MAT12

MATEMÁTICA A 12.º ANO

CRISTINA VIEGAS
SÉRGIO VALENTE

MANUAL DO PROFESSOR

VOL. 3

SIMULADOR DE EXAMES

Novo Programa Metas Curriculares

REVISÃO CIENTÍFICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DO PORTO

Texto

Índice vol. 3

Tema 5 Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Fórmulas trigonométricas

Fórmulas trigonométricas 6

Exercícios propostos 10

2. Limites e derivadas de funções trigonométricas

Limites de funções trigonométricas 12

Derivadas de funções trigonométricas 14

Exercícios propostos 20

3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

As funções trigonométricas como modelos de fenómenos periódicos 23

Osciladores harmónicos 28

Equações diferenciais envolvendo funções trigonométricas. Lei de Hooke e a segunda lei de Newton 33

Síntese 37

5 + 5 | Teste 1 38

Exercícios propostos 40

+Exercícios propostos 43

Tema 6 Primitivas e Cálculo Integral

1. Noção de primitiva

Conceito de primitiva 66

Propriedades fundamentais 67

Cálculo de primitivas 69

Síntese 79

2. Noção de integral

Conceito de integral 80

O teorema fundamental do cálculo integral e a fórmula de Barrow 81

Relação de Chasles 87

Extensão do conceito de integral 89

Síntese 95

5 + 5 | Teste 2 96

Exercícios propostos 98

Tema 7 Números Complexos

1. Introdução aos números complexos
Introdução histórica 104
O corpo dos números complexos 107

2. Operar com números complexos
Conjugado de um número complexo 114
Módulo de um número complexo 117
Inverso de um número complexo 122
Divisão de números complexos 123

3. Forma trigonométrica de um número complexo
Argumento de um número complexo 126
Exponencial complexa 127
Forma trigonométrica de um número complexo 128
Igualdade de números complexos na forma trigonométrica 132
Argumento principal de um número complexo 133
Operações com números complexos na forma trigonométrica 135

4. Raízes de um número complexo
Raízes de um número complexo 142
Equações do segundo grau 149
Síntese 152
5 + 5 | Teste 3 156
Exercícios propostos 158

+Exercícios propostos 164

No final encontras:

Calculadoras gráficas
Casio fx-CG 20 182
Texas Instruments TI-84 Plus C SE / / CE-T 186
Texas Instruments TI-Nspire CX 191

Respostas
Exercícios propostos 196

No volume 1 encontras:

Tema 1 Cálculo Combinatório

Tema 2 Probabilidades

No volume 2 encontras:

Tema 3 Funções Reais de Variável Real

Tema 4 Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

Tema 5

Trigonometria e Funções Trigonométricas

Este tema está organizado em:

1. **Fórmulas trigonométricas**
   - Exercícios Propostos
2. **Limites e derivadas de funções trigonométricas**
   - Exercícios Propostos
3. **Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton**
   - Síntese
   - 5 + 5 | Teste 1
   - Exercícios Propostos

+Exercícios Propostos

1. Fórmulas trigonométricas

RECORDA

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PROFESSOR

Gestão curricular

Todos os alunos devem conhecer esta propriedade e saber aplicá-la. No entanto, a respetiva demonstração é facultativa, não sendo, portanto, exigível aos alunos.

NOTA

Designamos por $\alpha - \beta$ um ângulo cuja soma com β é igual a α.

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Fórmulas trigonométricas»

Fórmulas trigonométricas

SERÁ QUE...? $\cos(\alpha - \beta)$

a) Indica o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$, tendo em consideração que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

b) Determina o valor de $\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}$.

Será que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta$?

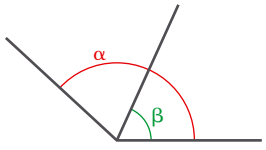
Sejam α e β dois ângulos convexos, com $\alpha > \beta$.

Tem-se:

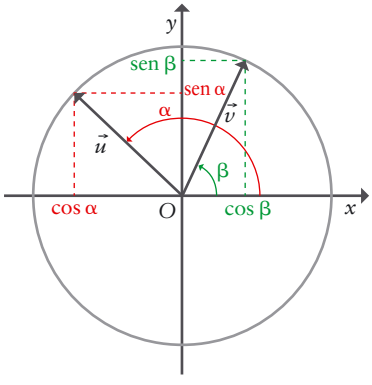
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Demonstração

Sejam α e β dois ângulos convexos, com $\alpha > \beta$.



Na figura ao lado está representada a circunferência trigonométrica, bem como dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de norma 1, que fazem, com o semieixo positivo Ox, os ângulos α e β.



As coordenadas de $\vec{u}$ são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

As coordenadas de $\vec{v}$ são $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$.

Tem-se, assim, que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Mas, por outro lado, tem-se que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}) = 1\times 1\times\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

Logo, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Nota: Prova-se que esta propriedade, que se demonstrou ser válida para medidas de amplitudes de ângulos convexos, é válida para quaisquer medidas de amplitudes.

1 Tendo em conta que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

determina $\cos\frac{\pi}{12}$.

RECORDA

Dados os vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ num referencial o.n., então:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

($\vec{u}\cdot\vec{v}$ é o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

PROFESSOR

Soluções

1. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Assim, tem-se, para quaisquer números reais x e y:

Propriedade 1: $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Têm-se, ainda, as seguintes propriedades, também válidas para quaisquer números reais x e y.

Propriedade 2: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Demonstração

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) = \cos x \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) =$$
$$= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

RECORDA

A função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar.

Propriedade 3: $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$

Demonstração

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen} y =$$
$$= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

2D AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Seno e cosseno da soma

Propriedade 4: $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$

Propriedade 5: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Demonstração

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Propriedade 6: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

2

a) Demonstra a propriedade 4.

b) Demonstra a propriedade 6.

3 Determina, sem recorrer à calculadora:

a) $\operatorname{sen}(2\beta)$ e $\cos(2\beta)$, sabendo que $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{4}$ e $\cos\beta < 0$.

b) $\operatorname{sen}\alpha$, sabendo que $\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}$ e $0 < 2\alpha < \pi$.

4 Determina $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}$.

Exercícios resolvidos

1. Mostra que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Resolução

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

continua ▶

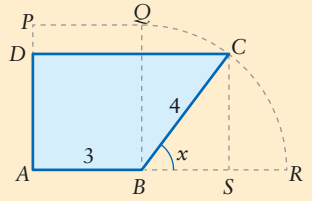
PROFESSOR

Soluções

3. a) $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ e $\frac{7}{8}$ **b)** $\sqrt{\frac{3}{8}}$

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 Na figura está representado um retângulo $[ABQP]$ e um arco de circunferência QR, com centro em B.



O ponto C desloca-se sobre o arco QR, nunca coincidindo com o ponto R. O ponto D desloca-se sobre o segmento $[AP]$, acompanhando o movimento do ponto C, de tal modo que $[CD]$ é sempre paralelo a $[AR]$. Para cada posição do ponto C, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo RBC.
Tem-se $\overline{AB}=3$ e $\overline{BC}=4$.

a) Mostra que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada, em função de x, por:
$A(x)=12\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}(2x)$

b) Determina $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

6 Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações.

a) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x=2$

RECORDA

$\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \vee$
$\vee\ x=\pi-\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

PROFESSOR

Soluções

5. b) $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$

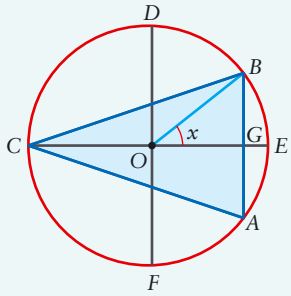
Interpretação geométrica: quando $x=\frac{\pi}{2}$, o ponto C coincide com o ponto Q e o ponto D coincide com o ponto P, pelo que o quadrilátero $[ABCD]$ coincide com o retângulo $[ABQP]$, cuja área é $3\times4=12$.

6. a) $x=2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

continuação

2. Na figura está representada uma circunferência de raio 2. Os segmentos de reta $[CE]$ e $[DF]$ são dois diâmetros perpendiculares dessa circunferência.



Considera que um ponto B se desloca ao longo do arco DE, sem coincidir com o ponto E, e que um ponto A se desloca ao longo do arco EF, de tal forma que $[AB]$ é sempre paralelo a $[DF]$. Nestas condições, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo isósceles. Seja G o ponto de interseção de $[AB]$ com $[CE]$.

