

# Mértékelmélet vázlat

1.0. Jelölések, elnevezések, megállapodások . . . . .	1
1.1. Félgyűrű, gyűrű, $\sigma$ -algebra és monoton osztály . . . . .	2
1.2. Mértéktér és legegyszerűbb tulajdonságai . . . . .	4
1.3. Mérhető függvények . . . . .	6
1.4. Nem negatív lépcsős függvény integrálja . . . . .	9
1.5. Nem negatív mérhető függvények integrálja . . . . .	11
1.6. Mérhető függvény integrálja . . . . .	13
1.7. A Fubini-tétel . . . . .	16
1.8. A Caratheodory-féle kiterjesztési eljárás . . . . .	19
1.9. Lebesgue-mérték . . . . .	23
1.10. A Lebesgue-mérték regularitásának következményei . . . . .	26
1.11. Az $L_p$ Lebesgue-terek . . . . .	27
1.12. Kis funkcionál analízis a Radon-Nikodym tételhez . . . . .	30
1.13. Lebesgue felbontási tétele és a Radon-Nikodym-tétel . . . . .	32
1.14. Jordan és Hahn felbontási tételei . . . . .	35

## Tárgymutató

abszolút folytonos mérték, 13	Fubini-tétel, 16, 25, 26	mérhető függvény, 7
algebra, 3	Hölder-egyenlőtlenség, 27	mérték, 4
Beppo-Levi-tétel, 11, 17, 33, 35	Hilbert-tér, 30	Minkowski-egyenlőtlenség, 27
Borel-halmaz, 6	Jensen-egyenlőtlenség, 27	monoton osztály, 3
Burokoperáció, 2	Jordan-mérték, 6	von Neumann, 33
Caratheodory-kiterjesztés, 22	külső mérték, 19	Newton-Leibnitz-tétel, 26
Caratheodory-mérhetőség, 20	Lebesgue felbontási tétele, 33	Radon-Nikodym-tétel, 33
Dynkin-tétel, 3	Lebesgue-mérhető halmaz, 25	Riesz felbontási tétele, 31
Dynkin-tétel, 17	Lebesgue-mérték, 25	Riesz reprezentációs tétele, 32
előjeles mérték, 4, 6, 13, 32	Lebesgue-tétel, 14, 15, 17	Riesz-Fischer-tétel, 28, 34
félgyűrű, 2	$L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ terek, 28	szinguláris mérték, 33
	$l_p$ terek, 29	Vitali-Caratheodory-tétel, 26



# Mértékelmélet vázlat

## 1.0. Jelölések, elnevezések, megállapodások

1.0.1 A nem negatív *valós számokat*  $\mathbb{R}_+$ -al jelöljük. A *felsőhatár-axiómát*  $\overline{\mathbb{R}}$ -ban fogjuk használni, tehát minden nem üres halmaznak van szuprémuma legfeljebb  $+\infty$ . Kiterjesztjük a szorzás műveletet  $\overline{\mathbb{R}}$ -ra:  $0 \cdot (+\infty) = 0$  és  $\alpha > 0$  mellett  $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$ , stb. Vigyázzunk: a bevezett műveletekkel  $\overline{\mathbb{R}}$  nem test!

1.0.2 Az  $X$  halmaz *hatványhalmazát*  $\mathcal{P}(X)$ -el fogjuk jelölni. Egy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény esetén  $X(f > \alpha)$  jelöli az  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  *ősképet* és  $\mathcal{R}(f)$  az  $f$  függvény *értékkészletét*.

1.0.3 Egy *topológikus teret*  $(X, \tau)$ -val fogunk jelölni, és  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  halmazrendszer elemeit *nyílt* halmazoknak mondjuk. *Metrikus térben*  $B^\circ(u, r)$  jelöli az  $u$  középpontú  $r$  sugarú *nyílt gömböt* és  $B(u, r)$  az ugyanilyen *zárt gömböt*.

1.0.4 Emlékezzünk arra, hogy egy  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret *skaláriszorozatos térnek*, vagy *Euklideszi-térnek* nevezünk, ha létezik egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény, amelyre:

(i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  minden  $x \in X$  és  $\langle x, x \rangle = 0$  pontosan akkor, ha  $x = 0$ ; (ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  minden  $x, y \in X$ ; (iii) rögzített  $x$  mellett az  $\langle x, \cdot \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineáris funkcionálok.

1.0.5 Egy  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret *normált térnek* nevezünk, ha a vektortéren értelmezve van egy

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

függvény, amelyre: (1)  $\|x\| = 0$  pontosan akkor, ha  $x = 0$ ; (2) minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  skalár és minden  $x \in X$  vektor esetén  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ; (3) fennáll az úgynevezett háromszög egyenlőtlenség, azaz tetszőleges  $x, y \in X$  mellett  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

1.0.6 Egy  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skaláriszorozatos térben az  $x$  vektor hossza, vagy normája:

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

A háromszög egyenlőtlenségtől eltekintve a norma axiómák nyilvánvaló módon teljesülnek. De minden  $x, y \in X$  mellett

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(Schwartz-egyenlőtlenség), ezért a fent definiált függvény valóban normát definiál  $X$ -en. Ugyanis:  $0 \leq \langle x - ry, x - ry \rangle = \|x\|^2 + r^2 \|y\|^2 - 2r \langle x, y \rangle$  fennáll minden  $r \in \mathbb{R}$  esetén. Ezt mint  $r$  kvadrátikus függvényét tekintve, ha  $y \neq 0$  akkor  $4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|y\|^2 \|x\|^2 \leq 0$ , ami épp a Schwartz-egyenlőtlenség. Innen már a háromszög egyenlőtlenség  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$  módon következik.

1.0.7 *Buroktéren* egy  $(X, \mathcal{H})$  párt értünk, ahol  $X$  egy rögzített halmaz,  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$  pedig olyan halmazrendszer, amely elemként tartalmazza az  $X$  halmazt, továbbá akárhány  $\mathcal{H}$ -beli halmaz közös része is  $\mathcal{H}$ -beli. Tetszőleges  $A \subseteq X$  mellett

$$\text{cl}(A) \doteq \cap \{H \in \mathcal{H} : A \subseteq H\}$$

a buroktér *burokoperációja*, vagy *lezárási operációja*. Világos, hogy e burokoperáció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(i)  $A \subseteq \text{cl}(A)$ ; (ii)  $A \subseteq B \Rightarrow \text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$ ; (iii)  $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ .

Eddigi életünkben sok-sok példát láttunk már burokoperációra. Pl: lineáris altér, konvexitás, affinitás, topológiai lezáras.

## 1.1. Félgyűrű, gyűrű, $\sigma$ -algebra és monoton osztály

### 1.1.1 Definíció. (félgyűrű)

Egy  $X$ -beli  $\mathcal{P}$  halmazrendszert félgyűrűnek nevezünk, ha zárt a metszetre és bármely két elem különbsége előáll véges sok diszjunkt  $\mathcal{P}$ -beli elem egyesítéseként.

1.1.2 Ilyen például  $\mathbb{R}$ -en az összes intervallumok halmaza, vagy az összes balról zárt jobbról nyílt intervallumok halmaza. Sőt amint a következő állítás mutatja ez  $\mathbb{R}^n$ -ben is igaz:

### 1.1.3 Állítás. (félgyűrűk szorzata félgyűrű)

Legyen  $(X, \mathcal{P})$  és  $(Y, \mathcal{Q})$  egy-egy félgyűrű. Ekkor az  $(X \times Y, \mathcal{P} \times \mathcal{Q})$  is félgyűrű.

### 1.1.4 Definíció. (gyűrű, $\sigma$ -gyűrű)

Egy  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  halmazrendszert gyűrűnek nevezünk, ha zárt az  $\cup$  és  $\setminus$  műveletekre. Ha zárt a megszámlálható egyesítésre is, akkor  $\sigma$ -gyűrűnek nevezzük.

### 1.1.5 Állítás. (diszjunktizáció gyűrűben)

Legyen adott az  $\mathcal{M}$  gyűrűben egy  $\{A_n \in \mathcal{M} : n \in \mathbb{N}\}$  halmazrendszer.

Ekkor léteznek  $B_n \subseteq A_n, B_n \in \mathcal{M}$  halmazok, amelyek diszjunktak,  $\cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n$  minden  $N \in \mathbb{N}$  mellett, így persze  $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$ .

Bizonyítás.

$B_1 \doteq A_1; B_2 \doteq A_2 \setminus B_1; \dots; B_n \doteq A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} B_k$ . Mivel  $\mathcal{M}$  gyűrű, ezért  $B_n \in \mathcal{M}$ , melyekre  $B_n \subseteq A_n$  minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett. Most  $N$  szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy  $\cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n$  is fennáll  $\forall N \in \mathbb{N}$  esetén.  $N = 1$  mellett triviális. Ha  $N$ -re igaz, akkor  $N + 1$ -re:

$$\cup_{n=1}^{N+1} A_n = \cup_{n=1}^N A_n \cup A_{N+1} = \cup_{n=1}^N B_n \cup (A_{N+1} \setminus \cup_{n=1}^N B_n) = \cup_{n=1}^N B_n \cup B_{N+1} = \cup_{n=1}^{N+1} B_n.$$

Ezt kellett belátni. □

Érdemes átgondolni, hogy tudunk-e hasonló állítást igazolni abban az esetben, ha  $\mathcal{M}$  nem gyűrű csak félgyűrű?! (Igen!)

## 1.1.6 Definíció. (algebra)

Egy  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  halmazrendszert algebraának nevezünk, ha  
 $X \in \mathcal{M}$ ;  
 $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ ;  
 $A_n \in \mathcal{M}, n = 1, \dots, N \Rightarrow \bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{M}$ .

1.1.7 Világos, hogy egy algebra zárt a különbség és metszet műveletre is, hiszen  $A \setminus B = A \cap B^c$  és  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ .

1.1.8  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  pontosan akkor algebra, ha gyűrű és  $X \in \mathcal{M}$ .

## 1.1.9 Definíció. (generált gyűrű)

Gyűrűnek lenni burok fogalom. Jelölje  $r(\mathcal{P})$  a  $\mathcal{P}$  halmazrendszert tartalmazó legszűkebb gyűrűt.

## 1.1.10 Állítás.

Legyen  $\mathcal{P}$  egy  $X$ -beli halmazokból álló félgyűrű. Ekkor

$$r(\mathcal{P}) = \left\{ \bigcup_{n=1}^N A_n : A_n \in \mathcal{P}, A_i \cap A_j = \emptyset, N \in \mathbb{N} \right\},$$

azaz a generált gyűrű a  $\mathcal{P}$ ből vett diszjunkt véges uniók halmaza.

Bizonyítás.

A következő sorrendben érdemes haladnunk:  $r(\mathcal{P})$  zárt a:  $\cdot$  diszjunkt egyesítésre;  $\cdot$  metszetre ( $\mathcal{P}$  félgyűrű);  $\cdot$  különbségre ( $\mathcal{P}$  félgyűrű);  $\cdot$  egyesítésre.

A fentiek ellenőrzésével látjuk, hogy  $r(\mathcal{P})$  egy  $\mathcal{P}$ -t tartalmazó gyűrű. Amennyiben adott egy másik  $\mathcal{P}$ -t tartalmazó gyűrű, akkor annak  $r(\mathcal{P})$ -t is tartalmaznia kell, hiszen egy gyűrű zárt az egyesítésre.  $\square$

1.1.11 Definíció. ( $\sigma$ -algebra)

Egy  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  halmazrendszert  $\sigma$ -algebraának nevezünk, ha  
 $X \in \mathcal{M}$ ;  
 $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ ;  
 $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ .  
 Az  $(X, \mathcal{M})$  páros neve: mérhető tér.

1.1.12 Az  $\mathcal{M}$  pontosan akkor  $\sigma$ -algebra, ha  $\sigma$ -gyűrű és  $X \in \mathcal{M}$ .

## 1.1.13 Definíció. (monoton osztály)

Az  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  halmazrendszert monoton osztálynak mondjuk, ha  $\dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots, A_n \in \mathcal{M}$  esetén  $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$  és  $\dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots, A_n \in \mathcal{M}$  esetén  $\bigcap A_n \in \mathcal{M}$ .

1.1.14 Definíció. (generált  $\sigma$ -algebra és monoton osztály)

Könnyen látható, hogy  $\sigma$ -algebrák vagy monoton osztályok metszete is  $\sigma$ -algebra illetve monoton osztály, így a  $\sigma$ -algebraának lenni, vagy monoton osztálynak lenni is egy-egy burok fogalom. Jelölje  $\sigma(\mathcal{A})$  az  $\mathcal{A}$  halmazrendszert tartalmazó legszűkebb  $\sigma$ -algebrát és  $m(\mathcal{M})$  az  $\mathcal{M}$ -et tartalmazó legszűkebb monoton osztályt.

1.1.15 Az is világos, hogy egy halmazrendszer pontosan akkor  $\sigma$ -gyűrű, ha gyűrű és monoton osztály. Ehhez csak  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^n A_i)$  észrevétel kell.

Az előző gondolat fényében különösen érdekes a következő állítás, mely szerint egy gyűrű monoton osztály burka gyűrű marad. (Hasonlóan például ahhoz, hogy konvex halmaz lezártja konvex marad.)

1.1.16 Állítás. (gyűrű monoton osztály burka gyűrű. (Dynkin-, vagy  $\pi$ - $\lambda$ -tétel))

Legyen  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  egy gyűrű. Ekkor  $m(\mathcal{A})$  gyűrű, ezért  $\sigma$ -gyűrű is. Ha  $\mathcal{A}$  algebra, akkor  $m(\mathcal{A})$   $\sigma$ -algebra, így  $\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$ .

**Bizonyítás.**

Definíció szerint azt mutatjuk meg, hogy bármely két  $m(\mathcal{A})$ -beli halmaz különbsége és egyesítése is  $m(\mathcal{A})$ -beli. Ehhez tetszőlegesen rögzített  $B \subseteq X$  mellett tekintsük az

$$\mathcal{A}_B \doteq \{C \subseteq X : B \setminus C, C \setminus B, C \cup B \in m(\mathcal{A})\}$$

halmazrendszert. Azt kell megmutatnunk, hogy akárhogy rögzítünk  $C \in m(\mathcal{A})$  halmazt  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_C$  fennáll. Ehhez először is vegyük észre, hogy

- (1)  $C \in \mathcal{A}_B$  pontosan akkor, ha  $B \in \mathcal{A}_C$ , minden  $B, C \subseteq X$  mellett;
- (2)  $\mathcal{A}_B$  monoton osztály minden  $B \subseteq X$  mellett;
- (3)  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_B$  minden  $B \in \mathcal{A}$  mellett.

Az (1) tulajdonság nyilvánvaló szimmetria következménye; a (2) tulajdonság  $m(\mathcal{A})$  monoton osztály tulajdonsága miatt áll fenn; (3) tulajdonság pedig azért igaz, mert  $\mathcal{A}$  egy gyűrű.

A (3) és (2) miatt  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_B$  minden  $B \in \mathcal{A}$  mellett, azaz  $\forall C \in m(\mathcal{A})$  és  $\forall B \in \mathcal{A}$  esetén  $C \in \mathcal{A}_B$ , azaz (1) miatt  $B \in \mathcal{A}_C$ , azaz  $\forall C \in m(\mathcal{A})$  esetén  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_C$ . Újra alkalmazva (2)-t kapjuk, hogy  $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_C$  fennáll  $\forall C \in m(\mathcal{A})$  mellett, és épp ezt kellett belátnunk  $m(\mathcal{A})$  gyűrű tulajdonságához.  $\square$

**1.1.17 Állítás.**

Legyen  $\mathcal{M}$  egy félgűrű az  $X$  és  $\mathcal{N}$  egy félgűrű az  $Y$  halmazok felett. Ekkor az  $X \times Y$  szorzathalmazon

$$\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \sigma(r(\mathcal{M} \times \mathcal{N})) = m(r(\mathcal{M} \times \mathcal{N})).$$

A  $\sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$  halmazrendszert szorzat- $\sigma$ -algebrának nevezzük.

**1.2. Mértéktér és legegyszerűbb tulajdonságai****1.2.1 Definíció. (mértéktér)**

Az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  hármast mértéktérnek nevezzük, ha  $(X, \mathcal{M})$  mérhető tér,  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  a konstans  $+\infty$ -től különböző nem negatív halmazfüggvény, amely  $\sigma$ -additív, azaz

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

ahol  $A$  a diszjunkt megszámlálhatóan sok  $A_n \in \mathcal{M}$  halmazok egyesítése.

- 1.2.2 Időnként szükség van a mértéknek a fenténél általánosabb értelmezéseire is, de azokat mindig külön hangsúlyozzuk. Például szükség lehet arra, hogy a halmazfüggvény értelmezési tartománya ne legyen  $\sigma$ -algebra, hanem például csak gyűrű, vagy félgűrű. Általában, egy tetszőleges  $\mathcal{H}$  halmazrendszer esetén a  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  halmazfüggvényt  $\sigma$ -additívnak nevezzük, ha minden olyan  $A \in \mathcal{H}$  és minden olyan  $A_n \in \mathcal{H}$  halmazokra melyekre az  $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$  diszjunkt egyesítés fennáll az is teljesül, hogy  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

- 1.2.3 Arra is szükség lehet, hogy a  $\mu$  értékkészlete a kiterjesztett nem negatív valós számok helyett egy más halmaz lehessen. Például *előjeles mértéknek* nevezzük egy olyan  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  halmazfüggvényt, amely a  $+\infty$  és a  $-\infty$  közül képként csak az egyiket állítja elő; nem konstans  $+\infty$  vagy  $-\infty$ ; valamint tetszőleges  $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$  diszjunkt egyesítés a  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  egyenlőséget implikálja. (Világos, hogy ez csak úgy lehet, ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  sor minden átrendezése is konvergens, ami a  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  sor abszolút konvergenciájának megkövetelésével ekvivalens). Hasonlóan  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  *komplex mérték*, ha az iménti implikáció teljesül.

Látnunk kell, hogy a komplex mérték nem általánosabb sem az előjeles mértéknél, sem a mértéknél, hiszen ez utóbbi esetekben a  $+\infty$  vagy a  $-\infty$  is előfordulhat mint egy halmaz mértéke,

komplex mérték esetén pedig ez definíció szerint ki van zárva. Ha arra külön utalást nem teszünk akkor mértéken a fenti definíció szerint egy  $\sigma$ -algebrán értelmezett nem negatív  $\sigma$ -additív halmazfüggvényt fogunk érteni, amelynek értékkészletében a  $+\infty$  is szerepelhet.

#### 1.2.4 Megjegyzés. (mérték végesen additív; monoton; szubtraktív)

Az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktérben:

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ , ahol  $A$  a diszjunkt véges sok  $A_i \in \mathcal{M}$  halmaz egyesítése;
- $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$  ha  $B \subseteq A$  és  $\mu(B)$  véges.

**Bizonyítás.**

Az üreshalmaz előáll megszámlálhatóan sok diszjunkt üreshalmaz egyesítéseként, azaz  $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\emptyset)$ . Ebből az következik, hogy  $\mu(\emptyset) = 0$ , vagy  $\mu(\emptyset) = +\infty$ . Ez utóbbi esetben tetszőleges  $A$  mérhető halmazra  $A = A \cup \emptyset \dots \cup \emptyset \dots$  megszámlálhatóan sok diszjunkt halmazból álló egyesítés, ezért a  $\sigma$ -additivitás miatt  $\mu(A) = +\infty$  lenne.

Ha  $A = \cup_{i=1}^n A_i$  véges sok diszjunkt halmaz egyesítése, akkor az is igaz, hogy  $A = \cup_{i=1}^n A_i \cup \emptyset \dots \cup \emptyset \dots$  megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt halmaz egyesítése. Alkalmazva, hogy  $\mu(\emptyset) = 0$ , kapjuk a  $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$  egyenlőséget.

