mathcal{B}_0$ les matrices $\Pi_{\mathcal{B}_0}(D_\alpha,O_0)$ et $\Pi_{\mathcal{B}_0}(D_\alpha,G)$



II. (12 points)

Soit $\Re_0(O_0,\mathcal{B}_0)$ un repère de référence avec $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. On considère un système mécanique $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ composé d'une tige homogène (AB) solide parfait S_1, de masse m_1 de longueur l_1, et de deux roues solide parfait S_2 et S_3 de même masse m et de même rayon externe R, articulées aux extrémités de la tige en A et B (centre de masse de S_2 et S_3). Le solide S_1 est articulé à l'axe $(O_0,\vec{z}_0)$ en un point $C \in S_1$ avec $\overline{O_0C} = R\vec{z}_0$ et $\overline{AC} = l_2\vec{z}_1$, $\overline{BC} = -l_3\vec{z}_1$ où l_2 et l_3 sont constantes. On désigne par $\Re_1(C,\mathcal{B}_1)$, $\Re_2(A,\mathcal{B}_2)$ et $\Re_3(B,\mathcal{B}_3)$ trois repères liés respectivement à S_1,

G centre de masse de S_1

S_2 et S_3 où $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$, $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. Le solide S_1 est repéré par l'angle θ, S_2 et S_3 par φ et ψ (voir figure) et on note I et J les points de contact supposé permanent des solides S_2 et S_3 avec le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Le système Σ est libre de tourner autour de l'axe $(O_0, \vec{z}_0)$. On donne :

$$\Pi_{\mathcal{B}_1}(S_1, C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \quad \text{et} \quad \Pi_{\mathcal{B}_1}(S_2, B) = \Pi_{\mathcal{B}_1}(S_3, A) = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

(on ne demande pas de calculer les coefficients de ces deux matrices)

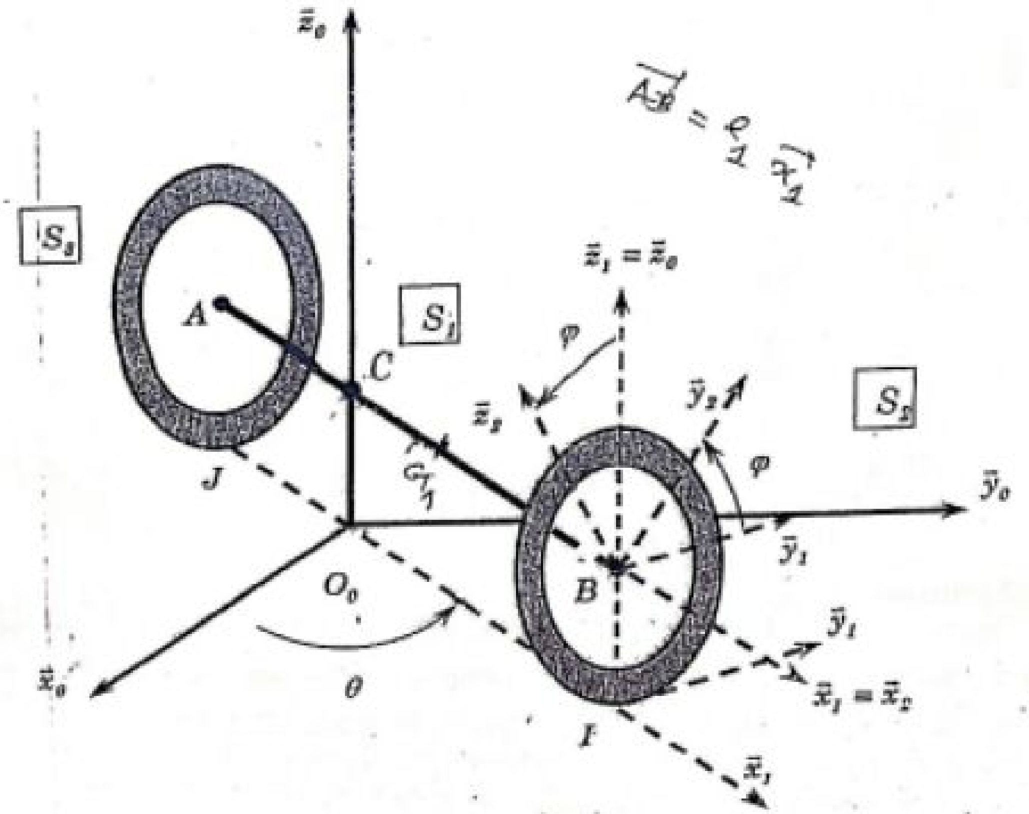
Tous les résultats sont à exprimer dans la base ; $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

1. Donner au point C les torseurs $\mathcal{T}_V(S_1/\mathfrak{R}_0)$ et $\mathcal{T}_c(S_1/\mathfrak{R}_0)$ et $\mathcal{T}_d(S_1/\mathfrak{R}_0)$.