Para cada posição do ponto B, x designa a amplitude, em radianos, do ângulo EOB $\left(x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por $4\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}(2x)$.

Resolução

Tem-se $\operatorname{sen}x=\frac{\overline{BG}}{2}$ e $\cos x=\frac{\overline{OG}}{2}$, pelo que $\overline{BG}=2\operatorname{sen}x$ e $\overline{OG}=2\cos x$.
Vem, então:

Área do triângulo $[ABC]=\frac{\overline{AB}\times\overline{CG}}{2}=\frac{2\overline{BG}\times(\overline{CO}+\overline{OG})}{2}=$

$=\overline{BG}\times(\overline{CO}+\overline{OG})=2\operatorname{sen}x\,(2+2\cos x)=$

$=4\operatorname{sen}x+2\times2\operatorname{sen}x\cos x=4\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}(2x)$

3. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{sen}x+\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Resolução

Para resolver esta equação, vamos utilizar um artifício, tendo em vista transformar o primeiro membro no seno de uma soma.

$$\operatorname{sen}x+\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}x+1\times\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi \vee x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

continua

continuação

4. Resolve, em $[0, \pi]$, a equação $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = 2\cos x + 1$.

Resolução

$\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = 2\cos x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 2\cos x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x\,(2\cos x + 1) = 2\cos x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \vee \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, vem: $x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2}$.

A solução $-\frac{2\pi}{3}$ não pertence ao intervalo $[0, \pi]$.

Para qualquer outro valor de k, nenhuma das correspondentes soluções pertence ao intervalo $[0, \pi]$.

Portanto, as soluções da equação, no intervalo $[0, \pi]$, são $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

RECORDA

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee$
$\vee\ x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5. Resolve, em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)} = \sqrt{3}$.

Resolução

$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{2\cos^2 x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

Em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, a solução da equação, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ é $\frac{\pi}{3}$.

7 Resolve, em $[-\pi, \pi]$, a equação $\cos(2x) - 3\operatorname{sen} x = 2$.

RECORDA

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

PROFESSOR

Soluções

7. Conjunto-solução: $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

Caderno de exercícios
Fórmulas trigonométricas

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 8 a 22 (págs. 10 e 11).

Exercícios propostos

8 Tendo em conta que $105° = 45° + 60°$, determina o valor exato de $\text{sen } 105°$, $\cos 105°$ e $\text{tg } 105°$.

9 Determina $\text{sen}(\alpha + \beta)$, sabendo que:

a) $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{1}{4}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

b) $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{12}$, $\text{tg } \beta = \frac{3}{4}$, $\alpha \in [0, \pi]$ e $\beta \in [\pi, 2\pi]$.

10 Determina $\cos(2\alpha)$, sabendo que $\text{tg } \alpha = 3$.

11 Determina o valor de:

a) $\text{sen } 23° \cos 37° + \text{sen } 37° \cos 23°$

b) $\cos 20° \cos 25° - \text{sen } 20° \text{ sen } 25°$

c) $\text{sen } 15° \cos 15°$

12 Prova que as seguintes igualdades são verdadeiras, quaisquer que sejam os valores das variáveis para os quais as expressões envolvidas têm significado:

a) $\frac{\text{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} = \text{tg } x - \text{tg } y$

b) $\frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{\text{tg } x - \text{tg } y} = \frac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}(x-y)}$

c) $\text{sen}(3x) = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$

d) $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

13

a) Prova que a seguinte igualdade é verdadeira, qualquer que seja o valor de x para o qual as expressões envolvidas têm significado.

$$\frac{1 - \cos(2x)}{\text{sen}(2x)} = \text{tg } x$$

b) Utiliza a igualdade da alínea anterior para determinar o valor exato de $\text{tg } 15°$.

14

a) Tendo em conta que $15° = 45° - 30°$, determina o valor exato de $\cos 15°$.

b) Mostra que $\frac{1 + \cos(2x)}{2} = \cos^2 x$ e que $\frac{1 - \cos(2x)}{2} = \text{sen}^2 x$.

c) Utiliza as igualdades da alínea anterior para determinar $\text{sen } 7{,}5°$ e $\cos 7{,}5°$. Apresenta os valores pedidos arredondados às milésimas.

15 Sabendo que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, mostra que:

$$(\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta)(\cos \alpha + \cos \beta) = 1 + \text{sen}(2\alpha)$$

16 Determina o valor de:

a) $\cos\left(\text{arcsen}\left(-\frac{3}{5}\right) + \arccos \frac{4}{5}\right)$

b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \text{arctg } \frac{4}{3}\right)$

c) $\text{sen}\left(2 \text{ arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

PROFESSOR

Soluções

8. $\text{sen } 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\text{tg } 105° = -2 - \sqrt{3}$

9. a) $\frac{5\sqrt{3}-2}{12}$

b) $\frac{16}{65}$

10. $-\frac{4}{5}$

11. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$

13. b) $\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$

14. a) $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen } 7{,}5° \approx 0{,}131$

$\cos 7{,}5° \approx 0{,}991$

16. a) 1

b) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

c) $-\frac{24}{25}$

17 Resolve, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,(2x) = 0$

b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x)$

c) $\cos^2(2x) = \cos x + \text{sen}^2(2x)$

d) $\text{sen}\,x + \cos x = 1$

e) $3\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 3$

f) $2\,\text{sen}\,x - \sqrt{12}\cos x = -2$

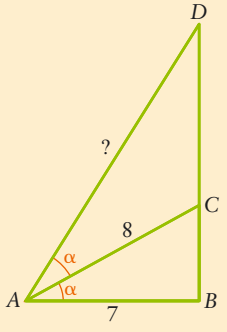
18 Resolve, em $[0, 2\pi]$, a equação seguinte:

$$\text{sen}\,x\,\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

19 Resolve, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a equação seguinte:

$$[2 + 2\cos(2x)]\,\text{tg}\,x = 1$$

20 Na figura seguinte está representado um triângulo retângulo $[ABD]$.



AULA DIGITAL
Resolução
Exercício 20 (resolução passo a passo)

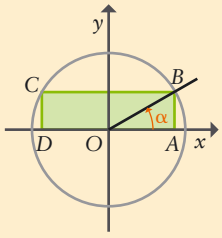
O ponto C pertence ao cateto $[DB]$.

Tem-se:

- $\overline{AB} = 7$
- $\overline{AC} = 8$
- $B\hat{A}C = C\hat{A}D = \alpha$

Determina $\overline{AD}$.

21 Na figura seguinte está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.



Considera que um ponto B se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante. Para cada posição do ponto B, seja $[ABCD]$ o retângulo tal que o vértice C também pertence à circunferência e os vértices A e D pertencem ao eixo Ox. Seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$.

a) Mostra que a área do retângulo $[ABCD]$ é dada por $\text{sen}\,(2\alpha)$.

b) Determina a área do retângulo, para $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

22

a) Mostra que, para quaisquer números reais x e y tais que as expressões envolvidas tenham significado, tem-se:

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y}{1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y}$$

b) Sejam a e b números reais.
Determina $\text{tg}\,b$, sabendo que $\text{tg}\,(a + b) = 1$ e $\text{tg}\,a = \sqrt{2}$.

PROFESSOR

Soluções

17. a) $x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee$
$\vee\, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$
$\vee\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee$
$\vee\, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

18. $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee$
$\vee\, x = \frac{4\pi}{3}$

19. $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$

20. $\frac{224}{17}$

21. b) $\frac{1}{2}$

22. b) $2\sqrt{2} - 3$

2. Limites e derivadas de funções trigonométricas

Limites de funções trigonométricas

PROFESSOR

Gestão curricular

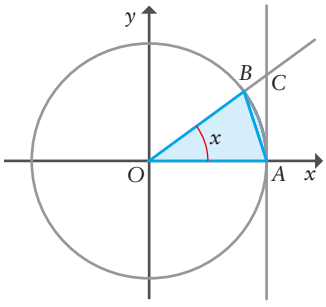
Todos os alunos devem conhecer esta propriedade e saber aplicá-la. No entanto, a respetiva demonstração é facultativa, não sendo, portanto, exigível aos alunos.

Propriedade

Tem-se, para qualquer x pertencente a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen} x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Demonstração

Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica. A reta AC é tangente à circunferência no ponto A.



A área do setor circular (a azul) está compreendida entre a área do triângulo $[OAB]$ e a área do triângulo $[OAC]$.