Tegyük fel, hogy  $A \subseteq B$ . Nyilván  $B = A \cup (B \setminus A)$  diszjunkt egyesítés, így a végesen additivitást kihasználva  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ . No de  $\mu$  nem negatív értékeket vesz csak fel, tehát  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

Végül tegyük fel, hogy  $B \subseteq A$  és  $\mu(B)$  véges. Ekkor  $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$ , ezért ha  $\mu(B) < \infty$ , akkor  $\mu(A) - \mu(B)$  kifejezés értelmes és egyenlő  $\mu(A \setminus B)$ -vel.  $\square$

#### 1.2.5 Állítás. (mérték $\sigma$ -szubadditív)

Az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktér tetszőleges  $\{A_n \in \mathcal{M} : n \in \mathbb{N}\}$  halmazrendszerére

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Bizonyítás.**

Legyen  $B_n$  a diszjunktizált halmazsorozat. Ekkor

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

hiszen  $B_n \subseteq A_n$  és a mérték monoton halmazfüggvény.  $\square$

#### 1.2.6 Állítás. (mérték monoton folytonossága)

Legyen  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$  monoton növekvő sorozata az  $A_n \in \mathcal{M}$  halmazoknak, az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktéren. Ekkor

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Legyen  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$  monoton fogyó sorozata az  $A_n \in \mathcal{M}$  halmazoknak, az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktéren, és tegyük fel, hogy  $\mu(A_1)$  véges. Ekkor

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**Bizonyítás.**

Legyen  $B_n$  a diszjunktizált halmazsorozat. Ekkor

$$\begin{aligned} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=1}^n B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=1}^n A_k). \end{aligned}$$

No de az  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  halmazzsorozat monoton növekvő, ezért  $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_n$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ .

Most tegyük fel, hogy  $A_n$  halmazzsorozat monoton fogyó és minden tagja véges mértékű. Jelölje  $Y = A_1$  és az  $A_n$  halmazoknak tekintsük az  $Y$ -ra vonatkozó  $A_n^c \doteq Y \setminus A_n$  komplementerét. Jelölje  $B_n \doteq A_n^c$ . Világos, hogy  $B_n \in \mathcal{M}$  és  $B_n \subseteq B_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$  mellett. Az is nyilvánvaló, hogy  $\bigcup B_n = \bigcup A_n^c = (\bigcap A_n)^c$ , ezért  $\mu(B_n) \rightarrow \mu((\bigcap A_n)^c)$ . Mivel  $\mu(A_n) < \infty$  miatt  $\mu(B_n) = \mu(Y \setminus A_n) = \mu(Y) - \mu(A_n)$  és  $\mu((\bigcap A_n)^c) = \mu(Y) - \mu(\bigcap A_n)$ . Újra kihasználva  $\mu(Y)$  végeességét, kapjuk, hogy  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(\bigcap A_n)$ .  $\square$

### 1.2.7 Állítás. (elemi kiterjesztési tétel)

Legyen  $\mu$  a  $\mathcal{P}$  félgyűrűn értelmezett mérték. Ekkor  $\mu$  egyértelműen terjeszthető ki a generált  $r(\mathcal{P})$  gyűrűre úgy, hogy a kiterjesztett  $\hat{\mu}$  halmazfüggvény is mérték.

**Bizonyítás.**

Először megmutatjuk azt, hogy amennyiben  $A_n, B_m \in \mathcal{P}$  melyekre  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$  diszjunkt egyesítések, akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m)$ .

Ugyanis, minden rögzített  $n$  mellett  $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_n \cap B_m)$  diszjunkt egyesítés, ezért  $\mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_m)$ , ahonnan  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_m)$ . Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy  $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_m \cap A_n)$ , ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m)$  valóban teljesül.

Tekintsük most a generált  $r(\mathcal{P})$  gyűrű egy tetszőleges elemét, azaz legyen  $E = \bigcup_{n=1}^N A_n$  diszjunkt egyesítés, ahol  $A_n \in \mathcal{P}$ . Ahhoz, hogy az  $r(\mathcal{P})$ -re kiterjesztett halmazfüggvényt

$$\hat{\mu}(E) \doteq \bigcup_{n=1}^N \mu(A_n)$$

módon definiálhassuk először is azt kell meggondolnunk, hogy amennyiben  $E$  előáll más módon  $E = \bigcup_{m=1}^M B_m$  alakban, akkor  $\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \sum_{m=1}^M \mu(B_m)$ . No de az előzőek szerint ez nyilvánvaló, hiszen válasszuk meg az  $N$  illetve  $M$  indexeknél nagyobb indexű halmazokat az üres halmaznak és egyszerűen alkalmazhatjuk az imént már meggondolt  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m)$  egyenlőséget. A  $\hat{\mu} : r(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  nem negatív halmazfüggvény tehát a fent kiemelt módon jól van definiálva. Nyilvánvaló, hogy  $\hat{\mu}$  kiterjesztése  $\mu$ -nek, sőt  $\hat{\mu}$  az egyetlen végesen additív kiterjesztés.

Most azt lássuk be, hogy  $\hat{\mu}$  egy  $\sigma$ -additív halmazfüggvény, tehát amennyiben egy  $A \in r(\mathcal{P})$  halmaz előáll  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  diszjunkt egyesítés alakban, ahol  $A_n \in r(\mathcal{P})$  akkor  $\hat{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n)$ . Legyenek tehát az  $A_n$  halmazok  $A_n = \bigcup_{i=1}^{r_n} C_i^n$  diszjunkt egyesítés alakúak, ahol minden  $C_i^n \in \mathcal{P}$ , valamint  $A = \bigcup_{k=1}^N B_k$  szintén diszjunkt halmazok egyesítése, ahol  $B_k \in \mathcal{P}$ . Ekkor  $\bigcup_{k=1}^N B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{r_n} C_i^n$  egyenlőségben mind a bal mind a jobb oldalon egymástól diszjunkt  $\mathcal{P}$ -beli halmazok legfeljebb megszámlálható egyesítése látható. Újra alkalmazva a bizonyítás első gondolatát azt kapjuk, hogy

$$\hat{\mu}(A) = \sum_{k=1}^N \mu(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r_n} \mu(C_i^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n).$$

Ezt kellett belátni.  $\square$

### 1.2.8 A fenti bizonyítás csekély módosításával az is látható, hogy amennyiben $\mu$ egy a $\mathcal{P}$ félgyűrűn értelmezett végesen additív nem negatív halmazfüggvény (*Jordan-mérték*), akkor a fenti módon $\mu$ egyértelműen kiterjeszthető az $r(\mathcal{P})$ generált gyűrűre a végesen additivitás megtartásával.

Érdeemes átgondolni, hogy a szakaszban igazolt állítások mennyiben vihetők át előjeles vagy komplex mértékek esetére.

## 1.3. Mérhető függvények

### 1.3.1 Definíció. (Borel-halmaz)

Ha  $(X, \tau)$  topológikus tér, akkor a nyílt halmazok generálta legszűkebb  $\sigma$ -algebrát Borel-halmazoknak nevezzük.



## 1.3.2 Definíció. (Borel-mérhető függvény)

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  egy mérhető tér,  $(Y, \tau)$  egy topológikus tér és  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Azt mondjuk, hogy  $f$  Borel-mérhető, ha minden  $V \subseteq Y$  nyílt halmaz esetén  $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$ .

## 1.3.3 Definíció. (karakterisztikus függvény)

Az  $E \subseteq X$  halmaz mellett, legyen

$$\chi_E \doteq \begin{cases} 1 & , \text{ha } x \in E; \\ 0 & , \text{ha } x \notin E \end{cases}$$

az  $E$  halmaz karakterisztikus függvénye.

1.3.4 Az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető tér egy  $E \subseteq X$ . A  $\chi_E$  karakterisztikus függvény pontosan akkor mérhető ha  $E \in \mathcal{M}$ .

## 1.3.5 Megjegyzés.

Topológikus terek közötti folytonos függvény Borel-mérhető, abban az értelemben, hogy a fenti  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrát válasszuk az értelmezési tartomány Borel-halmazainak.

## 1.3.6 Definíció. (mérhető függvény)

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  és  $(Y, \mathcal{N})$  két mérhető tér. Az  $f : X \rightarrow Y$  függvényt mérhetőnek mondjuk, ha  $f^{-1}(N) \in \mathcal{M}$  minden  $N \in \mathcal{N}$  esetén.

## 1.3.7 Megjegyzés.

Mérhető függvények kompozíciója is mérhető.

1.3.8 Állítás. (függvény által generált  $\sigma$ -algebra)

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  egy mérhető tér  $Y$  egy halmaz,  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Ekkor az alábbi halmazrendszer  $\sigma$ -algebra  $Y$ -on:

$$\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Sőt a fenti halmazrendszer a legszűkebb  $Y$ -beli halmazrendszer, amelyre nézve  $f$  mérhető.

## 1.3.9 Állítás.

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  egy mérhető tér,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  egy Borel-mérhető függvény. Ekkor minden  $B \subseteq \mathbb{R}$  Borel-halmaz esetén  $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ , tehát az  $(X, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-mérhetőség fogalma egybeesik az  $(X, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \sigma(\tau))$  mérhetőség fogalmával.

## 1.3.10 Állítás.

Legyen  $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-mérhető függvények, az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren. Ekkor az

$$f(x) \doteq (u(x), v(x))$$

mint  $X \rightarrow \mathbb{R}^2$  függvény is Borel-mérhető.

Az  $u + v, uv$  és az  $\frac{u}{v}$  függvény is Borel-mérhető.

## Bizonyítás.

Először is jegyezzük meg, hogy minden  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz előáll mint megszámlálhatóan sok  $I \times J$  alakú nyílt téglák egyesítése, ahol  $I$  és  $J$  nyílt,  $\mathbb{R}$ -beli intervallumok. (Vegyük az összes mindkét koordinátájában racionális pontjait  $V$ -nek, és ezeknek minden racionális sugarú környezetét.)

Tehát ha  $I \times J$  egy fenti típusú téglák, akkor

$$f^{-1}(I \times J) = \{x \in X : u(x) \in I \text{ és } v(x) \in J\} = u^{-1}(I) \cap v^{-1}(J).$$

Az  $u$  és a  $v$  függvények Borel-mérhetősége miatt  $f^{-1}(I \times J) \in \mathcal{M}$ . Ha a  $V$  nyílt halmaz  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \times J_n)$  alakú, akkor  $f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n \times J_n) \in \mathcal{M}$ , hiszen  $\mathcal{M}$  zárt a megszámlálható egyesítésre.

Az összeadásra, szorzásra és hányadosra vonatkozó állítás következik a megfelelő műveletek folytonosságából.  $\square$

## 1.3.11 Állítás.

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  egy mérhető tér,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  egy függvény. Az  $f$  pontosan akkor mérhető, ha minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén az  $X(f > \alpha)$  nívóhalmazok mérhetőek.

## 1.3.12 Állítás.

Mérhető téren értelmezett valós értékű függvények supremuma, infimuma, limsupja, liminfje, határértéke is mérhető.

## 1.3.13 Definíció. (lépcsős vagy egyszerű függvény)

lépcsős függvénynek, vagy egyszerű függvénynek nevezünk, egy  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  véges értékkészletű mérhető függvényt.

1.3.14 Legyen  $s$  egyszerű függvény melynek értékkészlete  $\mathcal{R}(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Ha bevezetjük minden  $\alpha_i \in \mathcal{R}(f)$  mellett az  $E_i \doteq X(f = \alpha_i)$  jelölést, akkor az egyszerű függvény  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$  alakban áll elő, ahol az  $E_1, \dots, E_n$  egymástól páronként diszjunkt mérhető halmazok.

Fontos látni, hogy ugyanez az egyszerű függvény még nagyon sokféle képpen előállítható a fenti  $\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{F_i}$  alakban ha nem kötjük meg azt, hogy a  $\beta_i$  valós számok egymástól különbözzenek, vagy nem írjuk elő az  $F_i$  halmazok diszjunktját!

## 1.3.15 Állítás. (mérhető függvények approximációs tétele)

Legyen  $f$  egy nem negatív valós értékű függvény az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren. Ekkor létezik  $s_n$  nem negatív lépcsős függvények sorozata, hogy  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq f$  és  $s_n \rightarrow f$  pontonként. Ha  $f$  korlátos, akkor még az is igaz, hogy  $s_n$  egyenletesen tart  $f$ -hez.

Bizonyítás.

Definiáljuk tetszőleges  $n \in \mathbb{N}$  és  $i = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1$  mellett az alábbi halmazokat:

$$E_i^{(n)} \doteq f^{-1} \left( \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right) \right) \text{ továbbá } F^{(n)} \doteq X(f \geq n).$$

Az  $f$  mérhetősége miatt  $E_i^{(n)} \in \mathcal{M}$  és  $F^{(n)} \in \mathcal{M}$  minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $i = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1$  esetén. Nyilvánvaló, hogy  $X = \cup_{i=0}^{n2^n-1} E_i^{(n)} \cup F^{(n)}$  diszjunkt egyesítés fennáll minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett. Definiálja rögzített  $n \in \mathbb{N}$  mellett

$$s_n \doteq \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{E_i^{(n)}} + n \chi_{F^{(n)}}.$$

Világos, hogy  $s_n$  egyszerű függvény. Tetszőleges  $x \in X$  mellett, ha  $x \in E_i^{(n)}$ , akkor  $s_n(x) = \frac{i}{2^n} \leq f(x)$ , és ha  $x \in F^{(n)}$  akkor  $s_n(x) = n \leq f(x)$ . Az is világos, hogy amennyiben  $f(x)$  véges, úgy olyan  $n$ -hez melyre  $f(x) < n$  létezik  $i$ , hogy  $x \in E_i^{(n)}$ , ezért  $f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$ . Ha  $f(x) = +\infty$ , akkor viszont  $x \in F^{(n)}$  minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett, így  $s_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$  mellett pontonként. Ebből már látszik, hogy amennyiben  $f$  korlátos, úgy tetszőleges a korlátnál nagyobb  $n$  index mellett  $f - s < \frac{1}{2^n}$  az egész  $X$ -en, tehát  $s_n$  valóban egyenletesen konvergál  $f$ -hez.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy a fenti módon definiált  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  függvényt sorozat pontonként monoton növekvő. Legyen tehát  $x \in X$  rögzítve. Világos, hogy

$$E_i^{(n)} = E_{2i}^{(n+1)} \cup E_{2i+1}^{(n+1)},$$

hiszen  $\frac{i}{2^n} = \frac{2i}{2^{n+1}}$  és  $\frac{i+1}{2^n} = \frac{2i+2}{2^{n+1}}$ . Ez azt jelenti, hogy amennyiben  $x \in E_i^{(n)}$ , úgy  $s_n(x) = \frac{i}{2^n}$ , de  $s_{n+1}(x) = \frac{2i}{2^{n+1}}$  vagy  $s_{n+1}(x) = \frac{2i+1}{2^{n+1}}$ . Az első esetben  $s_n(x) = s_{n+1}(x)$  míg a második esetben  $s_n(x) < s_{n+1}(x)$ . Ha  $x \in F^{(n)}$ , de  $f(x) < n+1$ , akkor  $s_n(x) = n$  és  $s_{n+1}(x) = \frac{i}{2^{n+1}}$  olyan  $i$ -re melyre  $\frac{i}{2^{n+1}} \geq n$ . Ha  $x \in F^{(n)}$ , és  $f(x) \geq n+1$  is fennáll, akkor  $s_n(x) = n$  és  $s_{n+1}(x) = n+1$ . Azt láttuk tehát, hogy tetszőleges  $x \in X$  mellett  $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$  valóban fennáll.  $\square$

## 1.4. Nem negatív lépcsős függvény integrálja

Legyen a fejezetben végig az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktér rögzítve.

### 1.4.1 Definíció. (nem negatív lépcsős függvény integrálja)

Ha  $f$  egy nem negatív lépcsős függvény és  $E \in \mathcal{M}$  egy mérhető halmaz, akkor az  $f$  függvénynek az  $E$  halmaz fölötti integrálja a következő szám:

$$\int_E f d\mu \doteq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap E),$$

ahol  $\mathcal{R}(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  és  $\alpha_i \neq \alpha_j$  ( $i \neq j$  esetben), valamint  $E_i \doteq X$  ( $f = \alpha_i$ ).

A fenti definícióban fontos a korábban bevezetett konvenció, miszerint  $0 \cdot (+\infty) = 0$  és  $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$  ha  $\alpha > 0$ . Azt látjuk, hogy a definícióban szereplő véges összegnek azért van értelme, mert  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$  és az  $\alpha + (+\infty) = +\infty$  minden  $\alpha \geq 0$  esetén. Ez utóbbi miatt fontos, hogy itt csak nem negatív értékészletű egyszerű függvényeket engedhetünk meg.

1.4.2 Világos, hogy amennyiben  $f$  egy nem negatív lépcsős függvény, úgy  $\int_E f d\mu \geq 0$ , és  $\int_E f d\mu = +\infty$  is lehetséges.

1.4.3 Amennyiben  $f$  az  $E$  halmazon a nem negatív  $\alpha$  konstans, akkor létezik  $i$  melyre  $E \subseteq E_i$ , ezért

$$\int_E f d\mu = \alpha_i \mu(E_i \cap E) = \alpha \mu(E).$$

Fontos speciális eset az egész  $X$  halmaz feletti integrálás. Definíció szerint ilyenkor

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

### 1.4.4 Állítás. (nem negatív lépcsős függvény integrálfüggvénye mérték)

Legyen  $f$  egy nem negatív lépcsős függvény. Ekkor a

$$\varphi(E) \doteq \int_E f d\mu$$

halmazfüggvény mértéket definiál az  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrán.

Bizonyítás.

Legyen  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ , ahol az  $\alpha_i$  számok páronként különbözők és  $E_i \doteq X$  ( $f = \alpha_i$ ), továbbá tegyük fel, hogy  $F$  előáll  $F = \cup_{j=1}^{\infty} F_j$  diszjunkt egyesítés alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(F) &= \varphi(\cup_{j=1}^{\infty} F_j) = \int_{\cup_{j=1}^{\infty} F_j} f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap (\cup_{j=1}^{\infty} F_j)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(\cup_{j=1}^{\infty} (F_j \cap E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j \cap E_i) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \mu(F_j \cap E_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(F_j \cap E_i) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(F_j). \end{aligned}$$

Itt csupán  $\mu$  mérték  $\sigma$ -additivitását használtuk és azt, hogy véges sok sor tagonként is összegezhető.

□

## 1.4.5 Következmény.

Legyenek  $s$  és  $t$  nem negatív lépcsős függvények az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktéren. Ekkor  $\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$ .

Bizonyítás.

Legyenek  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$  és  $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$ , ahol az  $\alpha_i$  nem negatív számok és a  $\beta_j$  nem negatív számok rendre egymástól különbözők,  $E_i \doteq X (s = \alpha_i)$ ,  $F_j \doteq X (t = \beta_j)$ . Ekkor  $\cup_{j=1}^m F_j = X = \cup_{i=1}^n E_i$  diszjunkt előállítások. Világos, hogy

$$X = \cup_{i,j} (E_i \cap F_j)$$

is diszjunkt egyesítés. Az  $E_i \cap F_j$  halmazon az  $s+t$  egyszerű függvény a konstans  $\alpha_i + \beta_j$  értéket veszi fel, tehát egy előző megjegyzésünk szerint

$$\int_{E_i \cap F_j} s+t d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_i \cap F_j) = \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) + \beta_j \mu(E_i \cap F_j) = \int_{E_i \cap F_j} s d\mu + \int_{E_i \cap F_j} t d\mu.$$

Alkalmazhatjuk tehát  $s+t$ -re,  $s$ -re,  $t$ -re az előző állítást. Ekkor pusztán az integrálmérték végesen additivitása miatt

$$\begin{aligned} \int_X s+t d\mu &= \sum_{i,j} \int_{E_i \cap F_j} s+t d\mu = \sum_{i,j} \left( \int_{E_i \cap F_j} s d\mu + \int_{E_i \cap F_j} t d\mu \right) \\ &= \sum_{i,j} \int_{E_i \cap F_j} s d\mu + \sum_{i,j} \int_{E_i \cap F_j} t d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu. \end{aligned}$$

Ezt kellett belátni. □

Világos, hogy véges sok nem negatív lépcsős függvény összege tagonként is integrálható.