3. Donner au point B les torseurs $\mathcal{T}_V(S_2/\mathfrak{R}_0)$, $\mathcal{T}_c(S_2/\mathfrak{R}_0)$ et $\mathcal{T}_d(S_2/\mathfrak{R}_0)$.

4. Donner les expressions de $T(S_1/\mathfrak{R}_0)$ et $T(S_2/\mathfrak{R}_0)$ (énergie cinétique).

5. Calculer la vitesse de glissement de S_2 par rapport à $\mathfrak{R}_0(O_0, \mathcal{B}_0)$ et donner la condition de roulement sans glissement de S_2.



Exercice 1 :

(1) on sait que $dm = \sigma ds = \sigma r dr d\theta$

$$\Rightarrow m = \sigma \int_0^R r dr \cdot \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\theta = \sigma \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Rightarrow m = \frac{\sigma R^2}{4}(\pi - 4\alpha)$$

(2) soit $P \in D_\alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{O_0P} = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$; $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$, $0 \leq r \leq R$

$\overrightarrow{O_0G} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0$ avec $\begin{cases} z_G = 0 \Rightarrow \boxed{z_G = 0} \\ x_G = \frac{1}{m} \int_{P \in D_\alpha} x\, dm \\ y_G = \frac{1}{m} \int_{P \in D_\alpha} y\, dm \end{cases}$

par raison de symétrie $x_G \Leftrightarrow y_G$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\sigma}{m} \int_0^R r^2 dr \cdot \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \cos(\theta) d\theta = \frac{\sigma}{m} \left(\frac{R^3}{3}\right) \cdot \left[\sin\theta\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}$$

$$x_G = y_G = \frac{\sigma}{3m} R^3 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\alpha)\right)$$

$$\boxed{x_G = y_G = \frac{4}{3} R \frac{(\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}{(\pi - 4\alpha)}}$$

(3) $$\Pi_{O_0}(D_\alpha, O_0) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$P \in D_\alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{O_0P} = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$; $0 \leq r \leq R$, $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$

$z=0 \Rightarrow E=D=0$ et $C=A+B$

$$A=\int_{P\in D_\alpha} y^2 dm = \sigma\int_0^R r^3 dr \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sigma R^4}{8}\left[\theta-\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \frac{\sigma R^4}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{2}-\alpha+\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{4m}{R^2(\pi-4\alpha)}\cdot\frac{R^4}{8}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{mR^2}{4}$$

$$B=\int_{P\in D_\alpha} x^2 dm = \sigma\int_0^R r^3 dr \cdot \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$B=\frac{4m}{R^2(\pi-4\alpha)}\cdot\frac{R^4}{8}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \frac{mR^2}{2(\pi-4\alpha)}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{2}-\alpha-\frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)$$

$$B=\frac{mR^2}{2(\pi-4\alpha)}\frac{(\pi-4\alpha)}{2} \Rightarrow B=\frac{mR^2}{4} \Rightarrow C=\frac{mR^2}{2};$$

$$F=\sigma\int_0^R r^3 dr \cdot \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \cos\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{\sigma R^4}{4}\left[-\frac{\cos^2(\theta)}{2}\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha}$$

$$F=\frac{\sigma R^4}{8}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^2(\alpha)\right)=\frac{\sigma R^4}{8}\left(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\right)$$

$F=$

$$\overline{\Pi}_{B_0}(D_{\alpha}, S_0) = \overline{\Pi}_{B_0}(D_\alpha, C_1) + \overline{\Pi}_{B_0}(C_1, S_0)$$

$$\overline{\Pi}_{B_0}(D_\alpha, C_1) - \overline{\Pi}_{B_0}(D_\alpha, \theta_0) - \overline{\Pi}_{B_0}(C_1, \theta_0)$$