Portanto, $\frac{1 \times \operatorname{sen} x}{2} \leqslant \frac{x \times 1^2}{2} \leqslant \frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2}$, pelo que $\frac{\operatorname{sen} x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, de onde se conclui que $\operatorname{sen} x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

NOTA

A área de um setor circular é dada por $\frac{\alpha r^2}{2}$, onde r é o raio e α é a amplitude, em radianos, do ângulo ao centro correspondente.

2.0 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Limites e derivadas de funções trigonométricas»

Propriedade

Tem-se o seguinte limite notável:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Demonstração

Basta fazer a demonstração supondo que $x \longrightarrow 0^+$, pois tem-se:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{y=-x}{=} \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Suponhamos, então, que $x > 0$. Como estamos a admitir que x tende para zero, podemos supor que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, pelo que, de acordo com a propriedade anterior, tem-se $\operatorname{sen} x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$.

Vem, então: $\operatorname{sen} x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geqslant \cos x \Leftrightarrow \cos x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1$

Como $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ e como $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$, vem* $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

NOTA

* Recorda o teorema das funções enquadradas.

Exercícios resolvidos

1. Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x$

Resolução

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}\right) \underset{y=\frac{1}{x}}{\overset{\infty\times 0}{=}} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(2y)}{y} = \lim\limits_{2y\to 0^-} \dfrac{2\operatorname{sen}(2y)}{2y} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x} \underset{y=x-\frac{\pi}{2}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{-2y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} y}{-2y} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = \dfrac{1}{2}$

d) Tal como a figura ao lado pretende ilustrar, tem-se $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$.

2. Considera a função f definida em $]-2\pi, +\infty[$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{1-\cos x} & \text{se } -2\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{2x}{2x - \operatorname{sen} x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostra que f é contínua no ponto 0.

b) Determina uma equação para cada uma das assíntotas ao gráfico de f .

c) Mostra que $\exists c \in]0, \pi[: f(c) = c$.

Resolução

a) Tem-se:

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[(1+\cos x) \times \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x}\right] =$

$= 2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} \underset{y=x^2}{=} 2 \times \dfrac{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}{\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} = 2 \times \dfrac{1}{1\times 1} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{2x - \operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{2 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, f é contínua no ponto 0.

continua ▶

23 Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \operatorname{sen}(2x)}{x}$

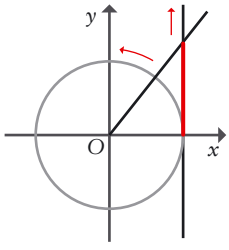
b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\operatorname{tg} x - 4\operatorname{sen} x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 182
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 186
TI-Nspire CX ..... pág. 191



24 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - 4\cos x}{x(x + \operatorname{sen} x)} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostra que a função f é contínua no ponto 0.

b) Determina os zeros da função f que pertencem ao intervalo $[-3\pi, 2\pi]$.

PROFESSOR

Soluções

23. a) 1 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 1

24. b) $-2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

continuação

b) Como f é contínua em $]-2\pi, +\infty[$, só a reta de equação $x=-2\pi$ poderá ser assíntota vertical ao seu gráfico.

Tem-se:

$$\lim_{x \to (-2\pi)^+} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1-\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(4\pi^2)}{0^+} = +\infty^*$$

Portanto, a reta de equação $x=-2\pi$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{x}\operatorname{sen} x} \overset{**}{=} \frac{2}{2-0} = 1$$

Portanto, a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f.

c) Seja g a função definida por $g(x)=f(x)-x$.

Tem-se:

- a função g é contínua em $[0, \pi]$, pois é a diferença de duas funções contínuas;
- $g(0)=f(0)-0=2-0=2$, pelo que $g(0)>0$;
- $g(\pi)=f(\pi)-\pi=\frac{2\pi}{2\pi-\operatorname{sen}\pi}-\pi=1-\pi$, pelo que $g(\pi)<0$.

Podemos, então, concluir, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, que:

$$\exists c \in]0, \pi[: \ g(c)=0$$

Portanto, $\exists c \in]0, \pi[: \ f(c)-c=0$, ou seja, $\exists c \in]0, \pi[: \ f(c)=c$.

NOTA

* Tem-se $\operatorname{sen}(4\pi^2) \approx 0{,}978$, pelo que $\operatorname{sen}(4\pi^2)>0$.

NOTA

** Aplica-se o teorema das funções enquadradas para concluir que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\operatorname{sen} x\right) = 0$$

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 29 a 33 (pág. 20).

Derivadas de funções trigonométricas

Propriedade 1

$\operatorname{sen}' x = \cos x$

Demonstração

$$\operatorname{sen}' x = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} h \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \operatorname{sen} h \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \times \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \times \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} + \cos x \times 1 =$$

$$= \operatorname{sen} x \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos x =$$

NOTA

Embora de forma incorreta, escreve-se, frequentemente, $(f(x))'$, onde deveria estar $f'(x)$. Assim, poderás encontrar $(\operatorname{sen} x)'$, no lugar de $\operatorname{sen}' x$.

Estas considerações aplicam-se a várias situações.

20 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Derivada da função seno e derivada da função cosseno

$$= \operatorname{sen} x \times \lim_{h \to 0} \left[-\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} \right] + \cos x = \operatorname{sen} x \times \lim_{h \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} \times \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) + \cos x =$$

$$= \operatorname{sen} x \times \frac{0}{2} \times 1 + \cos x = 0 + \cos x = \cos x$$

Propriedade 2

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u \quad (u$ designa uma função$)$

RECORDA

Se f e g são funções diferenciáveis, $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'\big(f(a)\big)$.

Demonstração

Resulta da propriedade 1 e da regra de derivação de uma função composta.

Propriedade 3

$\cos' x = -\operatorname{sen} x$

Demonstração

$$\cos' x = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) =$$

$$= -1 \times \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

Propriedade 4

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u \quad (u$ designa uma função$)$

Demonstração

Resulta da propriedade 3 e da regra de derivação de uma função composta.

Propriedade 5

$\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Demonstração

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x \, (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Propriedade 6

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} \quad (u$ designa uma função$)$

Demonstração

Resulta da propriedade 5 e da regra de derivação de uma função composta.

Exercícios resolvidos

1. Determina uma expressão da derivada de cada uma das funções que a seguir se definem.

a) $a(x) = x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

b) $b(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) - \operatorname{sen}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$

c) $c(x) = 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$

d) $d(x) = (x - \operatorname{tg} x)\cos^2 x$

Resolução

a) $a'(x) = 1 - \dfrac{\cos x(1 + \cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} =$

$= 1 - \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} =$

$= 1 - \dfrac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} =$

$= 1 - \dfrac{1}{1 + \cos x} =$

$= \dfrac{1 + \cos x - 1}{1 + \cos x} =$

$= \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$

b) $b'(x) = 3 \times \dfrac{1}{3} \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - 3 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right) \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \times \dfrac{1}{3} =$

$= \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right) \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)\left[1 - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)\right] =$

$= \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right) =$

$= \cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$

c) $c'(x) = 3 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} + 3 \operatorname{tg}^2 x \times \dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{3}{\cos^2 x}(1 + \operatorname{tg}^2 x) =$

$= \dfrac{3}{\cos^2 x} \times \dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{3}{\cos^4 x}$

d) $d'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) \cos^2 x + (x - \operatorname{tg} x)\, 2 \cos x(-\operatorname{sen} x) =$

$= \cos^2 x - 1 - 2x \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen}^2 x =$

$= \operatorname{sen}^2 x - x \operatorname{sen}(2x)$

continua ▶

25 Determina uma expressão da derivada de cada uma das funções que a seguir se definem.

a) $a(x) = 4 \operatorname{sen} x - \cos(3x)$

b) $b(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

c) $c(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

d) $d(x) = \operatorname{sen}^2 x$

e) $e(x) = \operatorname{sen}^3 x \cos x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

g) $g(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$

h) $h(x) = \dfrac{\cos(2\pi x)}{2\pi} + x \operatorname{sen}(2\pi x)$

PROFESSOR

Soluções

25. a) $4 \cos x + 3 \operatorname{sen}(3x)$

b) $x \cos x$

c) $\dfrac{1}{1 + \cos x}$

d) $\operatorname{sen}(2x)$

e) $3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x$

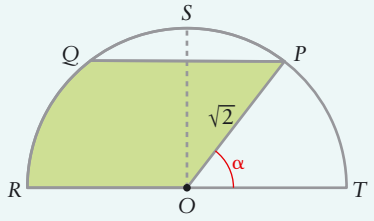
f) $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

h) $2\pi x \cos(2\pi x)$

continuação

2. Na figura está representada uma semicircunferência de centro em O e raio $\sqrt{2}$.



$[RT]$ é o diâmetro da semicircunferência. O ponto S pertence à semicircunferência. A reta OS é perpendicular à reta RT.