## 1.4.6 Megjegyzés.

Legyen  $f$  egy nem negatív lépcsős függvény. Tudjuk, hogy ennek nagyon sok  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$  alakú előállítása van feltéve, hogy nem követeljük meg az  $\alpha_i$  nem negatív konstansok különbözőségét vagy az  $E_i$  mérhető halmazok diszjunkttságát. Amennyiben

$$f = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$$

egy tetszőleges olyan előállítás, amely indikátor függvények nem negatív együtthatós lineáris (kúp) kombinációja, akkor

$$\int_E f d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j \cap E) = \int_X f \chi_E d\mu$$

tetszőleges  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz esetén.

Bizonyítás.

Most legyen  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$  az az előállítás, ahol az  $\alpha_i$  nem negatív számok különbözők és  $E_i = X (f = \alpha_i)$ . Ekkor kihasználva, hogy  $\alpha_i \chi_{E_i \cap E}$  maga is egy nem negatív egyszerű függvény, és hogy az ilyenek összegét tagonként integrálhatjuk:

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap E) = \sum_{i=1}^n \int_X \alpha_i \chi_{E_i \cap E} d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i \cap E} d\mu \\ &= \int_X \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \right) \chi_E d\mu = \int_X f \chi_E d\mu \\ &= \int_X \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j} \right) \chi_E d\mu = \int_X \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j \cap E} d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j \cap E). \end{aligned}$$

Ezt kellett belátni. □

## 1.4.7 Állítás.

Ha  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tetszőleges nem negatív valós szám, úgy  $\int_X \alpha s d\mu = \alpha \int_X s d\mu$ . Ha  $s, t$  nem negatív lépcsős függvények, melyekre  $s \leq t$ , akkor  $\int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu$ .

Bizonyítás.

Az első állítás nyilvánvaló következménye a definíciónak. Világos, hogy  $t - s$  is egy nem negatív egyszerű függvény, így az integrálja nem negatív valós szám, vagy  $+\infty$ . Alkalmazva az additivitást a  $t = s + (t - s)$  összegre azt kapjuk, hogy  $\int_X t d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t - s d\mu \geq \int_X s d\mu$ .  $\square$

## 1.5. Nem negatív mérhető függvények integrálja

Legyen ebben a fejezetben is rögzítve az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktér.

## 1.5.1 Definíció. (nem negatív függvény integrálja)

Legyen  $f$  egy nem negatív mérhető függvény.

$$\int_X f d\mu \doteq \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f \text{ és } \phi \text{ lépcsős függvény.} \right\}$$

Persze  $f$  nem negativitását azért kellett feltenni, hogy a sup mögötti halmaz ne lehessen üres. Emlékezzünk arra a megállapodásra, hogy a felsőhatár axiómát  $\mathbb{R}$ -ban használjuk, ezért a fenti egyenlőség jobb oldala egy jól definiált nem negatív valós szám, vagy  $+\infty$ . Mivel lépcsős függvényre már láttuk, hogy az integrál monoton ezért a fenti definíció összhangban van azzal az esettel, ha a nem negatív mérhető függvény speciálisan maga is egy lépcsős függvény.

1.5.2 Világos, hogy amennyiben  $f$  egy nem negatív mérhető függvény, úgy  $\int_E f d\mu \geq 0$ , és  $\int_E f d\mu = +\infty$  is lehetséges.

## 1.5.3 Definíció.

Az  $E \in \mathcal{M}$  mérhető részhalmazon az integrált

$$\int_E f d\mu \doteq \int_X f \chi_E d\mu$$

módon definiáljuk.

Mivel nem negatív egyszerű függvényekre a fenti egyenlőség igaz, ezért ez a definíció is összhangban van avval az esettel mikor a fenti  $f$  egy egyszerű függvény.

1.5.4 Világos, hogy minden nem negatív  $\alpha$  esetén  $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$ , valamint  $f \leq g$  nem negatív mérhető függvények mellett  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$  is teljesül. Ezt alkalmazva az is könnyedén látszik, hogy tetszőleges  $f$  nem negatív mérhető függvényre és  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra  $\int_E f d\mu \leq \int_X f d\mu$ .

## 1.5.5 Tétel. (Beppo-Levi, vagy monoton konvergencia tétel)

Tegyük fel, hogy az  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nem negatív mérhető függvények monoton növekedő sorozata, és jelölje  $f$  ezen sorozat pontonkénti határértékét. Láttuk, hogy  $f$  is nem negatív mérhető függvény. Ekkor

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu,$$

midőn  $n \rightarrow \infty$ .

**Bizonyítás.**

Mivel monoton növekvő  $\mathbb{R}$ -beli számoknak van  $\mathbb{R}$ -beli határtéke ezért legyen  $\alpha \doteq \lim \int_X f_n d\mu \in \mathbb{R}$ . Mivel  $\forall n \in \mathbb{N}$  mellett  $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ , ezért nyilvánvalóan  $\alpha \leq \int_X f d\mu$ .

Most megmutatjuk, hogy  $\int_X f d\mu \leq \alpha$  is teljesül. Legyen  $g$  egy tetszőleges lépcsős függvény melyre  $g \leq f$ , valamint  $c \in (0, 1)$  tetszőleges valós szám. Azt fogjuk megmutatni, hogy  $c \int_X g d\mu \leq \alpha$ . Ennek kulcsa abban rejlik, hogy tetszőleges lépcsős függvény integrálfüggvénye mérték és a mérték monoton folytonos. Tekintsük az

$$E_n \doteq X(f_n \geq cg)$$

mérhető halmazt. Az  $f_n$  függvényt sorozat pontonkénti monoton növekedése miatt minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett  $E_n \subseteq E_{n+1}$ . Az is látható, hogy  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , hiszen ha valamely  $x \in X$  mellett  $g(x) = 0$ , akkor az  $f_n$  függvények nem negativitása miatt  $x \in E_n$  minden  $n$  mellett fennáll, ha viszont  $g(x) > 0$ , akkor mivel  $g(x) \neq +\infty$ , ezért  $cg(x) < g(x)$ , így létezik  $n \in \mathbb{N}$  melyre  $cg(x) < f_n(x)$ , tehát  $x \in E_n$  valóban fennáll. Alkalmazhatjuk most a  $\varphi(E) \doteq \int_E cg d\mu$  mérték monoton folytonosságát az  $E_n$  monoton növekvő halmazsorozatra: így azt kapjuk, hogy

$$\varphi(E_n) \rightarrow \varphi(X) = \int_X cg d\mu.$$

No de

$$\varphi(E_n) = \int_{E_n} cg d\mu \leq \int_{X(f_n \geq cg)} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \alpha.$$

Ez épp azt jelenti, hogy  $\int_X cg d\mu = c \int_X g d\mu \leq \alpha$  valóban fennáll.  $\square$

**1.5.6 Következmény. (az integrál additivitása)**

Legyenek  $f$  és  $g$  nem negatív mérhető függvények. Ekkor

$$\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

A következő tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy nem negatív mérhető függvények esetén a  $\sum$  és az  $\int$  jel felcserélhető.

**1.5.7 Tétel. (monoton konvergencia tétel sorokra)**

Legyenek  $f_n$  nem negatív mérhető függvények. Ekkor az  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  nem negatív mérhető függvényre

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

**1.5.8 Tétel. (Fatou-lemma)**

Legyenek  $f_n$  nem negatív mérhető függvények. Ekkor

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**1.5.9 Tétel.**

Legyen  $f$  nem negatív mérhető függvény. Ekkor a

$$\varphi(E) \doteq \int_E f d\mu$$

definícióval  $\varphi$  is mérték az  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrán.

**1.5.10 Állítás. (nem negatív mérhető függvény integrálfüggvénye mérték)**

Legyen  $f$  nem negatív mérhető függvény és  $\varphi(E) \doteq \int_E f d\mu$  az  $f$  integrál mértéke. Ekkor tetszőleges  $g$  nem negatív mérhető függvényre, és tetszőleges  $E$  mérhető halmazra

$$\int_E g d\varphi = \int_E g \cdot f d\mu.$$

## 1.5.11 Definíció. (abszolút folytonosság)

Legyen  $\lambda$  és  $\mu$  két mérték (vagy akár előjeles mérték) az  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrán. Azt mondjuk, hogy  $\lambda$  abszolút folytonos a  $\mu$ -re nézve, ha  $E \in \mathcal{M}$  esetén

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Ezt  $\lambda \ll \mu$  módon jelöljük.

Világos, hogy amennyiben  $\lambda(E) \doteq \int_E f d\mu$ , valamely mérhető  $f$  függvényre, akkor  $\lambda \ll \mu$ . Meg fogjuk mutatni, hogy ha  $\lambda(X)$  és  $\mu(X)$  véges mértékek, melyekre  $\lambda \ll \mu$ , akkor létezik olyan nem negatív  $f$  mérhető függvény, hogy  $\lambda(E) = \int_E f d\mu$  fennáll minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz esetén. (Radon-Nikodym tétel).

## 1.6. Mérfhető függvény integrálja

Legyen  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mérhető függvény. Világos, hogy  $f$  előáll

$$f = f^+ - f^-$$

alakban, ahol  $f^+$  az  $f$  pozitív része és  $f^-$  az  $f$  negatív része. Az is nyilvánvaló, hogy  $f^+$  és  $f^-$  nem negatív mérhető függvények, amelyekre  $|f| = f^+ + f^-$ .

## 1.6.1 Definíció.

Azt mondjuk, hogy az  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény integrálható az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktéren, ha  $\int f^+ d\mu$  és  $\int f^- d\mu$  közül nem mindkettő  $+\infty$ . Ebben az esetben

$$\int_X f \doteq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Az  $E \in \mathcal{M}$  részhalmazon vett integrált, a nem negatív mérhető függvényekhez hasonlóan az  $f \cdot \chi_E$  függvénynek  $X$ -en vett integráljaként definiáljuk.

## 1.6.2 Állítás.

Ha  $f$  és  $g$  integrálható, valamint  $\int_X f d\mu + \int_X g d\mu$  összeg értelmes, akkor  $f + g$  is integrálható, valamint

$$\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Amennyiben  $\alpha \in \mathbb{R}$  valós, akkor  $f$  integrálhatóságából  $\alpha f$  integrálhatósága is következik, és

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$$

1.6.3 Fontos szóhasználat: Azt mondjuk, hogy valamilyen tulajdonság  $\mu$  majdnem minden  $x \in X$  pontra teljesül, hogy ha azon pontok halmaza, melyre ez a tulajdonság nem igaz, mérhető halmazt alkotnak, és ennek a halmaznak mértéke nulla.

## 1.6.4 Definíció.

Legyen  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktér. Tekintsük a következő vektorteret

$$\mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ mérhető, } \int_X |f| d\mu < +\infty \right\}$$

Világos, hogy  $\int_X |f| d\mu = 0$  pontosan akkor, ha  $f(x) = 0$   $\mu$  m.m.  $x \in X$  esetén. Ha  $\mathcal{L}^0$  jelöli azon mérhető függvényeket amelyek a konstans 0 függvénytől csak egy  $\mu$ -re nézve nullmértékű

halmazban különböznek, akkor világos, hogy  $\mathcal{L}^0$  a fenti  $\mathcal{L}_1$  térnek altere. Jelölje  $L_1$  az  $\mathcal{L}_1$  térnek ezen  $\mathcal{L}^0$  altere szerinti faktorterét, azaz

$$L_1(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu) / \mathcal{L}^0(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Ez azt jelenti, hogy  $L_1$  elemei olyan ekvivalencia osztályok, melynek egyes ekvivalencia osztályok olyan mérhető függvények halmazából állnak, melyek egymástól csak nullmértékű halmazban különböznek. Továbbra is  $f$ -el jelölve azt az ekvivalencia osztályt, amely az  $f$  függvényt tartalmazza

$$\|f\|_{L_1} \doteq \int_X |f| d\mu.$$

#### 1.6.5 Állítás.

$L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  vektortéren az integrálás pozitív lineáris funkcionál, azaz  $f, g \in L_1$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mellett

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu \quad \text{továbbá} \quad f \geq 0 \text{ esetén } \int_X f d\mu \geq 0.$$

#### 1.6.6 Következmény.

Tetszőleges  $f \in L_1$  esetén  $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ .

#### 1.6.7 Állítás.

Legyen  $f \in L^1$ . Ekkor  $\mu(X(|f| = +\infty)) = 0$ .

**Bizonyítás.**

Legyen  $E \doteq X(|f| = +\infty)$ . Ekkor  $\int_E |f| d\mu \leq \int_X |f| d\mu < +\infty$ , hiszen  $f \in L^1(\mu)$ . Emiatt  $\int_E |f| d\mu = +\infty$  nem teljesülhet. Viszont ha  $\mu(X(|f| = +\infty)) \neq 0$ , akkor  $\int_E |f| d\mu = +\infty$  nyilvánvalóan fennáll az Archimédész-axióma miatt. Ezt kellett belátni.  $\square$

#### 1.6.8 Állítás.

Tetszőleges  $f \geq 0$  nem negatív mérhető függvényre  $\int_X f d\mu = 0$  pontosan akkor, ha  $f = 0$   $\mu$  m.m.

**Bizonyítás.**

Ha  $f$  konstans 0 egy nullmértékű halmaztól eltekintve, akkor nyilván  $\int_X f d\mu = 0$  is fennáll. Tegyük most fel,  $\int_X f d\mu = 0$ , és tekintsük az  $A_n \doteq X(f > \frac{1}{n})$  inverzképet. Világos, hogy  $A_n \in \mathcal{M}$  és  $x \in A_n$  pontosan akkor, ha  $f(x) > \frac{1}{n}$ . Ezért

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) = \int_{A_n} 1 d\mu \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_X f d\mu = 0$$

Tehát minden  $n \in \mathbb{N}$  mellett  $\mu(A_n) = 0$ , ezért  $X(f \neq 0) = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  miatt  $\mu(X(f \neq 0)) = 0$ .  $\square$

#### 1.6.9 Állítás.

Ha  $\int_E f d\mu = 0$  minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra, akkor  $f(x) = 0$   $\mu$  m.m.  $x \in X$  esetén.

**Bizonyítás.**

Legyen  $E \doteq X(f \geq 0)$ . Ekkor  $x \in E$  esetén  $f(x) = f^+(x)$  így  $0 = \int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu$ . Mivel  $f^+$  egy nem negatív függvény, ezért  $\mu(x \in E : f(x) > 0) = 0$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $\mu(x \in X : f(x) > 0) = 0$ . Alkalmazva az eddig igazolt állítást a  $-f$  függvényre azt kapjuk, hogy  $\mu(x \in X : f(x) < 0) = 0$ . Összegezve:  $\mu(x \in X : f(x) \neq 0) = 0$ . Ezt kellett belátni.  $\square$

#### 1.6.10 Tétel. (Lebesgue féle dominált konvergencia tétel)

Legyen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olyan mérhető függvények sorozata, mely pontonként konvergál egy  $f$  mérhető függvényhez, azaz  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  minden  $x \in X$  mellett, midőn  $n \rightarrow \infty$ . Tegyük fel, hogy létezik  $h \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  függvény, melyre  $|f_n| \leq h$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

Ekkor  $f_n$  és  $f \in L_1$  továbbá  $f_n \rightarrow f$  az  $L_1$  metrikus tér topológiájában, azaz  $\|f - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$ , valamint

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$



**Bizonyítás.**

Világos, hogy  $|f| \leq h$  ezért  $f \in L_1$  is fennáll. Nyilvánvaló, hogy  $|f_n - f| \leq 2h$ , ezért a  $g_n \doteq 2h - |f_n - f|$  egy nem negatív tagú függvényt sorozat, melyre  $\liminf g_n = 2h$ . Alkalmazzuk a Fatou-lemmát:

$$\begin{aligned} \int_X 2h \, d\mu &= \int_X \left( \liminf_n g_n \right) d\mu \leq \liminf \int_X g_n \, d\mu = \int 2h \, d\mu + \liminf_n \left( - \int_X |f_n - f| \, d\mu \right) \\ &= \int 2h \, d\mu - \limsup_n \int_X |f_n - f| \, d\mu. \end{aligned}$$

Amiből kihasználva, hogy  $\int_X 2h \, d\mu \in \mathbb{R}$  azt kapjuk, hogy  $\limsup_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ . Ez nyilván azt jeleti, hogy  $\|f - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$ . Ebből  $|\int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu| \leq \int |f_n - f| \, d\mu = \|f - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$  már könnyen következik.  $\square$

#### 1.6.11 Tétel. (Lebesgue tétele sorokra)

Tegyük fel, hogy  $f_n$  olyan mérhető függvények, melyekre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu < \infty.$$

Ekkor az  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  sor abszolút konvergens  $\mu$  m.m.  $x \in X$  esetén. Ha  $f$  jelöli az összefüggvényt, azaz  $f \doteq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , akkor  $f \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  és

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

#### 1.6.12 Definíció. (teljes mérték)

Egy  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéket teljesnek nevezünk, ha minden nullmértékű halmaz tetszőleges részhalmaza mérhető. Magyarul:  $E \subseteq F \in \mathcal{M}$  és  $\mu(F) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$ .

#### 1.6.13 Állítás. (mérték teljessé tétele)

Amennyiben  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  egy mértéktér, úgy létezik legszűkebb olyan  $(X, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu})$  teljes mértéktér, melyre  $\mathcal{M} \subseteq \hat{\mathcal{M}}$ , és  $\mu(E) = \hat{\mu}(E)$  minden  $E \in \mathcal{M}$  esetén.

**Bizonyítás.**

Adott  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktérből kiindulva, legyen

$$\hat{\mathcal{M}} \doteq \{E \subseteq X : \exists A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq E \subseteq B \text{ és } \mu(B \setminus A) = 0\}.$$

Könnyen látható, hogy  $\mathcal{M} \subseteq \hat{\mathcal{M}}$  és  $\hat{\mathcal{M}}$  egy  $\sigma$ -algebra.

Amennyiben  $E \in \hat{\mathcal{M}}$ , valamint  $A, B \in \mathcal{M}$ ,  $A \subseteq E \subseteq B$ ,  $\mu(B \setminus A) = 0$  és létezik egy másik  $A_1, B_1 \in \mathcal{M}$ ,  $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ ,  $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$  előállítás is, akkor  $A_1 \setminus A \subseteq E \setminus A \subseteq B \setminus A$ , ezért  $\mu(A_1 \setminus A) = 0$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $\mu(A \setminus A_1) = 0$  is fennáll, amiből az  $A = (A \cap A_1) \cup (A \setminus A_1)$  és  $A_1 = (A \cap A_1) \cup (A_1 \setminus A)$  egyenlőségek miatt

$$\mu(A) = \mu(A \cap A_1) = \mu(A_1)$$

is teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy  $E \in \hat{\mathcal{M}}$  esetén

$$\hat{\mu}(E) \doteq \mu(A) \text{ egy olyan } A \in \mathcal{M} \text{ halmazra, melyhez } \exists B \in \mathcal{M}, \mu(B \setminus A) = 0$$

definíció jól definiálja a  $\hat{\mu}$  halmazfüggvényt az  $\hat{\mathcal{M}}$   $\sigma$ -algebrán.