T(AB) de masse m_1 et de longueur l_1

$\overrightarrow{O_0C} = R\vec{z}_0^{\,0}$ et $\overrightarrow{AC} = l_2\vec{x}_1^{\,0}$, $\overrightarrow{BC} = -l_3\vec{x}_1^{\,0}$

(1) Torseur cinématique de S_1/R_0 au point C :

$$\mathcal{T}_V(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}^0(S_1/R_0) \\ \vec{V}^0(C/R_0) \end{bmatrix}_{C\in S_1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_C$$

(2) Torseur cinétique :

$$\mathcal{T}_\sigma(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} m_1\vec{V}^0(G_1/R_0) \\ \vec{\sigma}_C(S_1/R_0) \end{bmatrix}_{C\in S_1}$$

$\vec{V}^0(G_1/R_0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O_0G_1}}{dt}\right|_{R_0}$ où $\overrightarrow{O_0G_1} = \overrightarrow{O_0C} + \overrightarrow{CG_1}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{G_1B} \Rightarrow l_1\vec{x}_1^{\,0} = L_2\vec{x}_1^{\,0} + \overrightarrow{CG_1} + \dfrac{l_1}{2}\vec{x}_1$

$\overrightarrow{CG_1} = \dfrac{l_1}{2}\vec{x}_1^{\,0} - L_2\vec{x}_1^{\,0}$

$\overrightarrow{CG_1} = \left(\dfrac{l_1}{2} - l_2\right)\vec{x}_1^{\,0}$

autre méthode :

$\overrightarrow{CG_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_1}$

$= -l_2\vec{x}_1^{\,0} + \dfrac{l_1}{2}\vec{x}_1$

$\overrightarrow{CG_1} = \left(\dfrac{l_1}{2} - l_2\right)\vec{x}_1^{\,0} \Rightarrow \overrightarrow{O_0G_1} = R\vec{z}_0^{\,0} + \left(\dfrac{l_1}{2} - l_2\right)\vec{x}_1^{\,0}$

$$\frac{d\overrightarrow{O_0G_1}}{dt}\Big/_{R_0} = \left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big/_{R_0} = \left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{x}_1$$

$$= \left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\dot{\theta}\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_C(S_1/R_0) = \Pi_{B_1}(S_1, C)\,\vec{\Omega}(S_1/R_0) + m_1\overrightarrow{CG_1} \wedge \vec{V}(C/R_0)$$

C est fixe $/R_0 \Rightarrow \vec{V}(C/R_0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_C(S_1/R_0) = \Pi_{B_1}(S_1, C)\,\vec{\Omega}(S_1/R_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}_{B_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} = I\dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_\sigma(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} m_1\left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ I\dot{\theta}\vec{z}_1 \end{bmatrix}_{C \in S_1}$$

Torseur dynamique :

$$\mathcal{Z}_\delta(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} m_1\vec{\gamma}(G_1/R_0) \\ \vec{\delta}_C(S_1/R_0) \end{bmatrix}_{C \in S_1}$$

$$\vec{\gamma}(G_1/R_0) = \frac{d\vec{V}(G_1/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} = \left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right)$$

$$\vec{\delta}_C(S_1/R_0) = \frac{d\vec{\sigma}_C(S_1/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} + \underbrace{m_1\vec{V}(C/R_0) \wedge \vec{V}(G_1/R_0)}_{=0}$$

$$\vec{\delta}_C(S_1/R_0) = I\ddot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_\delta(S_1/R_0) = \Big[\, m_1\left(\frac{\ell_1}{2} - \ell_2\right)\left(\ddot{\theta}\vec{y}_1 - \dot{\theta}^2\vec{x}_1\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_c(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} m\, l_3 \dot\theta \vec{y_1} \\ J\dot\varphi \vec{x_1} + K\dot\theta \vec{z_1} \end{bmatrix}_{B\in S_2}$$

* Torseur dynamique : $\mathcal{Z}_D(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} m\vec{\gamma}(B/R_0) \\ \vec{\delta}_B(S_2/R_0) \end{bmatrix}_{B\in S_2}$

* $\vec{\gamma}(B/R_0) = \dfrac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\Big|_{R_0} = l_3(\ddot\theta \vec{y_1} - \dot\theta^2 \vec{x_1})$

* $\vec{\delta}_B(S_2/R_0) = J(\ddot\varphi \vec{x_1} + \dot\varphi\dot\theta \vec{y_1}) + K\ddot\theta \vec{z_1}$