Admite que um ponto P se desloca ao longo do arco ST, nunca coincidindo com o ponto S, nem com o ponto T. Para cada posição do ponto P, considera a região colorida a verde (a corda $[PQ]$ é paralela ao diâmetro $[RT]$).

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo TOP.

a) Mostra que a área da região colorida a verde é dada por:

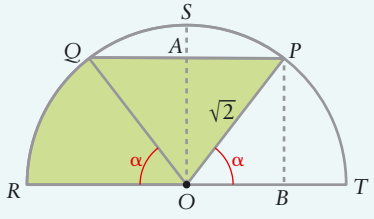
$$f(\alpha) = \alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)$$

b) Determina o valor de α para o qual a área da região colorida a verde é máxima.

Resolução

a) A área da região colorida a verde é a soma da área do triângulo $[OPQ]$ com a área do setor circular OQR.

Seja B a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta RT e seja A o ponto de interseção da reta PQ com a reta OS.



Tem-se:

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{PB}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha$
- $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OB}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \sqrt{2}\cos\alpha$

Área do triângulo $[OPQ] = \dfrac{\overline{PQ} \times \overline{OA}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\cos\alpha \times \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha}{2} =$

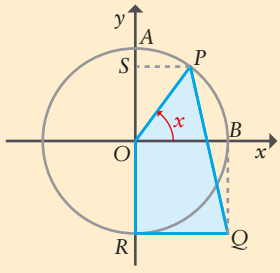
$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$

Área do setor circular $OQR = \dfrac{\alpha \times (\sqrt{2})^2}{2} = \alpha$

Área da região colorida a verde $= \alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)$

continua

26 Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.



Tem-se:

- o ponto Q tem coordenadas $(1, -1)$;
- o ponto R tem coordenadas $(0, -1)$.

Considera que o ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BOP e seja $f(x)$ a área do quadrilátero $[OPQR]$.

a) Mostra que:

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}{2}$$

b) Determina o valor de x para o qual a área do quadrilátero $[OPQR]$ é máxima.

c) Determina $f(0)$ e $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$.

Interpreta geometricamente os valores obtidos.

20 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercício 26 (resolução passo a passo)

PROFESSOR

Soluções

26. b) $\frac{\pi}{4}$

c) $f(0) = 1$

Interpretação: $f(0)$ é a área do quadrado $[OBQR]$.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1$

Intepretação: $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$ é a área do triângulo $[AQR]$.

continuação

b) Tem-se: $f'(\alpha) = 1 + 2\cos(2\alpha)$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Como o ponto P se desloca ao longo do arco ST, nunca coincidindo com o ponto S, nem com o ponto T, vem que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, pelo que $2\alpha \in]0, \pi[$.

Ora, entre 0 e π, há apenas um número real cujo cosseno é $-\frac{1}{2}$, que é $\pi - \frac{\pi}{3}$, ou seja, $\frac{2\pi}{3}$.

Por isso, $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Tem-se:

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	$+$	0	$-$
f	↗	Máx.	↘

É, portanto, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$ que a área da região colorida a verde é máxima.

3. Considera a função f, de domínio $]0, 2\pi[$, definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - (1 + \operatorname{sen} x)^2}{2}$$

a) Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

b) Seja A o ponto do gráfico de f de abcissa $\frac{3\pi}{2}$.

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

Seja B o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

Seja C o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

Determina a área do triângulo $[OBC]$.

Resolução

a) Tem-se $f'(x) = \frac{1}{2}[2x - 2(1 + \operatorname{sen} x)\cos x] =$

$$= x - (1 + \operatorname{sen} x)\cos x =$$
$$= x - \cos x - \operatorname{sen} x \cos x =$$
$$= x - \cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$f''(x) = 1 + \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = 1 + \operatorname{sen} x - \cos(2x) =$$
$$= 1 + \operatorname{sen} x - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 1 + \operatorname{sen} x - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x =$$
$$= 1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$$

continua

NOTA

Dado que, por exemplo, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{4} = 1$, conclui-se que $f'(x) > 0$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

27 Seja f a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por:

$$f(x) = x^2 - \cos(2x)$$

Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e determina as abcissas dos pontos de inflexão.

PROFESSOR

Soluções

27. A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e está voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Existem dois pontos de inflexão: um com abcissa $\frac{\pi}{3}$ e outro com abcissa $\frac{2\pi}{3}$.

continuação

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x\,(2\,\text{sen}\, x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0 \vee \text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$

Como $x \in]0, 2\pi[$, vem:

$$x = \pi \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$$

Tem-se o seguinte quadro:

x	0	π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$	2π
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Portanto, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima nos intervalos $]0, \pi]$ e $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $\left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$ e $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$.

Os pontos do gráfico de f cujas abcissas são π, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ são pontos de inflexão.

b) Tem-se:

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{sen}\left(2 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é do tipo $y = \frac{3\pi}{2}x + b$.

Como $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{9\pi^2}{8}$, tem-se $A\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi^2}{8}\right)$.

Então:

$$\frac{9\pi^2}{8} = \frac{3\pi}{2} \times \frac{3\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = -\frac{9\pi^2}{8}$$

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = \frac{3\pi}{2}x - \frac{9\pi^2}{8}$.

Portanto, tem-se $B\left(0, -\frac{9\pi^2}{8}\right)$.

Vejamos qual é a abcissa do ponto C:

$$\frac{3\pi}{2}x - \frac{9\pi^2}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Vem, então:

$$\text{Área do triângulo } [OBC] = \frac{\frac{3\pi}{4} \times \frac{9\pi^2}{8}}{2} = \frac{27\pi^3}{64}$$

NOTA

Para obteres a variação de sinal de f'' deves estudar o sinal de $\text{sen}\, x$ e de $2\,\text{sen}\, x + 1$.

28 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 1 + \text{sen}\,(2x)\cos x$$

Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0.

PROFESSOR

Soluções

28. $y = 2x + 1$

Caderno de exercícios
Limites e derivadas de funções trigonométricas

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 34 a 41 (págs. 20 a 22).

Exercícios propostos

29 Calcula os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

g) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \left(\cos x \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

30 Seja f a função, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \dfrac{2x - \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x}$.

a) Determina $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

31 Seja f a função, de domínio $[0, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x}$.

a) Determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Determina os zeros da função f.

c) Seja α pertencente ao domínio da função f tal que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Determina $f(\alpha)$.

d) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

32 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos x}{\pi - 2x} & \text{se } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ k & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

onde k designa um número real.

a) Determina $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

b) Determina os zeros da função f que pertencem ao intervalo $[\pi, 3\pi]$.

c) Determina o valor de k, sabendo que a função f é contínua.

33 Seja f a função, domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2} & \text{se } x < 1 \\ 1 + 2\cos(\pi x) & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Determina $f\left(\dfrac{7}{4}\right)$.

b) Determina os zeros da função f que pertencem ao intervalo $[1, 6]$.

c) Averigua se a função f é contínua no ponto 1.

34 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + \operatorname{sen}(2x)$.

Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(\pi)$.

PROFESSOR

Soluções

29. a) $\frac{1}{9}$ **b)** $\sqrt{2}$
c) $\frac{2}{\pi}$ **d)** $+\infty$
e) $\frac{1}{2}$ **f)** $\sqrt{3}$
g) $+\infty$ **h)** 0

30. a) π
b) O gráfico de f tem uma assíntota vertical, de equação $x = \pi$.

31. a) $2\sqrt{3}$
b) 0, $\frac{2\pi}{3}$ e π
c) $\frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}$
d) Existe uma assíntota vertical, de equação $x = \frac{\pi}{2}$.

32. a) $\frac{3}{\pi}$
b) $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$
c) 1

33. a) $1 + \sqrt{2}$
b) $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}$
c) A função f é contínua no ponto 1.