Nyilvánvaló, hogy  $\hat{\mu}$  egy  $\sigma$ -additív kiterjesztése  $\mu$ -nek  $\mathcal{M}$ -ről  $\hat{\mathcal{M}}$ -ra.

Tegyük most fel, hogy van egy  $(X, \mathcal{N}, \nu)$  teljes mértéktér, amely szintén kiterjesztése az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktérnek. Ha  $E \in \hat{\mathcal{M}}$ , akkor  $E = A \cup (E \setminus A)$  előállításban  $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  és  $E \setminus A \subseteq B \setminus A$  miatt az  $E \setminus A$  halmaz részhalmaza a  $\nu$ -null mértékű  $B \setminus A$  halmaznak, amiből az  $(X, \mathcal{N}, \nu)$  teljessége miatt  $E \setminus A \in \mathcal{N}$  is következik. Így tehát  $\hat{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{N}$  ami azt jelenti, hogy valóban a fent konstruált  $(X, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mu})$  a legszűkebb teljes kiterjesztése az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktérnek.  $\square$

## 1.7. A Fubini-tétel

Legyen  $(X, \mathcal{M})$  és  $(Y, \mathcal{N})$  mérhető tér és  $(X \times Y, \Sigma)$  ezek szorzata, azaz  $\Sigma \doteq \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ .

### 1.7.1 Definíció. (szorzattérbeli halmaz szelete)

Az  $E \subseteq X \times Y$  halmaz és  $x \in X$  esetén legyen  $E_x \doteq \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ , valamint hasonlóan  $y \in Y$  mellett  $E^y \doteq \{x \in X : (x, y) \in E\}$ . Az  $E_x$  és  $E^y$  halmazokat az  $E$  halmaz  $x$ -metszetének vagy  $x$ -szeletének nevezzük.

### 1.7.2 Könnyen látható, hogy $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$ ; $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$ ; $(E^c)_x = (E_x)^c$ . Az is világos, hogy $(A \times B)_x$ épp $B$ , ha $x \in A$ és egyébként $\emptyset$ .

### 1.7.3 Állítás.

Szozat mérhető halmaz minden metszete mérhető, azaz  $F \in \Sigma$  esetén  $F_x \in \mathcal{N}$  és  $F^y \in \mathcal{M}$  minden  $x \in X$  és  $y \in Y$  esetén.

**Bizonyítás.**

Legyen  $\mathcal{H} \doteq \{E \subseteq X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \forall x \in X\}$ . Könnyen látható, hogy  $\mathcal{H}$  egy  $\sigma$ -algebra az  $X \times Y$  szorzathalmaz felett. világos, hogy  $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ , ezért  $\Sigma = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{H}$ . Ezt kellett belátni.  $\square$

### 1.7.4 Definíció. (függvény szelete)

Legyen  $f$  az  $X \times Y$  on értelmezett függvény. Tetszőleges  $x \in X$  mellett  $f_x$  legyen az az  $Y$ -on értelmezett függvény, melyre

$$f_x(y) \doteq f(x, y).$$

### 1.7.5 Világos, hogy tetszőleges $V$ halmazra $(f^{-1}(V))_x = f_x^{-1}(V)$ , ha $f$ a szorzaton értelmezett.

### 1.7.6 Állítás. (mérhető függvény szeletei is mérhetőek)

Szozat-mérhető függvény minden metszete mérhető.

### 1.7.7 Állítás. (Fubini tétele halmazokra)

Legyen az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  és  $(Y, \mathcal{N}, \lambda)$  mértékterek  $\sigma$ -végesek. Legyen  $Q \in \Sigma$  rögzített szorzat-mérhető halmaz és legyen

$$\phi(x) \doteq \lambda(Q_x) \text{ valamint } \psi(y) \doteq \mu(Q^y).$$

Ekkor  $\phi$  függvény  $\mathcal{M}$ -mérhető,  $\psi$  függvény  $\mathcal{N}$ -mérhető és

$$\int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\lambda.$$

**Bizonyítás.**

Jelölje  $\Omega$  az  $X \times Y$  azon  $Q$  részhalmazainak halmazát, melyekre az állítás teljesül. Most is azt kell igazolnunk, hogy  $\Omega \subseteq \Sigma$ . Ehhez először azt gondoljuk meg, hogy  $\Omega$  rendelkezik az alábbi négy tulajdonsággal.

(1) Minden mérhető téglát  $\Omega$ -beli, azaz  $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subseteq \Omega$ .

(2)  $\Omega$  zárt a megszámlálható monoton egyesítésre, azaz  $Q_n \in \Omega \forall n \in \mathbb{N}$  és  $Q_n \subseteq Q_{n+1}$  esetén  $Q \doteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$ .

(3)  $\Omega$  zárt a megszámlálható monoton metszetre feltéve, hogy a halmazok valamely véges mértékű téglának a részhalmazai. Pontosabban:  $Q_n \in \Omega \forall n \in \mathbb{N}$  és  $Q_{n+1} \subseteq Q_n$  esetén  $Q \doteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$  feltéve, hogy  $Q_1 \subseteq A \times B$ , ahol  $A \in \mathcal{M}$ ,  $B \in \mathcal{N}$  valamint  $\mu(A) < +\infty$  és  $\lambda(B) < +\infty$ .

(4)  $\Omega$  zárt a véges diszjunkt egyesítésre, azaz  $Q_n \in \Omega \ n = 1, \dots, N$  és  $Q_i \cap Q_j = \emptyset \ (i \neq j)$  esetén  $Q \doteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$ .

(5)  $\Omega$  zárt a megszámlálható diszjunkt egyesítésre, azaz  $Q_n \in \Omega \ n \in \mathbb{N}$  és  $Q_i \cap Q_j = \emptyset \ (i \neq j)$  esetén  $Q \doteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \Omega$ .

A fenti öt tulajdonságból és a Dynkin-tételből a Fubini-tétel halmazokra vonatkozó alakja már könnyen fog látszani. Nézzük a fentiek igazolását.

1. Legyen most  $Q = A \times B$ , ahol  $A \in \mathcal{M}$  és  $B \in \mathcal{N}$ . Világos, hogy  $\lambda((Ax_B)_x) = \lambda(B) \chi_A(x)$ , ezért  $A$  mérhetősége miatt a  $\phi = \lambda(B) \chi_A$  függvény valóban mérhető. Ugyanígy  $\psi = \mu(A) \chi_B$  ezért most  $B$  mérhetősége miatt lesz  $\psi$  is mérhető. Az egyszerű függvény integráljának definíciója szerint

$$\int_X \phi d\mu = \int_X \lambda(B) \chi_A d\mu = \lambda(B) \mu(A) = \mu(A) \lambda(B) = \int_Y \mu(A) \chi_B d\lambda = \int_Y \psi d\lambda.$$

Ezt kellett (1) igazolásához belátni.

2. Legyen tehát  $\phi_n(x) = \lambda((Q_n)_x)$ ,  $\psi_n(y) = \mu((Q_n)^y)$  valamint  $\phi$  és  $\psi$  a tétel kimondása szerint definiálva. Mivel a  $Q_n$  halmassorozat monoton növekvő, ezért a  $(Q_n)_x$  metszethalmassorozat és monoton nő, valamint ezek egyesítésére  $\cup_n (Q_n)_x = (\cup_n Q_n)_x$ . Alkalmazva a mérték monoton folytonosságára vonatkozó (1.2.6) állítást azt kapjuk, hogy tetszőleges  $x \in X$  mellett  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$  monoton növekvő módon. Hasonlóan minden  $y \in Y$  esetén  $\psi_n(y) \rightarrow \psi(y)$  szintén monoton növekedőleg. Ebből azonnal következik, hogy  $\phi$  egy  $\mathcal{M}$ -mérhető,  $\psi$  pedig egy  $\mathcal{N}$ -mérhető függvény. A monoton konvergencia tételt (1.5.5) kétszer használva  $\int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu$  és  $\int_X \psi_n d\lambda \rightarrow \int_X \psi d\lambda$ . No de  $\int_X \phi_n d\mu = \int_X \psi_n d\lambda$ , hiszen  $Q_n \in \Omega$ , ezért  $\int_X \phi d\mu = \int_X \psi d\lambda$  is valóban fennáll. Ezt kellett (2) igazolásához belátni.

3. Igazolása (2)-vel majdnem teljesen analóg. Legyenek a  $\phi_n$  és  $\psi_n$  függvények ugyanúgy definiálva. Tudjuk, hogy  $Q_1 \subseteq A \times B$ , ezért  $\lambda((Q_1)_x) \leq \lambda(B)$ , ezért a  $(Q_n)_x$  monoton fogyó halmazokra is alkalmazhatjuk a mérték monoton folytonosságára vonatkozó (1.2.6) tételt. Így azt kapjuk, hogy  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$  monoton fogyó módon. Hasonlóan  $\psi_n(y) \rightarrow \psi(y)$  szintén monoton fogyólag. Ebből persze  $\phi$  és  $\psi$  mérhetősége azonnal következik. A majorált konvergencia tétel alkalmazhatóságához becsüljük az alábbi integrálokat:

$$\int_X \phi_n d\mu \leq \int_X \phi_1 d\mu \leq \int_X \lambda(B) \chi_A d\mu = \lambda(B) \mu(A) < +\infty.$$

Azt kaptuk tehát, hogy maga  $\phi_1$  egy  $\mathcal{L}_1$ -beli majoránsa a  $\phi_n$  függvényeknek. Hasonlóan kapjuk, hogy  $\psi_1$  egy  $\mathcal{L}_1$ -beli majoránsa a  $\psi_n$  függvényeknek. Most az (1.6.10) tételt kétszer használva  $\int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu$  és  $\int_X \psi_n d\lambda \rightarrow \int_X \psi d\lambda$ . No de a (2)-vel most már teljesen megegyező módon  $\int_X \phi_n d\mu = \int_X \psi_n d\lambda$ , ezért  $\int_X \phi d\mu = \int_X \psi d\lambda$  is valóban fennáll. Ezt kellett (3) igazolásához belátni.

4. Tartozzanak megint a  $\phi_n$  és  $\psi_n$  függvények  $Q_n$ -hez, valamint  $\phi$  és  $\psi$  a  $Q$ -hoz. A diszjunkt egyesítés és a mértékek végesen additivitása szerint  $\phi = \sum \phi_n$  és  $\psi = \sum \psi_n$ . Ezért hát  $\phi$  és  $\psi$  mérhetőek a megfelelő  $\sigma$ -algebrákra nézve. Az integrál végesen additivitása miatt pedig  $\int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\lambda$  is fennáll. Ezt kellett (4) igazolásához.

5. Nyilvánvaló következménye a fenti (4) és (2) állításnak.

A bizonyítás befejezéséhez tegyük fel, hogy  $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  valamint  $Y = \cup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$ , ahol az egyes  $X_n \in \mathcal{M}$  és  $Y_m \in \mathcal{N}$  halmazok diszjunktak és mérhetőek, valamint  $\mu(X_n) < \infty$  és  $\lambda(Y_m) < \infty$  minden szóba jövő  $n$  és  $m$  esetén. Legyen

$$\Phi \doteq \{Q \subseteq X \times Y : Q \cap (X_n \times Y_m) \in \Omega \text{ fennáll } \forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ esetén}\}.$$

Mivel  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  maga is metszetzárt, ezért (1) miatt  $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subseteq \Phi$ . Ebből (4) miatt  $r(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \subseteq \Phi$ , hiszen  $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$  félgyűrűk szorzataként maga is félgyűrű és láttuk, hogy félgyűrű által generált gyűrű elemei a félgyűrű elemek véges diszjunkt egyesítései. A (2) és (3) valamint az  $X_n$  és  $Y_m$  halmazok véges mértékűsége szerint  $\Phi$  monoton osztály. Ebből pedig  $m(r(\mathcal{M} \times \mathcal{N})) \subseteq \Phi$  is azonnal következik. De a Dynkin-tétel következménye képpen láttuk, hogy  $m(r(\mathcal{M} \times \mathcal{N})) = \sigma(r(\mathcal{M} \times \mathcal{N})) = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \Sigma$ . Azt kaptuk tehát, hogy minden  $Q \in \Sigma$  szorzat-mérhető halmaz esetén  $Q \cap (X_n \times Y_m) \in \Omega$ . De persze  $Q = Q \cap (X \times Y) = Q \cap (\cup_{n,m} X_n \times Y_m) = \cup_{n,m} (Q \cap (X_n \times Y_m))$ . Az (5) állítás szerint tehát  $Q \in \Omega$  valóban fennáll.  $\square$

## 1.7.8 Definíció. (szorzatmérték)

Legyen az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  és  $(Y, \mathcal{N}, \lambda)$  mérték terek  $\sigma$ -végesek. és  $Q \in \Sigma$ . Defináljuk a  $\mu \times \lambda$  halmazfüggvényt a következőképpen

$$(\mu \times \lambda)(Q) \doteq \int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y).$$

Világos, hogy  $Q = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$  esetén  $\lambda(Q_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((Q_n)_x)$  ezért a pozitív tagú sorokra vonatkozó B.L. tétel szerint  $\int_X \lambda(Q_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \lambda((Q_n)_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu(Q_n^y) d\lambda(y) = \int_Y \mu(Q^y) d\lambda(y)$ , tehát így valóban mértéket kapunk a szorzat- $\sigma$ -algebrán.

## 1.7.9 Megjegyzés.

Voltképpen kiterjesztettünk.

## 1.7.10 Tétel. (Fubini tétele nem negatív mérhető függvényre)

Legyen az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  és  $(Y, \mathcal{N}, \lambda)$  mérték terek  $\sigma$ -végesek,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  nem negatív szorzatmérhető függvény. Jelölje

$$\phi(x) \doteq \int_Y f_x d\lambda \text{ valamint } \psi(y) \doteq \int_X f^y d\mu.$$

Ekkor a  $\phi$  és  $\psi$  függvények mérhetőek és

$$\int_X \phi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi d\lambda.$$

1.7.11 Tétel. (Fubini tétele  $L_1$ -beli függvényre)

$L_1$ -re.

## 1.7.12 Megjegyzés.

Fubini alkalmazhatóságának feltétele, hogy az egyik abszolút iterált integrál véges legyen.

1.7.13 (ellenpélda a Fubini-tételre) Legyen  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olyan szigorúan növekvő valóssorozat, amelyre  $\delta_1 = 0$  és  $\delta_n \rightarrow 1$ . A  $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények legyenek úgy megadva, hogy  $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \subset (\delta_n, \delta_{n+1})$ , és  $\int_0^1 g_n = 1$ . Legyen  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a következő függvény:

$$f(x, y) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Azt mutatjuk meg, hogy

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

Világos, hogy adott  $y$  legfeljebb csak az egyik  $(\delta_n, \delta_{n+1})$  intervallumocskába eshet, ezért az összegnek csak egy tagja nem nulla, így az  $f$  folytonos az  $(1, 1)$  ponttól eltekintve az egész egység-négyzeten.

Bizonyítás.

Kezdjük a baloldallal: Rögzített  $x \in [0, 1]$  mellett:

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \int_{\cup_{i=1}^{\infty} (\delta_i, \delta_{i+1})} f(x, y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} f(x, y) dy.$$

Viszont a  $(\delta_i, \delta_{i+1})$  intervallumon kívül a  $g_i$  függvény 0, így az  $f$ -nek egyedül az  $i$ -edik tagja jön szóba:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} (g_i(x) - g_{i+1}(x)) g_i(y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( (g_i(x) - g_{i+1}(x)) \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} g_i(y) dy \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (g_i(x) - g_{i+1}(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (g_1(x) - g_N(x)) = g_1(x). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 g_1(x) dx = 1.$$

Most nézzük a jobboldalt: Rögzített  $y \in [0, 1]$  mellett az első intervallumot különírva:

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x, y) dx + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} f(x, y) dx$$

Most azt vegyük észre, hogy a  $(\delta_1, \delta_2)$  intervallumon az  $f$ -nek csak az első tagjának első fele nem zérus, míg az  $i$ -edik intervallumon csak az  $i-1$ -edik tag második felét és az  $i$ -edik tagot első felét kell figyelembe venni. Tehát:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x, y) dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} g_1(x) g_1(y) dx = g_1(y) \int_{\delta_1}^{\delta_2} g_1(x) dx = g_1(y)$$

valamint

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} f(x, y) dx &= \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} -g_i(x) g_{i-1}(y) + g_i(x) g_i(y) dx \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} (g_i(y) - g_{i-1}(y)) \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} g_i(x) dx = \sum_{i=2}^{\infty} (g_i(y) - g_{i-1}(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) - g_1(y) = -g_1(y) \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 g_1(y) - g_1(y) dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Ezt kellett megmutatni. □

## 1.8. A Caratheodory-féle kiterjesztési eljárás

Az egész fejezetben legyen  $\mathcal{H}$  olyan  $X$ -beli halmazrendszer, amelyre  $\emptyset \in \mathcal{H}$ .

### 1.8.1 Definíció. (külső mérték)

Egy  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  függvényt külső mértéknek nevezünk a  $\mathcal{H}$  halmazrendszeren, ha

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. monoton, azaz  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  és  $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow \mu(H_1) \leq \mu(H_2)$ ,
3.  $\sigma$ -szubadditív, azaz  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ ,  $H, H_n \in \mathcal{H} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n)$ .

A következő állítás egy nagyon fontos példa külső mértékre.

### 1.8.2 Állítás. (generált külső mérték)

Legyen  $\mathcal{H}$  egy tetszőleges  $X$ -beli halmazrendszer, amelyre  $\emptyset \in \mathcal{H}$ ,  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  halmazfüggvény, amelyre  $\mu(\emptyset) = 0$ . Definíálj

$$\mu^*(M) \doteq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) : M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n, H_n \in \mathcal{H} \right\}.$$

(Itt az üreshalmaz infimumán  $+\infty$ -t értjük.) Ekkor  $\mu^*$  az egész hatványhalmazon értelmezett külső mérték, továbbá minden  $H \in \mathcal{H}$  esetén  $\mu^*(H) \leq \mu(H)$ .

**Bizonyítás.**

Az utóbbi egyenlőség következik abból, hogy  $\{H\}$  is egy  $\mathcal{H}$ -beli legfeljebb megszámlálható lefedése  $H$ -nak, amiből persze  $\mu^*(H) = 0$  is látszik. A monotonitás is nyilvánvaló, hiszen bővebb halmaz infimuma kisebb. A  $\sigma$ -szubadditivitáshoz tegyük fel, hogy  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ . Amennyiben  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) = +\infty$ , úgy készen is vagyunk. Ellenkező esetben rögzítsünk valamely  $\varepsilon > 0$  számot. Persze  $\mu^*(M_n) < +\infty$ , ezért az  $\varepsilon/2^n$  számhoz létezik  $H_i^{(n)} \in \mathcal{H}$ ,  $i = 1, \dots, +\infty$ ,  $M_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i^{(n)}$  lefedés, amelyre  $\mu^*(M_n) + \varepsilon/2^n > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i^{(n)})$ . Ekkor persze

$$M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i^{(n)}, \text{ ezért } \mu^*(M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(M_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) + \varepsilon.$$

Ez éppen a  $\mu^*$  halmazfüggvény  $\sigma$ -szubadditivitását jelenti, ezért  $\mu^*$  valóban az egész hatványhalmazon értelmezett külső mérték.  $\square$

### 1.8.3 Állítás. (1. lépés)

Legyen  $\mathcal{H}$  metszet zárt és  $\emptyset \in \mathcal{H}$ . Ha  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  külső mérték, akkor a fent definiált  $\mu^*$  kiterjesztése is  $\mu$ -nek, azaz minden  $H \in \mathcal{H}$  mellett  $\mu(H) = \mu^*(H)$ .