$= \dfrac{d\vec{\sigma}_B(S_2/R_0)}{dt} + \overbrace{m\vec{V}(B/R_0) \wedge \vec{V}(\underset{=G}{B}/R_0)}^{=0}$

Donc $\mathcal{Z}_D(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} m\, l_3(\ddot\theta \vec{y_1} - \dot\theta^2 \vec{x_1}) \\ J(\ddot\varphi \vec{x_1} + \dot\varphi\dot\theta \vec{y_1}) + K\ddot\theta \vec{z_1} \end{bmatrix}_{B\in S_2}$

4) Energie cinétique de S_1/R_0 :

$2T = \mathcal{Z}_V(S_1/R_0)\, \mathcal{Z}_c(S_1/R_0)$

$= \begin{bmatrix} \dot\theta \vec{z_1} \\ 0 \end{bmatrix}_{C\in S_1} \begin{bmatrix} m_1\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right)\dot\theta \vec{y_1} \\ I\dot\theta \vec{z_1} \end{bmatrix}_{C\in S_1}$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I \dot\theta^2 \vec{z_1}}$

* Energie cinétique de S_2/R_0 :

$2T = \mathcal{Z}_V(S_2/R_0)\, \mathcal{Z}_c(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} \dot\varphi \vec{x_1} + \dot\theta \vec{z_1} \\ l_3\dot\theta \vec{y_1} \end{bmatrix}_{B\in S_2} \begin{bmatrix} m\, l_3 \dot\theta \vec{y_1} \\ J\dot\varphi \vec{x_1} + K\dot\theta \vec{z_1} \end{bmatrix}_{B\in S_2}$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\left(J\dot\varphi^2 + K\dot\theta^2 + m\, l_3^2 \dot\theta^2\right)}$

5) $\vec{V}_g(S_2/R_0) = \vec{V}(I\in S_2/R_0) - \vec{V}$

$= \vec{V}(B\in S_2/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \vec{BI}$

$= l_3\dot\theta \vec{y_1} + \begin{Bmatrix} \dot\varphi \\ 0 \\ \dot\theta \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{Bmatrix}$

$= l_3\dot\theta \vec{y_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \vec{V}_g(S_2/R_0) = (l_3\dot\theta + R\dot\varphi)\vec{y_1}$

* le cont' de roulement sans glissement

$\vec{V}_g(S_2/R_0) = \vec{0} \Rightarrow l_3\dot\theta + R\dot\varphi = 0$

$l_3\theta(t) + R\varphi(t) = cte.$

$$\mathcal{T}_v(S_2|R_0) = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/R_0) \\ \vec{V}(B|R_0) \end{bmatrix}_{B\in S_2}$$

IMAD

$$\vec{\Omega}(S_2|R_0) = \vec{\Omega}(S_2|R_1) + \vec{\Omega}(R_1|R_0)$$

$$\vec{\Omega}(S_2|R_0) = \dot{\varphi}\vec{x_1} + \dot{\theta}\vec{z_1}$$

$$\vec{V}(B/R_0) = \frac{d\vec{O_0B}}{dt}\Big/_{R_0}$$

$$\vec{O_0B} = \vec{O_0C} + \vec{CB} = R\vec{z_0} + l_3\vec{x_1}$$

$$\vec{V}(B/R_0) = l_3\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big/_{R_0} = l_3\,\vec{\Omega}(S_1/R_0)\wedge\vec{x_1}$$

$$= l_3\,\dot{\theta}\vec{z_1}\wedge\vec{x_1}$$

$$\boxed{\vec{V}(B/R_0) = l_3\,\dot{\theta}\vec{y_1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_v(S_2|R_0) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\vec{x_1} + \dot{\theta}\vec{z_1} \\ l_3\,\dot{\theta}\vec{y_1} \end{bmatrix}_{B\in S_2}$$

Torseur cinétique de S_2/R_0 au point B :

$$\mathcal{T}_C(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} m\vec{V}(B/R_0) \\ \vec{\sigma}_B(S_2/R_0) \end{bmatrix}_{B\in S_2}$$

où $\vec{\sigma}_B(S_2/R_0) = \Pi_{B_1}(S_2,B)\,\vec{\Omega}(S_2/R_0) + \underbrace{m\,\vec{BB}\wedge\vec{V}(B/R_0)}_{=0}$

$$= \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{B_1} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} = J\dot{\varphi}\vec{x_1} + K\dot{\theta}\vec{z_1}$$