34. 5

35 Determina uma expressão da derivada de cada uma das funções que a seguir se definem.

a) $a(x) = 2\,\text{sen}\,x + \cos(3x)$

b) $b(x) = \text{sen}^2 x + \cos(2x)$

c) $c(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \text{sen}\,x}$

d) $d(x) = \text{sen}(2x)\cos(3x)$

e) $e(x) = \text{sen}\,x\cos^3 x$

f) $f(x) = x\,\text{sen}\,x + \cos x$

g) $g(x) = \dfrac{1}{3}\text{tg}^3 x - \text{tg}\,x + x$

h) $h(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{2\cos^2 x}$

36 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{2}{3}\,\text{sen}^2(3x)$$

Seja P o ponto do gráfico de f de abcissa $\dfrac{\pi}{36}$.

Determina a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

37 Considera a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x + \text{sen}\dfrac{\pi}{x}$.

a) Determina o valor de $f(1) + 14f\left(\dfrac{6}{7}\right)$.

b) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

c) Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2.

38 Considera a função f, de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $f(x) = x^2 + 4\,\text{sen}\,x$.

a) Determina uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

b) Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

39 Considera a função f, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}$.

a) Estuda a função quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

b) Estuda a função quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

c) Mostra que $\exists c \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right] : f(c) = 2{,}3$.

d) De um trapézio $[ABCD]$, sabe-se que:

- as bases $[AB]$ e $[CD]$ são paralelas ao eixo Oy;
- A e D são pontos do eixo Ox;
- B e C são pontos do gráfico de f;
- o ponto A tem abcissa $\dfrac{\pi}{3}$;
- o ponto C tem ordenada 3 e a sua abcissa é superior à do ponto A.

Determina o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$.

PROFESSOR

Soluções

35. a) $2\cos x - 3\,\text{sen}(3x)$

b) $-\text{sen}(2x)$

c) $-\dfrac{1}{1 + \text{sen}\,x}$

d) $2\cos(2x)\cos(3x) - 3\,\text{sen}(2x)\,\text{sen}(3x)$

e) $\cos^4 x - 3\,\text{sen}^2 x\cos^2 x$

f) $x\cos x$

g) $\text{tg}^4 x$

h) $\dfrac{1 + \text{sen}^2 x}{2\cos^3 x}$

36. $\dfrac{\pi}{4}$

37. a) 6

b) A reta de equação $y = x$ é a única assíntota não vertical ao gráfico de f.

c) $y = x + 1$

38. a) $y = 4x$

b) A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right]$ e $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e está voltada para baixo no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$. Existem dois pontos de inflexão: um com abcissa $\dfrac{\pi}{6}$ e outro com abcissa $\dfrac{5\pi}{6}$.

39. a) Existem duas assíntotas verticais, uma de equação $x = 0$ e outra de equação $x = \pi$.

b) A função é decrescente no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

A função tem um mínimo para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $\dfrac{(6 + \sqrt{3})\pi}{6}$

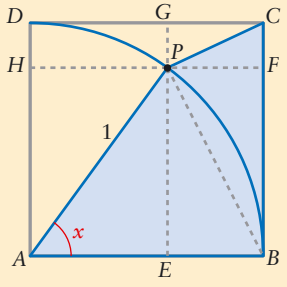
40 Seja f a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \cos x$.

Sejam a e b números reais pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$, tais que $a + b = \pi$. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.

Seja s a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa b.

Justifica que as retas r e s são paralelas.

41 Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado 1 e um arco de circunferência BD.



Considera que um ponto P se move ao longo deste arco, sem coincidir com o ponto B.

Para cada posição do ponto P, fica definida a região colorida a azul $[ABCP]$.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

a) Mostra que a área da região colorida a azul é dada, em função de x, por:

$$a(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{2}$$

b) Determina $a(\beta)$, sabendo que $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e que $\operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}$.

c) Determina $a\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

d) Mostra que o perímetro da região colorida a azul é dado, em função de x, por:

$$p(x) = 3 + \sqrt{3 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}$$

e) Determina $p\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

f) Determina o valor de x para o qual é mínimo o perímetro da região colorida a azul.

PROFESSOR

Soluções

41. b) $\frac{10}{13}$

c) $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Quando $x = \frac{\pi}{4}$, o ponto P pertence ao segmento de reta $[AC]$, pelo que a região colorida a azul é o triângulo $[ABC]$, cuja área é $\frac{1}{2}$.

e) $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto D, pelo que a região colorida a azul é o quadrado $[ABCD]$, cujo perímetro é 4.

f) $\frac{\pi}{4}$

3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

As funções trigonométricas como modelos de fenómenos periódicos

Existem na natureza muitos fenómenos periódicos, como, por exemplo, as marés, o movimentos dos astros, o tempo que decorre do nascer ao pôr do sol, etc.

Uma vez que as funções trigonométricas são funções periódicas, elas são utilizadas muitas vezes para modelar matematicamente esses fenómenos.

Tendo em vista a modelação de fenómenos periódicos, vamos estudar com algum detalhe funções cuja expressão analítica tem uma das seguintes formas:

$a\,\text{sen}\,(bx+c)+d$, $a\cos(bx+c)+d$ ou $a\,\text{tg}\,(bx+c)+d$, onde a , b , c e d designam constantes reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Propriedade 1

Qualquer função definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{a\,\text{sen}\,(bx+c)+d}$, ou do tipo $\boldsymbol{a\cos(bx+c)+d}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem contradomínio $[d-|a|, d+|a|]$ e é periódica, com período fundamental igual a $\frac{2\pi}{|b|}$.

Demonstração

Seja $f(x)=a\,\text{sen}\,(bx+c)+d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Comecemos por provar que o contradomínio de f é $[d-|a|, d+|a|]$.

Como $bx+c$ pode tomar qualquer valor real, o contradomínio da função definida por $\text{sen}\,(bx+c)$ é igual ao contradomínio da função seno, ou seja, é o intervalo $[-1, 1]$. Então, o contradomínio da função definida por $a\,\text{sen}\,(bx+c)$ é o intervalo $[-|a|, |a|]$, de onde vem que o contradomínio de f é o intervalo $[d-|a|, d+|a|]$.

Provemos, agora, que f é periódica, com período fundamental igual a $\frac{2\pi}{|b|}$.

Tem-se:

f é periódica de período $T \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a\,\text{sen}\,[b(x+T)+c]+d = a\,\text{sen}\,(bx+c)+d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a\,\text{sen}\,(bx+bT+c) = a\,\text{sen}\,(bx+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \text{sen}\,(bx+c+bT) = \text{sen}\,(bx+c) \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} bT = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow T = \frac{2k\pi}{b}$, com $k \in \mathbb{Z}$

RECORDA

Uma função f diz-se **periódica** de período T se, para qualquer x pertencente a D_f :

- $x+T \in D_f$
- $f(x+T)=f(x)$

Recorda, ainda, que T é o **período fundamental** (ou **período positivo mínimo**) de uma função f se:

- $T>0$;
- f é periódica de período T ;
- qualquer número real positivo inferior a T não é período da função f .

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton»

NOTA

* Repara que esta condição traduz que bT é período da função seno, dado que $bx+c$ toma todos os valores reais. Ora, o período fundamental da função seno é 2π . Portanto, todo o período do seno tem de ser da forma $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2D AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Funções trigonométricas
  Geogebra: Transformações dos gráficos de funções trigonométricas

Se $b > 0$, o menor valor positivo de T é obtido quando $k = 1$;

Se $b < 0$, o menor valor positivo de T é obtido quando $k = -1$.

Em qualquer dos casos, o menor valor positivo possível para T é $\frac{2\pi}{|b|}$.

Portanto, f é periódica, com período fundamental igual a $\frac{2\pi}{|b|}$.

De igual modo se provam estes resultados para as funções definidas por uma expressão do tipo $a\cos(bx + c) + d$.

RECORDA

O período fundamental de uma função também se designa por período positivo mínimo.

Propriedade 2

Qualquer função definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{a\,\mathrm{tg}(bx + c) + d}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem contradomínio $\mathbb{R}$ e é periódica, com período fundamental igual a $\frac{\pi}{|b|}$.

Demonstração

Seja $f(x) = a\,\mathrm{tg}(bx + c) + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Comecemos por provar que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

Como $bx + c$ pode tomar qualquer valor real do domínio da tangente, o contradomínio da função definida por $\mathrm{tg}(bx + c)$ é igual ao contradomínio da função tangente, ou seja, é $\mathbb{R}$. Então, o contradomínio da função definida por $a\,\mathrm{tg}(bx + c)$ é $\mathbb{R}$, de onde vem que o contradomínio de f também é $\mathbb{R}$.