**Bizonyítás.**

Az előző állítás szerint csak a  $\mu(H) \leq \mu^*(H)$  egyenlőség szorul indoklásra. Amennyiben  $\mu^*(H) = +\infty$ , úgy készen is vagyunk. Ellenkező esetben adott  $\varepsilon > 0$  számhoz tekintsünk egy olyan megszámlálható  $\mathcal{H}$ -beli lefedését  $H$ -nak ( $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ ,  $H_n \in \mathcal{H}$ ), amelyre  $\sum \mu(H_n) < \mu^*(H) + \varepsilon$ . No de  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H \cap H_n)$  és  $H \cap H_n \in \mathcal{H}$ . Ezért a külső mérték  $\sigma$ -szubadditivitása és monotonitása szerint

$$\mu(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H \cap H_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H_n) < \mu^*(H) + \varepsilon.$$

Ezt kellett belátni.  $\square$

### 1.8.4 Definíció. (Caratheodory értelemben mérhető halmaz)

Legyen  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  olyan halmazfüggvény, melynek értékkészlete a  $+\infty$  és  $-\infty$  közül csak az egyiket tartalmazza, azaz  $\mu(A) + \mu(B)$  minden  $A, B$  halmazra értelmezett. Definíálj

$$\mathcal{A}_\mu \doteq \{A \subseteq X : \forall M \subseteq X \text{-re } \mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c)\}$$

Az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszert a  $\mu$ -re nézve Caratheodory értelemben mérhető halmazoknak nevezzük.

### 1.8.5 Állítás. (2. lépés)

Legyen  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , melyre  $\mu(\emptyset) = 0$ . Ekkor az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszer egy algebra; és a  $\mu$  halmazfüggvénynek az  $\mathcal{A}_\mu$ -re való megszorítása egy végesen additív halmazfüggvény.

Definiálj tetszőlegesen rögzített  $M \subseteq X$  mellett  $\mu_M(A) \doteq \mu(M \cap A)$  az egész hatványhalmazon értelmezett  $\mu_M$  halmazfüggvényt. Ekkor  $\mu_M$ -nek  $\mathcal{A}_\mu$ -re való megszorítása is végesen additív.

**Bizonyítás.**

Először azt mutatjuk meg, hogy az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszerre: (1)  $X \in \mathcal{A}_\mu$ ; (2)  $A \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\mu$ ; (3)  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_\mu$ . Ez első két állítás az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszer definíciójának azonnali következménye. A metszetre való zártság bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges  $M \subseteq X$  halmazra  $\mu(M) = \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu(M \cap (A_1 \cap A_2)^c)$ . Az  $A_1$  halmaz Caratheodory mérhetősége miatt

$$\mu(M) = \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c).$$

Hasonlóan az  $A_2$  halmaz Caratheodory mérhetősége miatt

$$\mu(M \cap A_1) = \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu(M \cap A_1 \cap A_2^c).$$

Újra használva az  $A_1$  halmaz Caratheodory mérhetőségét azt kapjuk, hogy

$$\mu(M \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu((M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \mu((M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1^c).$$

No de a jobboldalon szereplő halmazokra

$$\begin{aligned} (M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1 &= ((M \setminus A_1) \cup (M \setminus A_2)) \cap A_1 = (M \setminus A_2) \cap A_1 \text{ és} \\ (M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1^c &= ((M \setminus A_1) \cup (M \setminus A_2)) \cap A_1^c = M \setminus A_1. \end{aligned}$$

Összegezve tehát

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(M \cap A_1) + \mu(M \cap A_1^c) = \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu(M \cap A_1 \cap A_2^c) + \mu(M \cap A_1^c) \\ &= \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu((M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + \mu((M \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_1^c) \\ &= \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu(M \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(M \cap A_1 \cap A_2) + \mu(M \cap (A_1 \cap A_2)^c). \end{aligned}$$

Ezt kellett belátni ahhoz, hogy igazoljuk az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszer  $\sigma$ -algebra mivoltát.

Legyen most  $M \subseteq X$  rögzítve, továbbá  $A \in \mathcal{A}_\mu$  és  $B \subseteq X$  diszjunkt halmazok. Ekkor alkalmazva az  $A$  halmaz Caratheodory-értelemben vett mérhetőségének definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mu_M(A \cup B) &= \mu(M \cap (A \cup B)) = \mu((M \cap (A \cup B)) \cap A) + \mu((M \cap (A \cup B)) \cap A^c) \\ &= \mu(M \cap A \cap (A \cup B)) + \mu(M \cap A^c \cap (A \cup B)) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap B) \\ &= \mu_M(A) + \mu_M(B). \end{aligned}$$

Ebből következik a  $\mu_M$  és a  $\mu_X = \mu$  halmazfüggvények végesen additivitása az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazalgebra fölött.  $\square$

### 1.8.6 Állítás. (3. lépés)

Legyen  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  külső mérték. Ekkor az  $\mathcal{A}_\mu$  halmazrendszer egy  $\sigma$ -algebra;  $\mu(A) = 0$  esetén az  $A \in \mathcal{A}_\mu$  is fennáll;  $\mu$ -nek az  $\mathcal{A}_\mu$ -re való  $\tilde{\mu}$  megszorítása egy  $\sigma$ -additív halmazfüggvény; és az  $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$  mértéktér teljes.

**Bizonyítás.**

Láttuk, hogy  $\mathcal{A}_\mu$  algebra elegendő tehát belátni, hogy  $\mathcal{A}_\mu$  zárt a diszjunkt megszámlálható egyesítésre. Legyenek  $A_n \in \mathcal{A}_\mu$  egymástól diszjunkt halmazok és legyen  $A = \cup A_n$  ezek egyesítése. Legyen  $B_N \doteq \cup_{n=1}^N A_n \ \forall N \in \mathbb{N}$  mellett. Mivel  $\mathcal{A}_\mu$  algebra, ezért  $B_N \in \mathcal{A}_\mu$ . Trivi, hogy  $B_N \subseteq A$ . A  $B_N$  halmaz Caratheodory-mérhetősége miatt  $\mu(M) = \mu(M \cap B_N) + \mu(M \cap B_N^c) = \sum_{n=1}^N \mu(M \cap A_n) + \mu(M \cap B_N^c) \geq \sum_{n=1}^N \mu(M \cap A_n) + \mu(M \cap A^c)$ . De ez minden  $N \in \mathbb{N}$  esetén fennáll, azaz

$$\mu(M) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M \cap A_n) + \mu(M \cap A^c) \geq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c).$$

Megfordítva a  $\mu(M) \leq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c)$  egyenlőtlenség mindig fennáll a külső mérték szubadditivitása miatt.

Ha valamely  $A \subseteq X$  mellett  $\mu(A) = 0$ , akkor minden  $M \in \mathcal{P}(X)$  esetén  $\mu(M) \leq \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c) \leq \mu(M)$ , tehát  $\mu(M) = \mu(M \cap A) + \mu(M \cap A^c)$  is teljesül.

Láttuk már, hogy  $\tilde{\mu}$  additív, ezért fenti jelöléseket használva

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(B_N) = \mu(B_N) \leq \mu(A) = \tilde{\mu}(A)$$

egyenlőtlenség fennáll minden  $N$  természetes szám mellett. Ebből persze a  $\tilde{\mu}$  szuperadditivitása már következik, és mivel  $\tilde{\mu}$  egy külső mérték megszorításával van definiálva ezért nyilvánvalóan szubadditív is.

Legyen most  $B \subseteq A \in \mathcal{A}_\mu$  és  $\tilde{\mu}(A) = 0$ . Ekkor a külső mérték monotonitása szerint  $\mu(B) = 0$  is fennáll, tehát a már bizonyítottak szerint  $B \in \mathcal{A}_\mu$  is teljesül. Ez éppen azt jelenti, hogy  $\tilde{\mu}$  teljes mérték az  $\mathcal{A}_\mu$   $\sigma$ -algebrán.  $\square$

#### 1.8.7 Tétel. (4. lépés, kiterjesztési tétel)

Legyen  $\mathcal{P}$  egy félgyűrű és  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mérték. Jelölje  $\mu^*$  a  $\mu$  generálta külső mértéket, amely az egész hatványhalmazon van értelmezve. Jelölje  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  a Caratheodory értelemben  $\mu^*$  mérhető halmazok  $\sigma$ -algebráját. Ekkor  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$ .

**Bizonyítás.**

Elegendő meggondolnunk, hogy  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$ . Legyen  $A \in \mathcal{P}$  a továbbiakban rögzített. Világos, hogy tetszőleges  $M$  mellett  $\mu^*(M) \leq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$  hiszen  $\mu^*$  szubadditív. Amennyiben  $\mu^*(M) = +\infty$  lenne, akkor készen is vagyunk. Ha  $\mu^*(M) < \infty$ , akkor meg kell mutatnunk, hogy  $\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$ . Legyen tehát  $M \subseteq \cup_n A_n$ , ahol  $A_n \in \mathcal{P}$  és  $\sum_n \mu(A_n) < \infty$ . Persze ekkor  $M \cap A \subseteq \cup_n (A_n \cap A)$  egy  $\mathcal{P}$ -beli halmazokból álló lefedés ezért  $\mu^*$  definíciója miatt

$$\mu^*(M \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A).$$

Hasonlóan  $M \cap A^c \subseteq \cup_n (A_n \setminus A)$ . Az  $A_n \setminus A$  alakú halmazok előállnak mint diszjunkt  $\mathcal{P}$ -beli halmazok egyesítése, ezért  $\cup_n (A_n \setminus A)$  előáll mint  $\mathcal{P}$ -beli lefedés. Az  $r(\mathcal{P})$  generált gyűrűre kiterjesztett mértéket  $\hat{\mu}$ -pal jelölve

$$\begin{aligned} \mu^*(M \cap A^c) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n \setminus A) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n \setminus (A_n \cap A)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\mu}(A_n) - \hat{\mu}(A_n \cap A)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_n \cap A)). \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk a gyűrűn értelmezett mérték szubtraktivitását, ami fennáll  $\hat{\mu}(A_n) = \mu(A_n) < \infty$  szerint. Az előző két kiemelt sort összevetve és kihasználva, hogy a  $\sum_n \mu(A_n \cap A)$  sor konvergens azt kapjuk, hogy

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_n \cap A)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

fennáll minden  $M \subseteq \cup_n A_n$   $\mathcal{P}$ -beli fedés mellett, tehát  $\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \mu^*(M)$  valóban teljesül.  $\square$

**1.8.8 A Caratheodory-féle kiterjesztési eljárás** az alábbi eljárást értjük. Tekintsünk egy  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$  félgyűrűn értelmezett  $\mu$  mértéket. Láttuk, hogy ez kiterjeszthető egy az egész hatványhalmazon értelmezett  $\mu^*$  külső mértékké. Jelölje  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  az ezen  $\mu^*$  külső mérték szerint Caratheodory értelemben mérhető halmazok rendszerét. Tudjuk, hogy  $\mathcal{A}_{\mu^*}$  egy a  $\mathcal{P}$  félgyűrűt tartalmazó  $\sigma$ -algebra. Jelölje  $\tilde{\mu}$  a  $\mu^*$ -nak erre az  $\mathcal{A}_{\mu^*}$   $\sigma$ -algebrára való megszorítását. Láttuk, hogy  $\tilde{\mu}$  egy  $\sigma$ -additív halmazfüggvény és az  $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$  teljes mértéktér, és persze  $\tilde{\mu}$  a  $\mu$  kiterjesztése.



- 1.8.9 Az előző tételek nyilvánvaló következménye, hogy egy félgűrűn értelmezett mérték teljes mérték-ként kiterjeszthető a félgűrű által generált  $\sigma$ -algebrára is, csak a fenti  $\tilde{\mu}$  mértéket kell a generált  $\sigma$ -algebrára leszorítanunk.

Felmerül a kérdés, hogy a lehet-e esetleg más módszerrel másfajta mértékkiterjesztéseket gyártani. Gondoljunk arra, hogy a Fubini-tétel bizonyításakor már kiterjesztettünk egy a szorzat félgűrűn értelmezett szorzat mértéket a generált szorzat  $\sigma$ -algebrára. A kérdés, hogy mi a kapcsolat a két kiterjesztés között? Az alábbiakban erre a kérdésre adunk választ. Azt fogjuk kapni, hogy  $\sigma$ -véges esetben minden, a generált  $\sigma$ -algebráig terjedő mértékkiterjesztés ugyanazt az eredményt adja, mint a fent megismert Caratheodory-féle kiterjesztési eljárás.

#### 1.8.10 Állítás.

*A kiterjesztési eljárásban definiált  $\tilde{\mu}$  a  $\mathcal{P}$  félgűrűn értelmezett mérték maximális kiterjesztése  $\sigma(\mathcal{P})$ -re azaz, ha  $\nu$  egy másik mérték  $\sigma(\mathcal{P})$ -n, melyre  $\nu = \mu$  a  $\mathcal{P}$ -beli halmazokon, akkor  $\nu \leq \tilde{\mu}$ .*

**Bizonyítás.**

Legyen tehát  $E \in \sigma(\mathcal{P})$  rögzítve. Amennyiben  $\mu^*(E) = \infty$  úgy készen is vagyunk. Ha van  $E$ -nak  $E \subseteq \cup_n A_n$  befedése melyre  $A_n \in \mathcal{P}$  és  $\sum_n \mu(A_n) < \infty$  teljesül, akkor a  $\nu$  mérték  $\sigma$ -szubadditivitása miatt  $\nu(E) \leq \nu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \nu(A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ . Ez épp azt jelenti, hogy  $\nu(E) \leq \mu^*(E) = \tilde{\mu}(E)$ .  $\square$

#### 1.8.11 Definíció. ( $\sigma$ -véges mérték)

*Legyen  $\mathcal{P}$  egy félgűrű és  $\mu$  egy mérték  $\mathcal{P}$ -n. Azt mondjuk, hogy a  $\mu$  mérték  $\sigma$ -véges mérték, ha léteznek  $X_n \in \mathcal{P}$  halmazok, melyekre  $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$  és  $\mu(X_n) < \infty$ .*

Világos, hogy a fenti definícióban azt is feltehetjük, hogy az  $X_n$  halmazok egymástól diszjunktak. ( $\mathcal{P}$  félgűrű.)

#### 1.8.12 Tétel. (Unicitás)

*Legyen a  $\mathcal{P}$  félgűrűn definiált  $\mu$  mérték  $\sigma$ -véges. Ekkor a fent definiált  $\tilde{\mu}$  a  $\mu$ -nek egyetlen mértékkiterjesztése azaz, ha  $\nu$  egy másik mérték  $\sigma(\mathcal{P})$ -n, melyre  $\nu = \mu$  a  $\mathcal{P}$ -beli halmazokon, akkor  $\nu = \tilde{\mu}$ .*

**Bizonyítás.**

Első lépésként tegyük fel, hogy  $E \in \sigma(\mathcal{P})$  olyan halmaz, melyhez létezik egy  $A \in \mathcal{P}$ , melyre  $E \subseteq A$  és  $\mu(A) < \infty$ . Ekkor  $A = E \cup (A \setminus E)$  és  $\nu \leq \mu^*$  miatt

$$\nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) = \mu(A).$$

No de a  $\mathcal{P}$ -beli halmazokon a  $\mu$  és a  $\nu$  mértékek azonosak, ezért  $\nu(E) + \nu(A \setminus E) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E)$ . Kihasználva, hogy a baloldalon két véges szám összege szerepel azt kapjuk, hogy

$$0 = (\mu^*(E) - \nu(E)) + (\mu^*(A \setminus E) - \nu(A \setminus E)).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy 0 számot előállítottuk két nem negatív szám összegeként, tehát  $\tilde{\mu}(E) = \mu^*(E) = \nu(E)$ .

Most tegyük fel, hogy  $E \in \sigma(\mathcal{P})$  tetszőleges halmaz. Mivel  $\mu$   $\sigma$ -véges a  $\mathcal{P}$ -n, ezért léteznek diszjunkt  $A_n$  halmazok, melyekre  $\mu(A_n) < \infty$  és  $X = \cup_n A_n$ . Világos, hogy  $E = \cup_n (E \cap A_n)$  és az előző pont szerint  $\tilde{\mu}(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$ . Kihasználva  $\tilde{\mu}$  és  $\nu$   $\sigma$ -additivitását kapjuk, hogy  $\nu(E) = \tilde{\mu}(E)$ .  $\square$

## 1.9. Lebesgue-mérték

Alkalmazzuk a kiterjesztési eljárást, a következő speciális esetben:  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}$  a balról zárt jobbról nyílt korlátos intervallumok félgűrűje,  $\mu = \lambda$ , ahol  $\lambda([a, b)) = b - a$ . Nem nehéz megmutatni, hogy evvel a definícióval  $\lambda$  valóban egy mérték a  $\mathcal{P}$  félgűrűn.

### 1.9.1 Definíció. (Lebesgue-mérhető halmazok és Lebesgue-mérték)

Legyen  $\mathcal{P}$  balról zárt, jobbról nyílt korlátos intervallumok félgűrűje,  $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  a hosszúság függvény. Láttuk, hogy  $\lambda$  mérték a  $\mathcal{P}$  félgűrűn. Jelölje  $\lambda^*$  a  $\lambda$  generálta külső mértéket, amely az  $\mathbb{R}$  egész hatványhalmazán van értelmezve, jelölje  $\Lambda$  a Caratheodory értelemben  $\lambda^*$  mérhető halmazok  $\sigma$ -algebráját és  $\tilde{\lambda}$  a  $\lambda^*$ -nak a  $\Lambda$ -ra való megszorítását.

A kiterjesztési tétel szerint  $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ , és  $\tilde{\lambda}(E) = \lambda(E)$  minden  $E \in \mathcal{P}$ -re, tehát a balról zárt jobbról nyílt intervallumok félgűrűjén értelmezett hosszúság függvényt kiterjesztettük egy ezt a félgűrűt tartalmazó teljes  $\sigma$ -algebrára. A  $\Lambda$   $\sigma$ -algebrát nevezzük a Lebesgue-mérhető halmazok  $\sigma$ -algebrájának. Jelöljük az egyszerűség kedvéért továbbra is  $\lambda$ -val a kiterjesztett halmazfüggvényt és nevezzük ezt Lebesgue-mértéknek.

Világos, hogy  $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ , ahol  $\mathcal{B}$  az  $\mathbb{R}$  Borel-halmazait jelöli. Megmutatható (ez nehéz), hogy  $\mathcal{B}$  elemeinek száma kontinuum, de  $\Lambda$  ekvipotens  $\mathbb{R}$  hatványhalmazával. (Cantor halmaz Lebesgue-nullmértékű és kontinuum számosságú, ezért a hatványhalmazának minden eleme a teljesség miatt mérhető)

A kiterjesztési eljárás újragondolásával kapjuk a következő állítást:

### 1.9.2 Állítás. (Lebesgue-mérték eltolás invariáns)

A Lebesgue-mérték eltolás invariáns, azaz minden  $E \in \Lambda$  esetén  $x + E \in \Lambda$ , és

$$\lambda(x + E) = \lambda(E).$$

Ennek segítségével a kiválasztási axióma lehetőséget ad annak megmutatására, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok halmaza nem teszi ki az  $\mathbb{R}$  egész hatványhalmazát.

### 1.9.3 Állítás. (Példa nem Lebesgue-mérhető halmazra)

Definiáljuk az alábbi ekvivalencia relációt a  $(0, 1)$  intervallumon.  $(x, y) \in R$  pontosan akkor, ha  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Legyen  $E$  az intervallum azon pontjainak halmaza, melyeket úgy kapunk, hogy minden ekvivalencia osztályból kivesszünk egyetlen elemet. Ez a halmaz nem Lebesgue-mérhető.

Bizonyítás.

Megmutatjuk, hogy

$$(0, 1) \subseteq \cup_{r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}} (r + E) \subseteq (-1, 2),$$

ahol a középen diszjunkt egyesítés szerepel.

·  $r, s \in \mathbb{Q}, r \neq s \Rightarrow (r + E) \cap (s + E) = \emptyset$ . Ugyanis  $r + e_1 = s + e_2$  esetén  $(e_1, e_2 \in E)$   $r - s = e_2 - e_1 \in \mathbb{Q}$ . Ez azt jelenti, hogy  $e_2$  és  $e_1$  ugyanazon ekvivalenciaosztályból származnak, tehát  $e_1 = e_2$ , azaz  $r = s$ , ami ellentmondás.

·  $\forall z \in (0, 1)$ -hez  $\exists r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ , hogy  $z \in r + E$ . Ugyanis  $\exists e \in E \subseteq (0, 1)$ , melyre  $z$  és  $e$  egymással ekvivalensek  $R$  szerint, azaz  $z - e = r \in \mathbb{Q}$ , tehát  $z = r + e$ . Másrészt  $r \in (0, 1) - (0, 1) \subseteq (-1, 1)$ .

Ha tehát  $E$  Lebesgue-mérhető lenne, akkor az  $A \doteq \cup_{r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}} (r + E)$  halmaz is Lebesgue-mérhető lenne, hiszen a Lebesgue-mérték eltolás invariáns, és  $A$  megszámlálhatóan sok Lebesgue-mérhető halmaz egyesítése. No de  $1 < \lambda(A) < 3$ , másrészt  $\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E)$ , ami vagy 0 vagy  $+\infty$  lehet. Mindkét esetben ellentmondást kapunk.  $\square$

A Lebesgue-mértékkel kapott absztrakt integrál elmélet egybeesik a klasszikus Riemann-féle integrálemeléssel olyan függvényekre, melyekre ez utóbbinak értelme van:

### 1.9.4 Állítás. (Riemann-integrálható függvény Lebesgue-integrálható is)

Legyen  $f$  egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett korlátos függvény. Amennyiben  $f$  Riemann-integrálható, akkor  $f \in L_1$  és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda,$$

ahol a bal oldal az  $f$  Riemann-integrálját és a jobboldal az  $f$ -nek a  $\lambda$  mérték szerinti integrálját jelöli.

1.9.5 Most definiáljuk  $\mathbb{R}^n$ -en a Lebesgue-mértéket. A definíció egyik fontos eleme, a Fubini-tételről szóló fejezetben a szorzatmérték definíciója utáni megjegyzésben rejlik. Arról van ugyanis szó, hogy a  $\lambda \times \lambda$  szorzatmérték már definiált a

$$(\lambda \times \lambda)(Q) \doteq \int_{\mathbb{R}} \lambda(Q_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(Q^y) d\lambda(y).$$

minden olyan  $Q$  halmazra, amely eleme a  $\Lambda \times \Lambda$  téglák generálta  $\sigma$ -algebrának. Mivel a  $\mathcal{B}$  Borel-halmazok elemei a  $\Lambda$  Lebesgue-mérhető halmazoknak, és az  $\mathbb{R}$ -beli Borel-halmazok  $n$ -szeres szorzata generálta  $\sigma$ -algebra egybeesik az  $\mathbb{R}^n$  nyílt halmazai generálta  $\sigma$ -algebrával, ezért az  $\mathbb{R}^n$  Borel-halmazain az  $n$  darab egydimenziós Lebesgue-mérték szorzata már mértékként definiálva is van, a fent kiemelt képletet alkalmazva  $n$ -ig indukcióval. Azt is láttuk, hogy evvel a definícióval egy szorzattégla esetén:

$$(\lambda \times \dots \times \lambda) \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy amennyiben ez utóbbi módon definiáljuk csak a  $\mathcal{P}$  szorzattéglákat tartalmazó félgűrűn az egy dimenziós  $\lambda$  Lebesgue-mérték  $n$ -szeres szorzatát, akkor egyrészt mértéket kapunk a  $\mathcal{P}$  halmazrendszeren, másrészt alkalmazva a kiterjesztési eljárást és annak egyértelműségét, olyan kiterjesztett mértéket kapunk, amelyet az  $\mathbb{R}^n$  Borel-halmazaira megszorítva, visszakapjuk azt a mértéket, amelyet a Fubini-tétel segítségével definiáltunk, de csak a  $\Lambda \times \Lambda$  téglák generálta  $\sigma$ -algebrán.

#### 1.9.6 Definíció. (Lebesgue-mérhető halmaz és Lebesgue-mérték)

Jelölje  $\mathcal{P}$  az  $\mathbb{R}^n$  balról zárt jobbról nyílt intervallumainak halmazát. Világos  $\mathcal{P}$  az  $n$ -szeres szorzata az  $\mathbb{R}$  balról zárt jobbról nyílt intervallumait tartalmazó félgűrűnek, ezért maga is félgűrű. A Fubini-tétel halmazokra vonatkozó alakja szerint a

$$\lambda^{(n)} \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

módon definiált halmazfüggvény mérték  $\mathcal{P}$ -n (is). Alkalmazhatjuk tehát a kiterjesztési eljárást az  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}, \lambda^{(n)})$  félgűrűre. Azt kapjuk, hogy létezik olyan  $\Lambda^{(n)}$   $\sigma$ -algebra melyre  $\mathcal{P} \subseteq \Lambda^{(n)}$  és létezik olyan továbbra is  $\lambda^{(n)}$ -el jelölt mérték kiterjesztése az eredeti mértéknek a  $\Lambda^{(n)}$   $\sigma$ -algebrára, amely teljes is. A  $\Lambda^{(n)}$   $\sigma$ -algebrát nevezzük az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok  $\sigma$ -algebrájának és a kiterjesztett  $\lambda^{(n)}$  mértéket pedig  $n$ -dimenziós Lebesgue-mértéknek.

#### 1.9.7 Állítás. (Lebesgue-féle külső mérték kívülről nyílt-reguláris)

Jelölje  $\lambda^*$  a fenti definícióban a  $\mathcal{P}$  félgűrűn értelmezett  $\lambda^{(n)}$  térfogat függvény generálta külső mértéket, és  $\lambda$  az  $n$ -dimenziós Lebesgue mérték. Ekkor minden  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  esetén

$$\lambda^*(B) = \inf \{ \lambda(G) : B \subseteq G, G \text{ nyílt} \}.$$

#### 1.9.8 Állítás. (Lebesgue-mérték reguláris)

Jelölje  $(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$  az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mértéket. Ekkor minden  $M \in \Lambda$  Lebesgue-mérető halmazhoz és minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $G$  nyílt és  $F$  zárt halmaz, hogy

$$F \subseteq M \subseteq G \text{ valamint } \lambda(G \setminus F) < \varepsilon.$$

#### 1.9.9 Definíció. ( $\mathcal{G}_\delta$ és $\mathcal{F}_\sigma$ halmazok)

$\mathcal{G}_\delta$  halmaznak nevezünk egy topológikus térbeli halmazt, amennyiben az előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként, és  $\mathcal{F}_\sigma$ -nak, ha az előáll megszámlálhatóan sok zárt halmaz egyesítéseként.

## 1.9.10 Állítás.

Jelölje  $(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$  az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mértéket. Minden  $M \in \Lambda$  Lebesgue-mérhető halmazhoz létezik egy  $G$  halmaz amely  $\mathcal{G}_\delta$  és létezik valamely  $F$  halmaz, amely  $\mathcal{F}_\sigma$  és

$$F \subseteq M \subseteq G, \text{ valamint } \lambda(G \setminus F) = 0.$$

## 1.9.11 Állítás.

Az  $n$  dimenziós Lebesgue-mértéknek a Borel-halmazokra való megszorításának teljessé tételével kapjuk az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mérhető halmazokat és az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mértéket.

1.9.12 Az előbbiek szerint, kiterjesztési eljárás nélkül is definiálható lenne a az  $n$ -dimenziós ( $n > 1$ ) Lebesgue mérték a Fubini-tétel segítségével a következő két lépésben. Az első lépés a halmazokra vonatkozó Fubini-tétel, amivel definiáltuk a az egy dimenziós Lebesgue-mérték szorzatát az  $\mathbb{R}^n$  Borel-halmazaira. Második lépésként teljessé tesszük az így kapott mértékteret. Így a Borel-halmazoknak e mérték szerinti teljessé tétele az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok halmaza, és a teljessé tett mérték, az  $n$ -dimenziós Lebesgue-mérték.

## 1.10. A Lebesgue-mérték regularitásának következményei

Emlékezzünk az elemi analízisből, hogy egy  $(X, \tau)$  topológikus téren értelmezett valós értékű függvényt *alulról félig folytonosnak* neveztünk, ha minden  $\alpha \in \mathbb{R}$  mellett az

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

halmaz nyílt, és hasonlóan *felülről félig folytonosnak*, ha az

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\}$$

halmaz nyílt. A legegyszerűbb példa a.f.f. függvényre egy nyílt halmaz karakterisztikus függvénye, f.f.f. függvényre pedig egy zárt halmaz karakterisztikus függvénye. Egy a.f.f. függvény  $-1$  szerese persze f.f.f. Az is könnyű, hogy a.f.f. függvények supremuma is a.f.f., valamint f.f.f. függvények infimuma is f.f.f.

## 1.10.1 Állítás. (Vitali-Caratheodory)

Legyen  $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \Lambda, \lambda)$ , és  $\varepsilon > 0$ . Ekkor létezik  $u$  a.f.f. és  $v$  f.f.f., hogy

$$v \leq f \leq u \text{ valamint } \int_{\mathbb{R}^n} (u - v) d\lambda < \varepsilon.$$

## 1.10.2 Definíció. (erősen abszolút folytonosság)

Azt mondjuk, hogy  $\lambda$  erősen abszolút folytonos mérték a  $\mu$ -re nézve, ha

$$\mu(E_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda(E_n) \rightarrow 0.$$

## 1.10.3 Állítás.

Legyenek  $\lambda$  és  $\mu$  mértékek  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrán. Ha  $\lambda(X)$  véges, akkor  $\lambda$  erősen abszolút folytonossága ekvivalens  $\lambda \ll \mu$ -vel

## 1.10.4 Állítás. (Newton-Leibnitz-tétel)

Tegyük fel, hogy  $f$  differenciálható minden  $x \in [a, b]$  pontban, és a derivált függvényre  $f' \in L_1([a, b], \Lambda, \lambda)$ . Ekkor minden  $x \in [a, b]$  esetén

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f' d\lambda.$$

1.11. Az  $L_p$  Lebesgue-terek

## 1.11.1 Állítás. (Jensen-egyenlőtlenség)

Legyen  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  egy valószínűségi mértékter, azaz  $\mu(\Omega) = 1$ . Ha  $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ , és  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , konvex függvény, akkor

$$\phi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \phi \circ f d\mu.$$

Bizonyítás.

Ismert, hogy a  $\phi$  konvexitása szerint tetszőleges ponthoz tartozó különbségi hányados függvény monoton nő. Ebből következik, hogy minden rögzített  $t \in \mathbb{R}$ -re a  $\beta \doteq \inf \left\{ \frac{\phi(s) - \phi(t)}{s - t} : t < s \in \mathbb{R} \right\}$  jelölés mellett

$$\phi(s) \geq \phi(t) + \beta(s - t)$$

fennáll minden  $s \in \mathbb{R}$  esetén. Alkalmazva ezt  $s = f(x)$  és  $t = \int_{\Omega} f d\mu$  mellett, azt kapjuk, hogy  $\phi(f(x)) \geq \phi(t) + \beta(f(x) - t)$  amelynek integrálásával:

$$\int_{\Omega} \phi \circ f d\mu \geq \phi(t) + \beta(t - t).$$

Ezt kellett belátni. □

## 1.11.2 Állítás. (Hölder-egyenlőtlenség)

Legyen  $1 < p, q < +\infty$ , melyre  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , valamint  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  nem negatív mérhető függvények. Ekkor

$$\int_X fg d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 1.11.3 Állítás. (Minkowski-egyenlőtlenség)

Legyen  $1 \leq p$  valamint  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  nem negatív mérhető függvények. Ekkor

$$\int_X (f + g)^p d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bizonyítás.

A  $p = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló, egyébként legyen  $q > 1$ , amelyre  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Tekintsük az  $(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$  felírást. Alkalmazva  $f(f + g)^{p-1}$  szorzatra a Hölder-egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_X f(f + g)^{p-1} d\mu &\leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X (f + g)^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan az  $f$  helyett  $g$ -t és  $g$  helyett  $f$ -et gondolva azt kapjuk, hogy:

$$\int_X g(f + g)^{p-1} d\mu \leq \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Összeségében tehát

$$\int_X (f + g)^p d\mu \leq \left( \int_X (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left( \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Amennyiben  $0 < \int_X (f+g)^p d\mu < +\infty$ , úgy  $(\int_X (f+g)^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$  számmal osztva készen is vagyunk. Amennyiben  $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$ , akkor  $f = g = 0$   $\mu$ -m.m., tehát nincs mit bizonyítanunk. Amennyiben pedig  $\int_X (f+g)^p d\mu = +\infty$  lenne, úgy az  $x \mapsto x^p$  függvény konvexitása szerint  $\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{f^p+g^p}{2}$ , tehát  $(f+g)^p \leq 2^{p-1}(f^p+g^p)$ . Ez szerint  $\int_X f^p d\mu$  és  $\int g^p d\mu$  közül legalább az egyik  $+\infty$  értékű. Ezt kellett belátni.  $\square$

#### 1.11.4 Definíció. ( $L_p$ )

Legyen  $p > 1$  rögzített valós szám, és  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mértéktér. Tekintsük a következő vektorteret

$$\mathcal{L}_p(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \left\{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ mérhető, } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Világos, hogy  $\int_X |f|^p d\mu = 0$  pontosan akkor, ha  $f(x) = 0$   $\mu$  .m.m.  $x \in X$  esetén. Ha  $\mathcal{L}^0$  jelöli azon mérhető függvényeket amelyek a konstans 0 függvénytől csak egy a  $\mu$ -re nézve nullmértékű halmazban különböznek, akkor világos, hogy  $\mathcal{L}^0$  a fenti  $\mathcal{L}^p$  térnek altere. Jelölje  $L_p$  az  $\mathcal{L}_p$  térnek ezen  $\mathcal{L}^0$  altere szerinti faktorterét, azaz

$$L_p(X, \mathcal{M}, \mu) \doteq \mathcal{L}_p(X, \mathcal{M}, \mu) / \mathcal{L}^0(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Ez azt jelenti, hogy  $L_p$  elemei olyan ekvivalencia osztályok, hogy az egyes ekvivalencia osztályok olyan mérhető függvényekből állnak, melyek egymástól csak nullmértékű halmazban különböznek. Továbbra is  $f$ -el jelölve azt az ekvivalencia osztályt, amely az  $f$  függvényt tartalmazza

$$\|f\|_{L_p} \doteq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

#### 1.11.5 Definíció. ( $L_\infty$ )

Jelölje  $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$  azon  $f$  mérhető függvények halmazát, melyekhez létezik  $A$  mérhető, nullmértékű halmaz, hogy  $\sup_{X \setminus A} |f| < +\infty$ . Világos, hogy  $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$  is vektortér, melynek  $\mathcal{L}^0$  altere. Az  $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ -nek az  $\mathcal{L}^0$  szerinti faktorterét nevezzük  $L_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$  térnek. Definíáljuk  $f \in L_\infty$  ekvivalencia osztály esetén

$$\|f\|_{L_\infty} \doteq \inf_{\mu(A)=0} \sup_{X \setminus A} |f|.$$

#### 1.11.6 Állítás.

Legyen  $f \in L_\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Ekkor

$$\|f\|_{L_\infty} = \min \{K > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > K\}) = 0\}.$$

#### 1.11.7 Állítás.

Legyen tetszőleges  $1 \leq p \leq +\infty$  mellett,  $f, g \in L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Ekkor  $fg \in L_1$ , mert

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}.$$

Továbbá

$$\|f+g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

#### 1.11.8 Következmény.

Az  $(L_p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_{L_p})$  normált tér, tetszőleges  $1 \leq p \leq +\infty$  mellett.

#### 1.11.9 Állítás. (Riesz-Fischer)

Az  $(L_p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_{L_p})$  normált tér, tetszőleges  $1 \leq p \leq +\infty$  mellett teljes, azaz Banach-tér.

Bizonyítás gyanánt először az úgynevezett Riesz-lemma.

## 1.11.10 Lemma. (Riesz)

Az  $L_p$  tér ( $1 \leq p$ ) tetszőleges Cauchy-sorozatának létezik majdnem mindenütt pontonként konvergens részsorozata.

Bizonyítás.

Az adott  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $L_p$ -beli sorozatnak legyen  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  olyan részsorozata, amelyre

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L_p} < \frac{1}{2^k}.$$

Jelölje

$$g_K \doteq \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad \text{valamint} \quad g \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Világos, hogy  $\|g_K\|_{L_p} < 1$ , továbbá  $g_K^p \rightarrow g^p$  pontonként ( $K \rightarrow \infty$ ), ezért a Fatou-lemma miatt

$$\int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{K \rightarrow \infty} g_K^p d\mu \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} \int_X g_K^p d\mu \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} \|g_K\|_{L_p}^p < 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a  $g^p \in L_1$ , ezért e függvény  $\mu$ -m.m. véges, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

függvénysor  $\mu$ -m.m. abszolút konvergens. Az abszolút konvergencia viszont maga után vonja a konvergenciát, ezért ha  $s_K \doteq \sum_{k=1}^K (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$  jelöli a  $K$ -adik részletösszegeket, akkor az  $(s_K)_{K=1}^{\infty}$  függvénysor  $\mu$ -m.m. pontonként konvergens, így az

$$f_{n_1} + s_K = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \dots + (f_{n_{K+1}} - f_{n_K}) = f_{n_{K+1}}$$

függvénysor is, ergo maga az  $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  függvénysor is  $\mu$ -m.m. pontonként konvergens.  $\square$

Most nézzük a Riesz-Fischer-tétel igazolását:

Bizonyítás.

Legyen  $f_n \in L_p$  Cauchy-sorozat, és válasszuk ki a Riesz-lemma szerint létező részsorozatát, amely majdnem mindenütt pontonként konvergál egy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  függvényhez. Megmutatjuk, hogy ez a konvergencia  $L_p$ -ben is fennáll. Világos, hogy olyan  $x \in X$  esetén, amelyre  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$

$$|f(x) - f_{n_k}(x)|^p = \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)|^p$$

fennáll, minden rögzített  $n_k \in \mathbb{N}$  esetén, ezért a Fatou-lemma miatt

$$\int |f - f_{n_k}| d\mu \leq \liminf_l \int |f_{n_l} - f_{n_k}|^p d\mu$$

Kihasználva, hogy az eredeti  $f_n$  Cauchy-sorozat  $L_p$ -ben, a fentiből könnyen következik hogy  $f_{n_k} \rightarrow f$  az  $L_p$  tér metrikájából is. Viszont, ha egy metrikus tér egy Cauchy-sorozatának van konvergens részsorozata akkor az eredeti sorozat is konvergál a részsorozat határértékéhez.  $\square$

## 1.11.11 Definíció.

Tetszőleges  $1 \leq p < +\infty$  mellett jelölje

$$l_p \doteq (L_p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_{L_p}).$$

Világos, hogy  $l_p$  elemei azon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatok, melyekre  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ , és egy ilyen  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat normája:

$$\|a\|_{l_p} \doteq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A  $p = +\infty$  esetben  $l_\infty$  elemei azon  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozatok, melyekre  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$ . Egy ilyen  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat normája:

$$\|a\|_{l_\infty} \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Gondoljuk meg, hogy a fejezet elején konvex függvényekre bizonyított Jensen-egyenlőtlenség, valóban az elemi analízisből jólismert diszkrét Jensen-egyenlőtlenség általánosítása!