Provemos, agora, que f é periódica, com período fundamental igual a $\frac{\pi}{|b|}$.

Tem-se:

f é periódica de período $T \Leftrightarrow \forall x \in D_f, f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f, a\,\mathrm{tg}[b(x + T) + c] + d = a\,\mathrm{tg}(bx + c) + d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f, a\,\mathrm{tg}(bx + bT + c) = a\,\mathrm{tg}(bx + c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \mathrm{tg}(bx + c + bT) = \mathrm{tg}(bx + c) \overset{*}{\Leftrightarrow}$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} bT = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T = \frac{k\pi}{b}$, com $k \in \mathbb{Z}$

NOTA

* Repara que esta condição traduz que bT é período da função tangente, dado que $bx + c$ toma todos os valores do domínio da tangente. Ora, o período fundamental da função tangente é π.
Portanto, todo o período da tangente tem de ser da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $b > 0$, o menor valor positivo de T é obtido quando $k = 1$;

se $b < 0$, o menor valor positivo de T é obtido quando $k = -1$.

Em qualquer dos casos, o menor valor positivo possível para T é $\frac{\pi}{|b|}$.

Portanto, f é periódica, com período fundamental igual a $\frac{\pi}{|b|}$.

Exercícios resolvidos

1. Seja f a função definida por $f(x) = 2\,\text{sen}\,(\pi x) + 3$.

a) Determina o período positivo mínimo (ou fundamental) da função f .

b) Determina o contradomínio da função f .

c) Determina uma expressão geral dos maximizantes da função f .

d) Esboça o gráfico de f no intervalo $[-2{,}5;\ 5{,}5]$.

Resolução

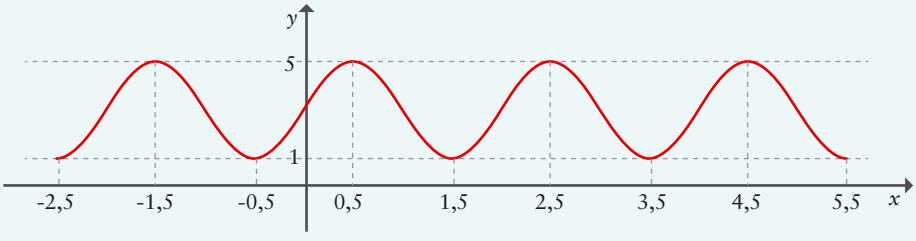
a) O período positivo mínimo da função f é igual a $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

b) O contradomínio da função f é $[3-2,\ 3+2]$, ou seja, é $[1,\ 5]$.

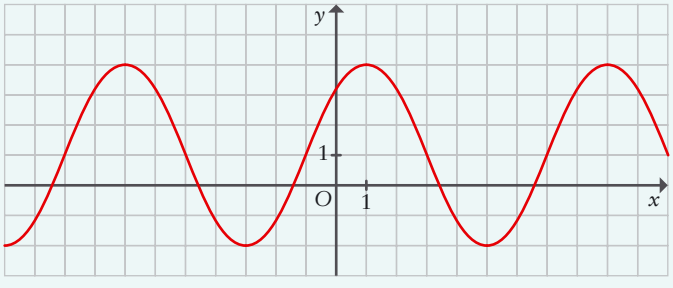
c) Tem-se $f(x) = 5 \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,(\pi x) + 3 = 5 \Leftrightarrow \text{sen}\,(\pi x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Dado que o gráfico da função f se pode obter do gráfico da função seno por meio da composta de uma contração horizontal, com uma dilatação vertical e uma translação vertical, apresentamos o seguinte gráfico da função f :



2. A função g , de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente abaixo, admite uma expressão analítica do tipo $a\,\text{sen}\,(bx + c) + d$.
Determina uma expressão deste tipo que seja compatível com o gráfico apresentado, nomeadamente no que respeita ao período fundamental, contradomínio e pontos cujas coordenadas se podem identificar no gráfico.



Resolução

O período fundamental da função g é igual à diferença entre dois maximizantes consecutivos.

Portanto, o período fundamental da função g é $9 - 1 = 8$.

Então, $\frac{2\pi}{|b|} = 8$, pelo que $|b| = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, de onde vem $b = \frac{\pi}{4}$ ou $b = -\frac{\pi}{4}$.

continua ▶

42 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Determina o período positivo mínimo da função f .

b) Determina o contradomínio da função f .

c) Determina uma expressão geral dos zeros da função f .

d) Determina uma expressão geral dos maximizantes da função f .

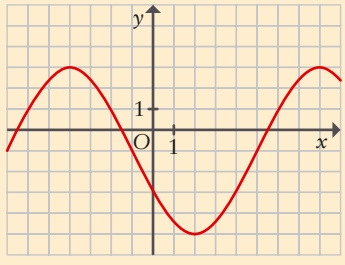
e) Determina uma expressão geral dos minimizantes da função f .

f) Esboça o gráfico da função f .

43 Determina uma expressão analítica do tipo:

$$a\cos(bx + c) + d$$

para a função f , de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico é:



PROFESSOR

Soluções

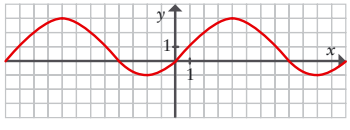
42. a) 12 **b)** $[-1,\ 3]$

c) $x = 12k \vee x = -4 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x = 4 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x = -2 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$

f)



43. $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$

RECORDA

* O contradomínio é $[d-|a|, d+|a|]$ e, portanto, não depende do valor de b.

Cálculos auxiliares

** $\begin{cases} d-|a|=-2 \\ d+|a|=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

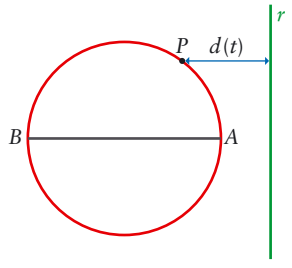
$\Leftrightarrow \begin{cases} d=-2+|a| \\ -2+|a|+|a|=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d=-2+|a| \\ 2|a|=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ |a|=3 \end{cases}$

NOTA

*** Para determinar c convém que escolhas um ponto que corresponda a um máximo ou a um mínimo da função porque outros pontos podem conduzir a valores de c que não são adequados aos gráficos apresentados.



44 Um barco está atracado num porto. A distância do casco do barco ao fundo do mar varia com a maré. Admite que essa distância, medida em metros, é dada, em função do tempo t, medido em horas e contado a partir das zero horas de um certo dia, por:

$$d(t)=7+2\cos\frac{\pi(t+4)}{6},\ t\geqslant 0$$

a) Qual é a distância do casco do barco ao fundo do mar no instante inicial?

b) Qual é a distância do casco do barco ao fundo do mar nos intantes de maré alta?

c) Nas primeiras 24 horas, em que instantes ocorreu a maré baixa?

PROFESSOR

Soluções

44. a) 6 m **b)** 9 m **c)** 2 h e 14 h

continuação

Consideremos, por exemplo, $b=\frac{\pi}{4}$ *.

O contradomínio de g é $[-2, 4]$, pelo que $d-|a|=-2 \wedge d+|a|=4$,

de onde vem** $d=1$ e $|a|=3$, pelo que $a=-3 \vee a=3$.

Consideremos, por exemplo, $a=3$.

Vem $g(x)=3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}+c\right)+1$.

Para determinar o valor de c, podemos utilizar o facto de o ponto de coordenadas $(1, 4)$ pertencer ao gráfico de g, pelo que $g(1)=4$***.

Tem-se:

$$g(1)=4 \Leftrightarrow 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+c\right)+1=4 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+c\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+c=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow c=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Consideremos, por exemplo, $c=\frac{\pi}{4}$.

Uma expressão de $g(x)$ compatível com os aspetos observados é $3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+1$, ou seja, $3\,\text{sen}\frac{\pi(x+1)}{4}+1$, como podes verificar obtendo uma representação gráfica da função definida por esta expressão.

Considerando $b=-\frac{\pi}{4}$ ou $a=-3$ ou $c=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, teriamos obtido outras expressões para $g(x)$ que, como podes verificar, são equivalentes a esta.