## 1.12. Kis funkcionál analízis a Radon-Nikodym tételhez

A fejezetben csak  $\mathbb{R}$  feletti vektortereket vizsgálunk, de könnyű utána gondolni,  $\mathbb{C}$  feletti vektorterekre valamennyi állítás igaz marad. Erre akkor lenne szükség, ha  $X \rightarrow \mathbb{C}$  függvények integrálméletével is foglalkoznánk.

### 1.12.1 Definíció. (Hilbert-tér)

Egy  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skaláriszorzatos teret Hilbert-térnek nevezünk, ha a  $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle}$  normával az  $(X, \|\cdot\|)$  normált tér teljes.

### 1.12.2 Világos, hogy Az $(L_2(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_{L_2})$ a Riesz-Fischer-tétel miatt Hilbert-tér, hiszen az

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_X f \cdot g \, d\lambda$$

olyan skaláriszorzat, hogy az általa indukált norma, megegyezik  $\|\cdot\|_{L_2}$  normával.

### 1.12.3 Állítás.

Legyen  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert tér, és  $K \subseteq X$  egy nem üres konvex zárt halmaz. Ekkor létezik egyetlen  $v \in K$  pont, amelyre minden  $u \in K$  mellett  $\|v\| \leq \|u\|$ .

**Bizonyítás.**

Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , amelyre  $\alpha \doteq \inf \{\|u\| : u \in K\}$ . Világos, hogy létezik  $u_n \in K$  sorozat, amelyre

$$\|u_n\| \rightarrow \alpha. \quad (1.1)$$

Megmutatjuk, hogy  $u_n$  Cauchy-sorozat:

$$\|u_i - u_j\|^2 + \|u_i + u_j\|^2 = 2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2$$

a paralelogramma szabály szerint, így ezt  $\frac{1}{2}u_i$  és  $\frac{1}{2}u_j$  -re felírva

$$\frac{1}{4}\|u_i - u_j\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u_i\|^2 + \|u_j\|^2\right) - \left\|\frac{u_i + u_j}{2}\right\|^2,$$

ami  $K$  konvexitása miatt azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{4}\|u_i - u_j\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|u_i\|^2 + \|u_j\|^2\right) - \alpha^2, \quad (1.2)$$

amiből (1.1) miatt valóban következik, hogy  $u_n$  Cauchy sorozat. A Hilbert tér teljessége miatt viszont létezik  $v \in X$ , amelyre

$$u_n \rightarrow v,$$

de  $K$  zártsága szerint  $v \in K$  is teljesül. A norma leképezés folytonossága miatt

$$\|u_n\| \rightarrow \|v\|,$$



tehát

$$\|v\| = \alpha$$

ami azt jelenti, hogy  $v$  valóban minimális hosszúságú pontja  $K$ -nak. Az egyértelműség indoklásához legyenek  $v_1, v_2 \in K$  olyan pontok amelyekre

$$\|v_1\| = \alpha = \|v_2\|$$

Az (1.2)-ot újta számolva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \|v_1 - v_2\|^2 \leq \frac{1}{2} (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) - \alpha^2 = 0$$

tehát  $v_1 = v_2$  azaz a legkisebb pont egyértelmű is.  $\square$

1.12.4 Látható, hogy amennyiben  $M$  egy zárt altér a Hilbert-térben, akkor tetszőleges  $x \in X$  mellett az  $x + M$  halmaznak a 0-tól való távolsága azonos az  $x$  pontnak az  $M$  halmaztól vett távolságával. Ugyanis  $u \in x + M$  mellett:

$$\|u\| = \inf \{\|v\| : v \in x + M\} = \inf \{\|x + m\| : m \in M\} = \inf \{\|x - m\| : m \in M\} = d(x, M)$$

1.12.5 Állítás.

Legyen  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy Hilbert-tér,  $M \subseteq X$  pedig egy zárt altér,  $x \in X$  egy tetszőleges pont. Az előző állítás miatt létezik egyetlen pontja az  $M$  halmaznak, amely  $x$ -hez legközelebb van. Ezt a pontot nevezzük az  $x$ -nek az  $M$ -re vonatkozó merőleges vetületének és  $p_M(x)$ -el jelöljük. Magyarul:

$$p_M(x) \in M, \quad \text{amelyre} \quad \|x - p_M(x)\| = \inf \{\|x - v\| : v \in M\}.$$

Minden  $x \in X$  mellett az  $x - p_M(x)$  vektor merőleges  $M$  altér minden elemére.

Bizonyítás.

Legyen  $z \doteq x - p_M(x)$  és  $y \in M$  olyan vektor, amelyre  $\|y\| = 1$ . Ekkor tetszőleges  $\alpha \in \mathbb{R}$  valós szám esetén

$$\|z\|^2 = \|x - p_M(x)\|^2 \leq \|x - p_M(x) - \alpha y\|^2 = \|z - \alpha y\|^2 = \|z\|^2 - 2\alpha \langle z, y \rangle + \alpha^2.$$

Válasszuk meg most az  $\alpha$  számot  $\alpha \doteq \langle z, y \rangle$  módon. Így a fentiek szerint

$$0 \leq -2\alpha^2 + \alpha^2 = -\alpha^2$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden  $y \in X$   $\|y\| = 1$  esetén  $\langle z, y \rangle = 0$ . Ezt kellett belátni.  $\square$

1.12.6 Tétel. (Hilbert-tér felbontási tétele (Riesz))

Legyen  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy Hilbert-tér,  $M \subseteq X$  pedig egy zárt altér. Ekkor

$$M \oplus M^\perp = X.$$

Bizonyítás.

Világos, hogy  $M^\perp$  is (zárt) altér, amely diszjunkt  $M$ -től. Amennyiben  $x \in X$  egy rögzített vektor, akkor

$$x = p_M(x) + (x - p_M(x)).$$

Mivel  $p_M(x) \in M$  a projekció operátor definíciója miatt és  $x - p_M(x) \in M^\perp$  is teljesül az előző állítás szerint.  $\square$

Emlékezzünk arra, hogy egy normált térek között értelmezett lineáris operátor folytonossága ekvivalens a 0 pontbeli folytonosságával, és avval, hogy létezzék olyan  $K$  szám, melyre  $\|Ax\| \leq$

$K \|x\|$  az értelmezési tartomány minden  $x$  elemére. Ebben az esetben egy  $A$  lineáris operátornak az *operátor normáját* az alábbi ekvivalens módon definiáltuk

$$\begin{aligned}\|A\| &\doteq \sup \{\|Ax\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\ &= \min \{K \in \mathbb{R}_+ : \|Ax\| \leq K \|x\|\}.\end{aligned}$$

Láttuk azt is, hogy evvel valóban norma függvényt definiáltunk, a két normált tér között definiált lineáris operátorok vektorterén, amely az itt bevezetett normával teljes is, feltéve, hogy a képtérül szolgáló normált tér teljes.

#### 1.12.7 Állítás. („Példa., Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálra)

Legyen  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skaláriszorzatos tér, valamint  $y \in X$  egy tetszőleges elem. Ekkor a  $\Phi_y(x) \doteq \langle x, y \rangle$  lineáris funkcionál folytonos, és az operátornormájára

$$\|\Phi_y\| = \|y\|.$$

Bizonyítás.

$|\Phi_y(x)| \leq \|y\|$  minden  $x \in X$  mellett fennáll, tehát  $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$ , és  $\Phi_y\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|$ , ezért  $\|\Phi_y\| = \|y\|$  valóban teljesül.  $\square$

Most megmutatjuk, hogy a fenti alakún kívül nincs is más folytonos lineáris funkcionál egy Hilbert-téren

#### 1.12.8 Tétel. (Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálok reprezentációja (Riesz))

Legyen  $(X, \|\cdot\|)$  egy Hilbert-tér, valamint  $\Phi$  egy folytonos lineáris funkcionál  $X$ -en. Ekkor létezik egyetlen olyan  $y \in X$  vektor, amelyre

$$\Phi(x) = \langle x, y \rangle$$

minden  $x \in X$  esetén.

Bizonyítás.

Válasszunk egy  $z \in (\ker \Phi)^\perp$ -beli pontot, amely különbözik a 0 vektortól. Mivel  $\ker \Phi$  zárt altér ezért  $(\ker \Phi)^\perp = \{0\}$  csak úgy lehetne, ha  $\Phi = 0$ . Tekintsük tetszőleges  $x \in X$  mellett a

$$\Phi(x)z - \Phi(z)x \in \ker \Phi$$

vektort. Világos, hogy  $\langle \Phi(x)z - \Phi(z)x, z \rangle = 0$ , ezért  $\Phi(x) = \left\langle x, \frac{\Phi(z)}{\|z\|^2} z \right\rangle$ .

Az egyértelműséghez, ha  $y_1$  és  $y_2$  ilyen vektorok, akkor tetszőleges  $x \in X$  mellett  $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ , ezért speciálisan  $x = y_1 - y_2$  mellett is  $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ .  $\square$

### 1.13. Lebesgue felbontási tétele és a Radon-Nikodym-tétel

A következő állításokban fontos, hogy a szereplő mértékek negatív halmazt is felvehetnek.

#### 1.13.1 Definíció. (halmazra koncentrált mérték)

Legyen  $\lambda$  egy előjeles mérték az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren és  $A \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz. Azt mondjuk, hogy  $\lambda$  az  $A$ -ra koncentrált mérték, ha

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$$

minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett.

#### 1.13.2 Amennyiben a $\lambda$ előjeles mérték $B_1$ -re és $B_2$ -re is koncentrált akkor $B_1 \cap B_2$ -re is, hiszen $\lambda(E) = \lambda(E \cap B_1) = \lambda(E \cap B_1 \cap B_2)$ . Továbbá ha $\lambda$ a $B$ halmazra koncentrált és $B \subseteq D$ mérhető halmaz, akkor $\lambda$ előjeles mérték a $D$ -re is koncentrált, hiszen $\lambda(E \cap D) = \lambda(E \cap D \cap B) = \lambda(E \cap B) = \lambda(E)$ .

## 1.13.3 Definíció. (szinguláris mérték)

Legyen  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  előjeles mértékek az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren. Azt mondjuk, hogy  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  egymásra nézve szingulárisak, ha létezik  $B_1$  és  $B_2$  diszjunkt mérhető halmazok úgy, hogy  $\lambda_1$  a  $B_1$ -re és  $\lambda_2$  a  $B_2$ -re koncentrált. Ezt  $\lambda_1 \perp \lambda_2$  módon jelöljük.

## 1.13.4 Állítás.

Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\mu$  előjeles mértékek. Ekkor fennállnak az alábbi implikációk.

- $\lambda_1 \ll \mu$  és  $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$ ;
- $\lambda_1 \perp \mu$  és  $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$ ;
- $\lambda_1 \perp \mu$  és  $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$ ;
- $\lambda \perp \mu$  és  $\lambda \ll \mu \Rightarrow \lambda = 0$ .

**Bizonyítás.**

Az első állítás nyilvánvaló. A másodikhoz legyen  $\lambda_1$  a  $B_1$ -re,  $\mu$  a  $C_1$ -re koncentrált ahol  $B_1 \cap C_1 = \emptyset$ ; továbbá  $\lambda_2$  a  $B_2$ -re,  $\mu$  a  $C_2$ -re koncentrált valamint  $B_2 \cap C_2 = \emptyset$ . Legyen  $B \doteq B_1 \cup B_2$  és  $C \doteq C_1 \cap C_2$ . Világos, hogy  $\lambda_1, \lambda_2$  a  $B$ -re így  $\lambda_1 + \lambda_2$  is  $B$ -re koncentrált, továbbá  $\mu$  a  $C$ -re koncentrált. No de  $B \cap C = (B_1 \cap C) \cup (B_2 \cap C) = \emptyset$ .

A harmadik állítás indoklásához is legyen  $\lambda_1$  a  $B$ -re és  $\mu$  a  $C$ -re koncentrált, ahol  $B \cap C = \emptyset$ . Eszerint  $\mu(E \cap B) = \mu(E \cap B \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$ , így az abszolút folytonosság miatt  $\lambda_2(E \cap B) = 0$ . Ez viszont azt jelenti, hogy minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra  $\lambda_2(E) = \lambda_2(E \cap B^c)$ , tehát  $\lambda_2$  a  $B^c$  halmazra van koncentrált.

Az utolsó állítás az előző következménye, mivel ekkor  $\lambda \perp \lambda$ , ami csak úgy lehet, hogy  $\lambda$  az  $\emptyset$ -ra van koncentrált, tehát az azonos zéró mérték.  $\square$

## 1.13.5 Állítás.

Legyen az  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  véges mértéktéren  $g \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  amelyre

$$\left\{ \frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu : E \in \mathcal{M}, \mu(E) > 0 \right\} \subseteq [a, b].$$

Ekkor  $\mu$ -majdnem minden  $x \in X$  esetén  $g(x) \in [a, b]$ , azaz  $\mu(\{x \in X : g(x) \notin [a, b]\}) = 0$ .

**Bizonyítás.**

Válasszuk először az  $r \in \mathbb{R}$  és  $\varepsilon > 0$ , számokat úgy, hogy  $B^\circ(r, 2\varepsilon) \cap [a, b] = \emptyset$ . Legyen  $E_{r,\varepsilon} \doteq h^{-1}(B^\circ(r, \varepsilon))$ . Ha  $\mu(E_{r,\varepsilon}) \neq 0$ , akkor  $\left| \frac{1}{\mu(E_{r,\varepsilon})} \int_{E_{r,\varepsilon}} g d\mu - r \right| \leq \frac{1}{\mu(E_{r,\varepsilon})} \int_{E_{r,\varepsilon}} |g - r| d\mu \leq \varepsilon$  azaz  $\frac{1}{\mu(E_{r,\varepsilon})} \int_{E_{r,\varepsilon}} g d\mu \in B(r, \varepsilon)$ , ami ellentmond  $r$  és  $\varepsilon$  választásának, hiszen  $\frac{1}{\mu(E_{r,\varepsilon})} \int_{E_{r,\varepsilon}} g d\mu \in [a, b]$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $\mu(E_{r,\varepsilon}) = 0$ . No de az  $\{x \in X : h(x) \notin [a, b]\}$  halmaz lefedhető megszámlálhatóan sok  $E_{r,\varepsilon}$  alakú halmaz segítségével.  $\square$

## 1.13.6 Tétel. (Lebesgue féle felbontási tétel, Radon-Nikodym-tétel, Neumann János bizonyításával)

Legyen  $\lambda$  és  $\mu$  véges, nem negatív mértékek az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren. Ekkor

- Létezik egyetlen  $\lambda_a$  és  $\lambda_s$  nem negatív mérték, amelyre

$$\lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu \quad \text{továbbá} \quad \lambda_a + \lambda_s = \lambda;$$

- Létezik egyetlen  $h \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  függvény, hogy minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz esetén

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

**Bizonyítás.**

Legyen  $\varphi(E) \doteq \lambda(E) + \mu(E)$  minden  $E \in \mathcal{M}$  esetén. A monoton konvergencia tételt háromszor alkalmazva, kapjuk, hogy minden nem negatív mérhető  $f$  függvényre és minden  $E$  mérhető halmazra  $\int_E f d\varphi = \int_E f d\lambda + \int_E f d\mu$ .

Az  $(X, \mathcal{M}, \varphi)$  egy véges mértéktér. Defináljuk tetszőleges  $f \in L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  esetén az alábbi  $\Phi : L_2(X, \mathcal{M}, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt:

$$\Phi(f) \doteq \int_X f d\lambda.$$

A Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} |\Phi(f)| &= \left| \int_X f \cdot 1 d\lambda \right| \leq \int_X |f| \cdot 1 d\lambda \leq \left( \int_X |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\lambda(X)} \\ &\leq \int_X |f|^2 d\varphi \cdot \sqrt{\lambda(X)} = \sqrt{\lambda(X)} \cdot \|f\|_{L_2(\varphi)}. \end{aligned}$$

Egyrészt a  $\lambda$  végeessége miatt minden  $f \in L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  esetén  $\Phi(f)$  véges, tehát valóban  $\Phi : L_2(X, \mathcal{M}, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris funkcionál, másrészt a fenti egyenlőtlenség azt jelenti, hogy  $\Phi$  egy folytonos lineáris funkcionál az  $L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  Hilbert-téren (Riesz-Fischer-tétel). Tudjuk, hogy Hilbert-téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálok, egy rögzített elemmel való skalárisszorzatként állnak elő. Létezik tehát egy  $g \in L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  függvény, melyre minden  $f \in L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  esetén

$$\int_X f d\lambda = \int_X fg d\varphi. \quad (\dagger)$$

Most megmutatjuk, hogy olyan  $g \in L_2(X, \mathcal{M}, \varphi)$  függvény is van, melyre a fenti  $(\dagger)$  igaz, és  $g(x) \in [0, 1]$  minden  $x \in X$  esetén. Ha ugyanis  $(\dagger)$ -et felírjuk minden  $f = \chi_E$  karakterisztikus függvényre, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda(E) = \int_E g d\varphi,$$

ezért minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra, amelyre  $\phi(E) \neq 0$

$$1 \geq \frac{1}{\phi(E)} \lambda(E) = \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi \geq 0.$$

Ezek szerint  $\varphi(\{x \in X : g(x) \notin [0, 1]\}) = 0$ , tehát egy  $\varphi$ -nullmértékű halmazon megváltoztathatjuk a  $g$ -t úgy, hogy  $g(x) \in [0, 1]$  már minden pontban teljesüljön és  $(\dagger)$  is igaz maradjon.

Legyenek most

$$A \doteq \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\} \text{ és } B \doteq \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

Világos, hogy  $A$  és  $B$  diszjunkt mérhető halmazok, melyeknek egyesítése az egész  $X$ . Defináljuk a következő  $\lambda_a$  és  $\lambda_s$  mértékeket:

$$\lambda_a(E) \doteq \lambda(E \cap A) \text{ valamint } \lambda_s(E) \doteq \lambda(E \cap B).$$

Világos, hogy  $\lambda_a$  és  $\lambda_s$  nem negatív mértékek, melyekre az  $A \cup B = X$  miatt  $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ .

Megmutatjuk, hogy  $\lambda_s \perp \mu$ . A  $\lambda_s$  mérték a definíciója szerint  $B$ -re koncentrált. De

$$\lambda(E \cap B) = \int_{E \cap B} g d\varphi = \varphi(E \cap B) = \lambda(E \cap B) + \mu(E \cap B),$$

ezért  $\mu(E \cap B) = 0$ , minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett, ami azt jelenti, hogy  $\mu$  a  $B$ -től diszjunkt  $B^c = A$  halmazra van koncentrált. Tehát  $\lambda_s \perp \mu$  valóban fennáll.

Megmutatjuk, hogy  $\lambda_a \ll \mu$ . Ehhez találunk  $h \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  függvényt, melyre  $\lambda_a(E) \doteq \int_E h d\mu$ , ami bizonyítja is mindkét állítás egzisztenciára vonatkozó részét. Először átírjuk  $(\dagger)$ -et:  $\int_X f d\lambda = \int_X fg d\varphi = \int_X fg d\lambda + \int_X fg d\mu$ , azaz

$$\int_X f(1 - g) d\lambda = \int_X fg d\mu.$$

Alkalmazzuk ezt az  $f \doteq \chi_E (1 + g + \dots + g^n)$  nem negatív korlátos függvényre. Azt kapjuk így, hogy minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz esetén és minden  $n \in \mathbb{N}$  természetes számra

$$\int_E 1 - g^{n+1} d\lambda = \int_E g + g^2 + \dots + g^{n+1} d\mu. \quad (\ddagger)$$

A bal oldalt számolva:  $\int_E 1 - g^{n+1} d\lambda = \int_{E \cap A} 1 - g^{n+1} d\lambda$ , hiszen  $B$  pontjain  $g$  éppen 1. Az  $x \in A$  esetén viszont  $g(x) < 1$ , ezért az  $1 - g^{n+1}(x)$  sorozat monoton növekedőleg tart 1-hez, ami a monoton konvergencia tétel miatt azt jelenti, hogy  $(\ddagger)$  baloldala tart a  $\lambda(E \cap A) = \lambda_a(A)$  számhoz.

A jobb oldalt számolva: legyen  $h_n \doteq g + g^2 + \dots + g^{n+1}$  nem negatív korlátos függvény. Világos, hogy a  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  függvényt sorozat monoton növekedőleg tart valamely  $h$  mérhető nem negatív függvényhez, és a monoton konvergencia tételt újra használva azt kapjuk, hogy  $\int_E h_n d\mu \rightarrow \int_E h d\mu$ , ami azt jelenti, hogy  $\lambda_a(E) \doteq \int_E h d\mu$  valóban fennáll. Mivel  $\int_X h d\mu = \lambda_a(X) = \lambda(B) < \infty$ , ezért  $h \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  is teljesül.

Csak az unicitások igazolása van hátra: Tegyük fel, hogy  $\lambda$  előáll  $\lambda = \lambda'_a + \lambda'_s$  alakban is. Ekkor átrendezve  $\lambda'_a - \lambda_a = \lambda_s - \lambda'_s$  ahol a bal oldalon és a jobb oldalon is egy-egy előjeles mérték szerepel, amely egyrészt abszolút folytonos, másrészt szinguláris is  $\mu$ -re, tehát  $\lambda'_a = \lambda_a$  és  $\lambda'_s = \lambda_s$ . Amennyiben létezne  $g \in L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$  nem negatív függvény, hogy  $\lambda_a(E) = \int_E g d\mu$ , akkor minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmaz esetén  $\int_E h - g d\mu = 0$ , amiből valóban következik, hogy  $h(x) = g(x)$   $\mu$ -majdnem minden  $x \in X$  esetén. Ez azt jelenti, hogy  $h$  és  $g$  az  $L_2(X, \mathcal{M}, \mu)$  tér azonos ekvivalencia osztályát képviselik.  $\square$

1.13.7 Az előző tétel kiterjeszthető arra az esetre amikor mindkét mérték  $\sigma$ -véges, és arra az esetre is mikor  $\lambda$  komplex mérték, vagy  $\lambda$  előjeles mérték. Lásd a (1.14.8) pont utáni megjegyzést.

## 1.14. Jordan és Hahn felbontási tételei

Legyen  $\lambda$  valamely  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebrán értelmezett komplex mérték, azaz  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , melyre

$$\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

minden megszámlálható diszjunkt  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  halmazsorozat esetén. Világos, hogy a fenti definíció egyrészt általánosabb mint a szokásos nem negatív értéket felvevő mérték definíciója, másrészt pedig megszorítása annak, hiszen a  $\lambda(E) = +\infty$  esetet ez nem tartalmazza. Azt is látni kell, hogy a fenti definíció szerint a  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$  sor minden átrendezésének is konvergensnek kell lennie, ami véges dimenzióban épp az abszolút konvergenciával ekvivalens, tehát minden  $E_n$  diszjunkt halmazsorozatra  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)|$  is konvergens.

Az alábbiakban azt a technikát ismertetjük, hogy hogyan lehet egy ilyen komplex – speciális esetben valós, de véges – mérték szerinti integrálméletet visszavezetni nem negatív véges mérték szerinti integrálméletre. Az világos, hogy  $\lambda$  komplex mérték előáll  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  alakban, ahol  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  valós mértékek. Természetes gondolat lenne, hogy állítsuk elő a  $\lambda_1$  valós mértéket a pozitív és negatív része különbségeként, ugyanúgy ahogyan ezt függvények esetén is tettük. Könnyen látható viszont, hogy egy mérték pozitív része nem feltétlen  $\sigma$ -additív, ezért ez a gondolat egyenlőre zsákutcának bizonyul. Bevezetünk majd tetszőleges valós mértékekhez két nem negatív mértéket, amelyeknek különbsége az adott előjeles mérték. Ez a Jordan-felbontási tétel.

### 1.14.1 Definíció. (mérték teljes változása)

Ha  $\lambda$  egy komplex mérték, akkor az

$$|\lambda|(E) \doteq \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| : E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n, E_i \cap E_j = \emptyset \right\}$$

halmazfüggvény a  $\lambda$  mérték teljes változása.

A fenti definíció az alábbi feladattal motiválható. Adott  $\lambda$  komplex mértékhez keressük meg azt a minimális  $\mu$  nem negatív valós mértéket, melye

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E). \quad (1.3)$$

Azt mondjuk, hogy  $\hat{\mu}$  nem negatív mérték megoldása ennek a feladatnak, ha  $|\lambda(E)| \leq \hat{\mu}(E)$  teljesül minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett és ha valamely  $\mu$  nem negatív valós mértékre (1.3) fennáll, akkor  $\hat{\mu} \leq \mu$ .

Meg fogjuk mutatni, hogy a  $|\lambda|$  teljes változás a fenti feladat megoldása.

#### 1.14.2 Állítás.

*Komplex mérték teljes változása nem negatív mérték.*

**Bizonyítás.**

Trivi, hogy  $|\mu|(\emptyset) = 0$ . Legyen  $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ , diszjunkt mérhető halmazok egyesítése.

$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i)$ . Ugyanis, ha  $E = \cup A_j$  diszjunkt egyesítés, akkor

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

De  $|\mu|(E)$  épp a fenti egyenlőtlenség baloldalán lévő halmazok szuprémuma, ezért  $|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i)$  valóban fennáll.

$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)$ . Ugyanis legyenek a  $t_i \in \mathbb{R}$  számokra  $t_i < |\mu|(E_i)$ . A szuprémum definíciója szerint léteznek  $A_{i,j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) egymástól diszjunkt halmazok, melyekre  $\sum_j |\mu(A_{i,j})| > t_i$ . De az  $E_i$  halmazok diszjunktága miatt az összes  $A_{i,j}$  halmaz is diszjunkt, ilyen módon egy partícióját kapjuk  $E$ -nek. Erre persze

$$\sum_i t_i < \sum_i \sum_j |\mu(A_{i,j})| \leq |\mu|(E).$$

De ez minden  $t_i < |\mu|(E_i)$  valós szám mellett igaz, tehát  $\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)$  valóban fennáll.  $\square$

Világos, hogy ha adott egy nem negatív véges mérték, akkor ennek értékkészlete benne van egy korlátos és zárt intervallumban. Ehhez hasonlóan az is igaz, hogy amennyiben adott egy komplex mérték, úgy a mérték értékkészlete része egy zárt körnek. Ez talán meglepő, hiszen  $A \subseteq B$  nem implikálja  $|\mu(A)| \leq |\mu(B)|$ -t, ezért  $\mu(X) \in \mathbb{C}$  feltétel nem tűnik elegendőnek. Azt fogjuk majd megmutatni, hogy minden  $E \in \mathcal{M}$  esetén  $|\mu(E)| \leq |\mu|(X) \in \mathbb{R}$ . Ebből az állításból mindenesetre a  $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$  egyenlőtlenség triviális, és mivel  $|\mu|$  mérték így elegendő belátni, hogy  $|\mu|(X) \in \mathbb{R}$ .

Ennek igazolásához egy elemi lemma következik, melyhez csak a komplex számok fogalma szükséges:

#### 1.14.3 Lemma.

*Legyenek a  $z_1, \dots, z_n$  komplex számok rögzítve. Ekkor ezeknek van olyan  $S \subseteq \{z_1, \dots, z_n\}$  részhalmaza, melyre  $|\sum_{i \in S} z_i| > \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |z_i|$ .*

**Bizonyítás.**

Az  $\mathbb{R}^2$  sík  $|y| \geq x$  ténnyedébe eső  $z$  komplex számokra  $\sqrt{2} \operatorname{Re} z \geq |z|$ . Feltehető, hogy ebbe ténnyedbe esik az az  $S$  részhalmaz, melyre  $\sum_{z_i \in S} |z_i| \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |z_i|$ . Erre az  $S$  részhalmazra  $|\sum_{z_i \in S} z_i| \geq \operatorname{Re}(\sum_{z_i \in S} z_i) = \sum_{z_i \in S} \operatorname{Re} z_i \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n |z_i| > \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |z_i|$ .  $\square$

#### 1.14.4 Állítás.

*Ha  $\mu$  egy komplex mérték, akkor  $|\mu|(X) < \infty$ , azaz komplex mérték teljes változása nem negatív véges mérték.*

**Bizonyítás.**

Először azt mutatjuk meg, hogy amennyiben  $Y \in \mathcal{M}$ ,  $|\mu|(Y) = \infty$ , úgy  $Y$  felbontható diszjunkt  $Y = A \cup B$  mérhető halmazok egyesítésére, hogy  $|\mu(A)| > 1$  és  $|\mu|(B) = \infty$ . Mivel  $|\mu|$  teljes

változás egy mérték, ezért ehhez elegendő belátni, hogy  $|\mu(A)| > 1$  és  $|\mu(B)| > 1$  is teljesül. Legyen  $t = 6(1 + |\mu(Y)|)$ . Világos, hogy létezik  $E_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) véges sok diszjunkt halmaz, melyre  $\cup E_i \subseteq Y$  és

$$t < \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)|.$$

Van tehát olyan  $S$  részhalmaz, hogy  $|\sum_{i \in S} \mu(E_i)| > \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)|$ . Legyen  $A \doteq \cup_{i \in S} E_i$ . Ekkor

$$|\mu(A)| = \left| \sum_{i \in S} \mu(E_i) \right| > \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > \frac{t}{6}.$$

Ebből  $\frac{t}{6} = 1 + |\mu(Y)| > 1$  miatt egyrészt  $|\mu(A)| > 1$  következik, másrészt  $B \doteq Y \setminus A$  jelöléssel

$$|\mu(B)| = |\mu(Y) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(Y)| > \frac{t}{6} - |\mu(Y)|,$$

amiből  $\frac{t}{6} - |\mu(Y)| > 1$  miatt  $|\mu(B)| > 1$  is fennáll.

Tegyük fel indirekt, hogy  $|\mu|(X) = \infty$ . Ekkor  $X = A_1 \cup B_1$  diszjunkt egyesítésként, hogy  $|\mu(A_1)| > 1$  és  $|\mu(B_1)| = \infty$ . Alkalmazva az előző gondolatot  $B_1$ -re kapjuk, hogy  $B_1 = A_2 \cup B_2$  diszjunkt egyesítés alakban és  $|\mu(A_2)| > 1$ , de  $|\mu(B_2)| = \infty$  is fennáll. Az eljárást folytatva olyan diszjunkt  $A_n$  halmazzorozatot kapunk, hogy minden elemre  $|\mu(A_n)| > 1$ , ami ellentmond a  $\sum \mu(A_n)$  sor konvergenciájának.  $\square$

Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

#### 1.14.5 Állítás.

Legyen  $\mu$  egy komplex mérték. Ekkor  $\mu$  értékkészlete része az origó középponttú  $|\mu|(X)$  sugarú zárt körlemeznek.

#### 1.14.6 Definíció. (mérték pozitív és negatív változása)

Legyen  $\lambda$  egy előjeles mérték. Jelölje

$$\lambda^+ \doteq \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda) \text{ valamint } \lambda^- \doteq \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

a  $\lambda$  mérték pozitív illetve negatív változását.

1.14.7 Mivel előjeles mértékek összege is előjeles mérték, ezért  $\lambda^+$  és  $\lambda^-$  valóban előjeles mértékek. No de minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett  $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ , ezért  $-\lambda(E) \leq |\lambda|(E)$  és  $\lambda(E) \leq |\lambda|(E)$  is fennáll. Eszerint  $|\lambda| + \lambda$ , ezért  $\lambda^+$ ; és  $|\lambda| - \lambda$ , ezért  $\lambda^-$  is nem negatív mértékek. Amennyiben  $\lambda$  véges, úgy  $\lambda^+$  és  $\lambda^-$  is az.

#### 1.14.8 Állítás. (Jordan-féle felbontási tétel)

Legyen  $\lambda$  egy véges előjeles mérték. Ekkor a  $\lambda^+$  pozitív változás és a  $\lambda^-$  negatív változás halmazfüggvények véges nem negatív mértékek, továbbá

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^- \text{ valamint } |\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-.$$

Bizonyítás.

Az előzőek szerint csak a kiemelt egyenleteket kell indokolnunk. De az teljesen trivi, hiszen  $\lambda^+ + \lambda^- = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda + |\lambda| - \lambda) = |\lambda|$  és hasonlóan  $\lambda^+ - \lambda^- = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda - (|\lambda| - \lambda)) = \lambda$ .  $\square$

Most a Hahn-felbontási tételre térünk rá. Ehhez először általánosítanunk kell a Radon-Nikodym tételt arra az esetre, mikor  $\lambda$  előjeles mérték:

1.14.9 Tegyük fel, hogy  $\lambda \ll \mu$ . Ekkor  $|\lambda| \ll \mu$  fennáll hiszen, ha  $\mu(B) = 0$ , akkor annak minden  $A \in \mathcal{M}$ ,  $A \subseteq B$  részhalmazára is  $\mu(B) = 0$ , amiből az abszolút folytonosság miatt már,  $\lambda(A) = 0$  is fennáll. Ebből persze  $|\lambda|(B) = 0$  már következik. Ekkor viszont a pozitív változás és negatív változás definíciójára gondolva  $\lambda^+ \ll \mu$  és  $\lambda^- \ll \mu$ . Alkalmazható tehát a Radon-Nikodym tételnek a nem negatív mértékekre vonatkozó alakja. Kapunk tehát  $h^+, h^- \in L_1(\mu)$  függvényeket, melyekre  $\lambda^+(E) = \int_E h^+ d\mu$  és  $\lambda^-(E) = \int_E h^- d\mu$ . Ebből persze  $\lambda(E) = \int h^+ - h^- d\mu$ .

## 1.14.10 Állítás.

Legyen  $\mu$  egy előjeles mérték. Ekkor létezik  $h$  mérhető függvény amelyre

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \text{ valamint } |h| = 1.$$

Amennyiben  $\mu$  véges előjeles mérték, úgy  $h \in L^1(|\mu|)$ .

Bizonyítás.

Trivi, hogy  $\mu \ll |\mu|$ , ezért a Radon-Nikodym-tétel miatt létezik  $h$  mérhető függvény, melyre  $\mu(E) = \int_E h d|\mu|$  minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra. Amennyiben  $|\mu|(E) \neq 0$ , akkor

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1,$$

amiből következik, hogy  $|\mu|$  majdnem minden  $x \in X$  mellett  $-1 \leq h(x) \leq 1$ .

Legyen most  $r \in (0, 1)$  tetszőleges szám és  $A_r \doteq \{x \in X : |h(x)| < r\}$ . Elég megmutatnunk, hogy  $|\mu|(A_r) = 0$ , hiszen  $\{x \in X : |h(x)| < 1\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |h(x)| < 1 - \frac{1}{n}\}$  és  $|\mu|$  mérték. Alkossák az  $E_j$  halmazok az  $A_r$  partícióját, tehát  $A_r = \cup E_j$  és  $E_j \cap E_i = \emptyset$  ( $j \neq i$ ). Minden  $E_j$ -re

$$|\mu(E_j)| = \left| \int_{E_j} h d|\mu| \right| \leq \int_{E_j} |h| d|\mu| < \int_{E_j} r d|\mu| = r |\mu|(E_j).$$

Ezért  $\sum_j |\mu(E_j)| < r \sum_j |\mu|(E_j) = r |\mu|(A_r)$ . Mivel épp a baloldali szummák szuprémuma  $|\mu|(A_r)$ , ezért ebből  $|\mu|(A_r) < r |\mu|(A_r)$  is következik, ami  $r < 1$  miatt csak abban az esetben lehetséges, ha  $|\mu|(A_r) = 0$ .  $\square$

## 1.14.11 Állítás.

Legyen  $\mu$  egy nem negatív mérték és  $g \in L^1(\mu)$  függvény. Világos, hogy ekkor  $\lambda(E) \doteq \int_E g d\mu$  integrál véges előjeles mértéket definiál.  $E$  mérték teljesváltozására:

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu,$$

továbbá a pozitív és negatív változásokra:

$$\lambda^+(E) = \int_E g^+ d\mu \text{ valamint } \lambda^-(E) = \int_E g^- d\mu.$$

Bizonyítás.

Alkalmazzuk az előző állítást  $\lambda$  mértékre. Ekkor létezik  $|h| = 1$  függvény, hogy

$$\int_E g d\mu = \lambda(E) = \int_E h d|\lambda|.$$

Így minden  $E \in \mathcal{M}$  mérhető halmazra

$$|\lambda|(E) = \int_E 1 d|\lambda| = \int_E h^2 d|\lambda| = \int_E h h d|\lambda| = \int_E h d\lambda = \int_E h g d\mu$$

De  $|\lambda|$  nem negatív mérték, ezért  $hg \geq 0$  teljesül  $\mu$ -majdnem mindenütt. Így  $hg = |hg| = |g|$  is fennáll, azaz  $|\lambda|(E) = \int_E |g| d\mu$  valóban teljesül minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett.

A pozitív változásra vonatkozó állítás igazolásához

$$\lambda^+(E) = \frac{1}{2} (|\lambda| + \lambda)(E) = \int_E \frac{1}{2} (|g| + g) d\mu = \int_E g^+ d\mu,$$

és hasonlóan adódik a negatív változásra vonatkozó  $\lambda^-(E) = \int_E g^- d\mu$  formula is.  $\square$



## 1.14.12 Állítás. (Hahn felbontási tétele)

Legyen az  $(X, \mathcal{M})$  mérhető téren  $\mu$  egy véges előjeles mérték. Ekkor  $X$  felbontható diszjunkt  $A$  és  $B$  halmazok egyesítésére úgy, hogy a mérték  $\mu^+$  pozitív változása a  $\mu$ -nek az  $A$ -ra koncentrált része, és a  $\mu^-$  negatív változása a  $\mu$ -nek  $B$ -re koncentrált része legyen. Pontosabban: létezik  $A, B \in \mathcal{M}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = X$  melyekre

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \text{ valamint } \mu^-(E) = -\mu(E \cap B).$$

Bizonyítás.

Láttuk, hogy létezik  $h \in L^1(|\mu|)$ ,  $|h| = 1$  függvény, melyre  $\mu(E) = \int_E h d|\mu|$  fenáll minden  $E \in \mathcal{M}$  mellett. Legyen  $A \doteq \{x \in X : h(x) = 1\}$  valamint  $B \doteq \{x \in X : h(x) = -1\}$ . Világos, hogy  $A \cup B = X$  és  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A, B \in \mathcal{M}$ , továbbá az is könnyen látszik, hogy  $h^+ = \chi_A$ . Tetszőleges  $E \in \mathcal{M}$  esetén a az előző állítás pozitív változásra vonatkozó része szerint

$$\mu^+(E) = \int_E h^+ d|\mu| = \int_E \chi_A d|\mu| = \int_E \chi_A h d|\mu| = \int_{E \cap A} h d|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Evvel a pozitív részre vonatkozó állítást igazoltuk is. A negatív részre vonatkozó állítás már következik a fenti formulából hiszen tudjuk, hogy  $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$  és nyilván  $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ .  $\square$