3. Na figura ao lado está representada uma circunferência de diâmetro $[AB]$ e uma reta r, perpendicular a $[AB]$. Considera que um ponto P, partindo de A, percorre toda a circunferência.
Sabe-se que, t segundos após o início do movimento, a distância do ponto P à reta r é dada por $d(t)=10-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.

a) Qual é a distância do ponto A à reta r?

b) Qual é o raio da circunferência?

c) Quanto tempo demora o ponto P a descrever uma volta completa?

Resolução

a) É referido no enunciado que o ponto P parte de A, pelo que, no instante 0, o ponto P coincide com o ponto A.

Tem-se $d(0)=10-8\cos 0=10-8=2$, pelo que a distância do ponto A à reta r é igual a 2.

b) O contradomínio da função d é $[10-|-8|, 10+|-8|]=[2, 18]$.

Portanto, tem-se:

- a distância mínima do ponto P à reta r é igual a 2 (ocorre quando o ponto P coincide com o ponto A);
- a distância máxima do ponto P à reta r é igual a 18 (ocorre quando o ponto P coincide com o ponto B).

Logo, $\overline{AB}=18-2=16$. Portanto, o raio da circunferência é igual a 8.

continua

continuação

c) O tempo que o ponto P demora a descrever uma volta completa corresponde ao período positivo mínimo da função d.
Tem-se que o período positivo mínimo da função d é $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$, ou seja, é igual a 6.
Portanto, o ponto P demora 6 segundos a descrever uma volta completa.

4. Esboça o gráfico da função definida por $f(x) = 1 - \text{tg}\dfrac{\pi x}{4}$ no intervalo $]-6, 6[$.

Resolução

Comecemos por obter o domínio desta função.

Tem-se: $\dfrac{\pi x}{4} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} \neq \dfrac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq 2 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$.

Uma vez que o período fundamental da função é igual a $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{4}}$, ou seja, é igual a 4, basta obter o gráfico, por exemplo, no intervalo $]-2, 2[$.

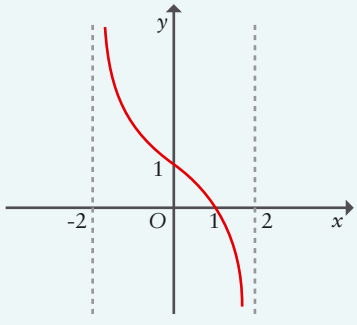
Neste intervalo, tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{tg}\dfrac{\pi x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Além disso, tem-se $f(0) = 1 - \text{tg}\,0 = 1 - 0 = 1$.

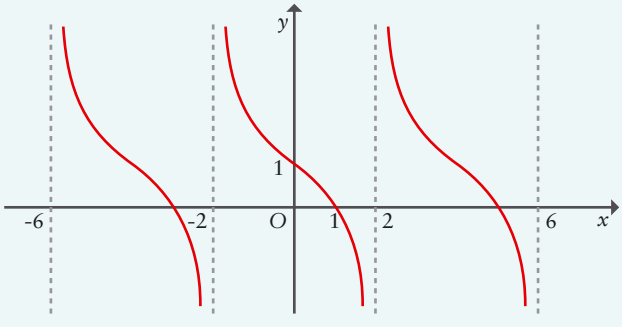
Tem-se, também:

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(1 - \text{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right) = 1 - \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^- = 1 - (+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \left(1 - \text{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right) = 1 - \text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+ = 1 - (-\infty) = +\infty$

Estes factos, bem como o facto de sabermos que o gráfico de f se pode obter do gráfico da tangente, permitem esboçar o gráfico de f, no intervalo $]-2, 2[$.



Portanto, um esboço do gráfico de f no intervalo $]-6, 6[$ é:



continua

45 Seja f a função definida por:

$$f(x) = 3 + \sqrt{3}\ \text{tg}\frac{\pi(x+1)}{6}$$

a) Determina o domínio de f.

b) Indica o contradomínio de f.

c) Determina o período positivo mínimo de f.

d) Determina $f(0)$.

e) Determina uma expressão geral dos zeros de f.

f) Determina $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

g) Determina $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$.

h) Esboça o gráfico de f.

PROFESSOR

Soluções

45. a) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\mathbb{R}$

c) 6

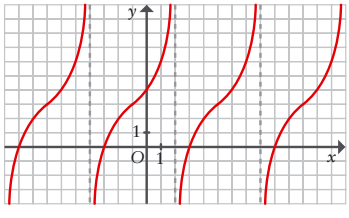
d) 4

e) $x = -3 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $+\infty$

g) $-\infty$

h)



46 Considera que um ponto P se desloca numa reta numérica de tal forma que a sua abcissa, t segundos após um certo instante inicial, é dada por:

$$x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

a) No instante inicial, qual é a abcissa do ponto P?

b) Qual é a maior e qual é a menor abcissa que o ponto P pode ter?

c) Três segundos após o instante inicial, o ponto P tem uma certa abcissa. Quanto tempo depois é que o ponto P volta a ter a mesma abcissa?

d) Durante o primeiro minuto, quantas vezes é que a abcissa do ponto P é igual a -1?

PROFESSOR

Soluções

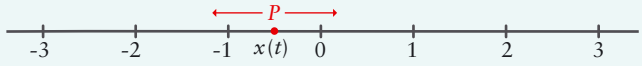
46. a) 2 **b)** Maior: 2; menor: -2
c) 2 segundos **d)** 30

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 53 a 59 (págs. 40 e 41).

continuação

5. Considera que um ponto P se desloca numa reta numérica, de tal forma que a sua abcissa, t segundos após um certo instante inicial, é dada por $x(t) = 3\cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.



a) No instante inicial, qual é a abcissa do ponto P?

b) Qual é a maior e qual é a menor abcissa que o ponto P pode ter?

c) Num certo instante, o ponto P tem abcissa -3. Quanto tempo depois é que o ponto P volta a ter abcissa -3?

Resolução

a) Tem-se $x(0) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Portanto, no instante inicial, a abcissa do ponto P é 1,5.

b) O contradomínio da função x é $[-3, 3]$.

Portanto, a menor abcissa que o ponto P pode ter é -3 e a maior abcissa que o ponto P pode ter é 3.

c) O tempo que decorre entre duas passagens consecutivas pelo ponto de abcissa -3 é o tempo de um percurso completo de ida e volta. Por isso, esse tempo corresponde ao período da função, que é igual a $\frac{2\pi}{8\pi}$, ou seja, é igual a $\frac{1}{4}$. Portanto, o ponto P demora $\frac{1}{4}$ de segundo a fazer um percurso completo de ida e volta.

Osciladores harmónicos

20 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: A mola
  Geogebra: O pêndulo

A situação que descrevemos no problema que acabámos de resolver enquadra-se no conceito de **oscilador harmónico**. De facto, tem-se:

Dá-se o nome de **oscilador harmónico** a um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica, num determinado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, é dada por uma expressão da forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\text{, onde } A > 0,\ \omega > 0 \text{ e } \phi \in [0, 2\pi[$$

À constante A dá-se o nome de **amplitude**.
À constante ω dá-se o nome de **pulsação**.
À constante ϕ dá-se o nome de **fase**.

Tem-se que a função x é periódica de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Ao inverso do período dá-se o nome de **frequência**.
A frequência é designada por f. Tem-se, portanto, $f = \frac{1}{T}$.

Exercícios resolvidos

1. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 8]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, é dada pela expressão:

$$x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$$

a) Indica a abcissa do ponto P nos instantes 0 e 1.

b) Indica a amplitude, o período e a frequência deste oscilador harmónico.

c) Determina os valores de t para os quais a abcissa do ponto P é igual a 2,5.

d) Determina em que instantes é que a distância do ponto P à origem é máxima.

Resolução

a) Tem-se:

- $x(0) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 0 + \pi\right) = 5\cos\pi = -5$
- $x(1) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 1 + \pi\right) = 5\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Portanto,

- no instante 0, a abcissa do ponto P é -5;
- no instante 1, a abcissa do ponto P é 0.

b) A amplitude é igual a 5, o período é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$, ou seja, é igual a 4, e a frequência é igual a $\frac{1}{4}$.

c) Tem-se, para $t \in [0, 8]$:

$$x(t) = 2{,}5 \Leftrightarrow 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = 2{,}5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2}t + \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t + 1 = \frac{1}{3} + 2k \vee \frac{1}{2}t + 1 = -\frac{1}{3} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t + 2 = \frac{2}{3} + 4k \vee t + 2 = -\frac{2}{3} + 4k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{4}{3} + 4k \vee t = -\frac{8}{3} + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, tem-se $t = \frac{8}{3} \vee t = \frac{4}{3}$.

Para $k = 2$, tem-se $t = \frac{20}{3} \vee t = \frac{16}{3}$.

Para outros valores de k, os correspondentes valores de t não pertencem ao intervalo $[0, 8]$.

Portanto, os valores de t para os quais a abcissa do ponto P é igual a 2,5 são $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{3}$ e $\frac{20}{3}$.

continua ▶

continuação

d) Dado que t toma todos os valores do intervalo $[0, 8]$, $\frac{\pi}{2}t$ toma os valores do intervalo $\left[\frac{\pi}{2}\times 0, \frac{\pi}{2}\times 8\right] = [0, 4\pi]$.

Então, $\frac{\pi}{2}t+\pi$ toma todos os valores do intervalo $[\pi, 5\pi]$. Portanto, o contradomínio da função definida por $\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi\right)$ é o intervalo $[-1, 1]$ e o contradomínio da função x é $[-5, 5]$. Assim, o ponto P está à distância máxima da origem quando a sua abcissa for igual a -5 ou quando a sua abcissa for igual a 5.

Tem-se, para $t \in [0, 8]$:

$$x(t) = \pm 5 \Leftrightarrow 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi\right) = \pm 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t+\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t+1 = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = k-1, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = k', k' \in \mathbb{Z}$$

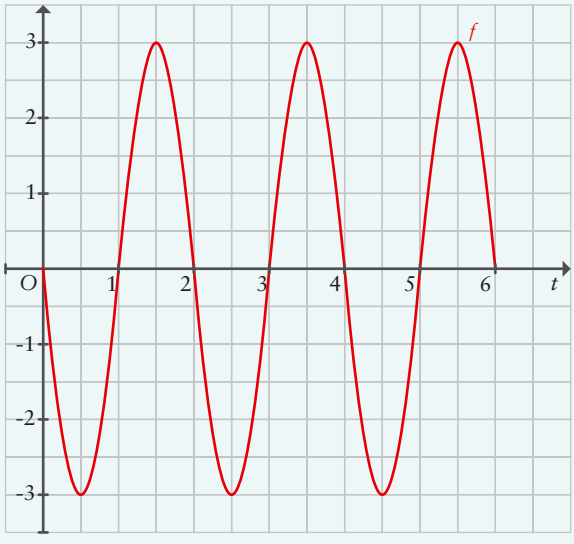
$$\Leftrightarrow t = 2k', k' \in \mathbb{Z}$$

Para $k' = 0$, obtém-se $t = 0$. Para $k' = 1$, obtém-se $t = 2$.
Para $k' = 2$, obtém-se $t = 4$. Para $k' = 3$, obtém-se $t = 6$.
Para $k' = 4$, obtém-se $t = 8$.

Para outros valores de k', os correspondentes valores de t não pertencem ao intervalo $[0, 8]$.

Portanto, os valores de t para os quais o ponto P está à distância máxima da origem são 0, 2, 4, 6 e 8.

2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 6]$ (considera que o tempo é medido em segundos). Uma expressão analítica da função f que dá a abcissa do ponto P, como função de $t \in I$, é do tipo $A\cos(\omega t+\phi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.
O gráfico de f é:



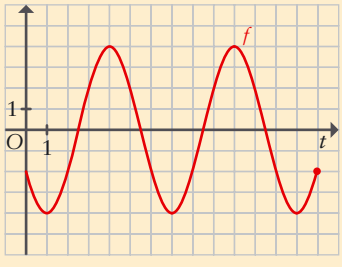
a) Determina uma expressão analítica da função f.

b) Indica a amplitude, a pulsação, o período e a fase deste oscilador harmónico.

continua

47 Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 14]$ (medido em segundos). Uma expressão analítica da função f que dá a abcissa do ponto P, como função de $t \in I$, é do tipo $A\cos(\omega t+\phi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

O gráfico de f é:



a) Determina uma expressão analítica da função f.

b) Indica a amplitude, a pulsação, o período e a fase deste oscilador harmónico.

PROFESSOR

Soluções

47. a) $f(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{2\pi}{3}\right)$

b) Amplitude: 4; pulsação: $\frac{\pi}{3}$; período: 6; fase: $\frac{2\pi}{3}$

continuação

Resolução

a) O contradomínio da função f é $[-3, 3]$. Por isso, $A = 3$.

O período positivo mínimo da função f pode ser obtido através da diferença entre dois maximizantes consecutivos. Assim, o período positivo mínimo da função f é $3{,}5 - 1{,}5 = 2$.

Portanto, $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Determinemos agora o valor de ϕ.

Como o ponto de coordenadas $(1{,}5;\ 3)$ pertence ao gráfico de f, tem-se $f(1{,}5) = 3$*.

Portanto, $3\cos(\pi \times 1{,}5 + \phi) = 3$, pelo que $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \phi\right) = 1$.

Como $\phi \in [0, 2\pi[$, vem $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, tem-se $f(x) = 3\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Amplitude: 3

Pulsação: π

Período: 2

Fase: $\frac{\pi}{2}$

NOTA

* Tal como referimos na página 26, convém que escolhas um ponto do gráfico que corresponda a um máximo ou a um mínimo da função.

3. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (considera que o tempo é medido em segundos). A abcissa do ponto P, no instante t, é dada por:

$$x(t) = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

a) Determina a abcissa do ponto P no instante 0.

b) Determina os instantes em que a abcissa do ponto P é igual a -4.

c) Prova que se trata de um oscilador harmónico.

d) Indica a amplitude, o período, a frequência e a fase deste oscilador harmónico.

Resolução

a) Tem-se: $x(0) = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 4\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

Portanto, no instante 0, a abcissa do ponto P é igual a 2.

b) Tem-se: $x(t) = -4 \Leftrightarrow 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} = \frac{3}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \frac{8}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \frac{4}{3} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

Assim, no intervalo $[0, 10]$, os valores de t para os quais a abcissa do ponto P é igual a -4 são $\frac{8}{3}$ e $\frac{20}{3}$.

48 Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 60]$ (medido em segundos), de tal forma que a sua abcissa, no instante t, é dada por:

$$x(t) = \text{sen}(\pi t)$$

a) Prova que se trata de um oscilador harmónico.

b) Indica a amplitude, a pulsação, o período, a frequência e a fase deste oscilador harmónico.

PROFESSOR

Soluções

48. b) Amplitude: 1; pulsação: π; período: 2; frequência: $\frac{1}{2}$; fase: $\frac{3\pi}{2}$

continua

continuação

c) Tem-se: $x(t) = 4\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$.

Portanto, $x(t)$ é da forma $A\cos(\omega t + \phi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, pelo que o movimento do ponto P na reta numérica é efetivamente um oscilador harmónico.

d) Amplitude: 4 Período: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ Frequência: $\frac{1}{4}$ Fase: $\frac{5\pi}{3}$

4. Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 3]$ (considera que o tempo é medido em segundos). A abcissa do ponto P, no instante t, é dada por:

$$x(t) = \text{sen}(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t)$$

a) Prova que se trata de um oscilador harmónico.

b) Indica a amplitude, o período, a frequência e a fase deste oscilador harmónico.

c) Determina os instantes em que a velocidade de P é nula.

d) Determina o valor real de k tal que $\forall t \in I, x''(t) = -kx(t)$.

Resolução

a) Tem-se:

$$\text{sen}(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t) = \text{sen}(\pi t) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi t) =$$

$$= \text{sen}(\pi t) - \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\cos(\pi t) = \text{sen}(\pi t) - \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi t)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(\pi t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\pi t)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

Portanto, $x(t)$ é da forma $A\cos(\omega t + \phi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, pelo que o movimento do ponto P na reta numérica é efetivamente um oscilador harmónico.

b) Amplitude: 2 Período: 2 Frequência: $\frac{1}{2}$ Fase: $\frac{7\pi}{6}$

c) Tem-se:

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\pi\,\text{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{7\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t + \frac{7}{6} = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{6} + k, k \in \mathbb{Z}$$

continua

49 Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 20]$ (medido em segundos), de tal forma que a sua abcissa, no instante t, é dada por:

$$x(t) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

a) Prova que se trata de um oscilador harmónico.

b) Indica a amplitude, o período, a frequência e a fase deste oscilador harmónico.

c) Determina os instantes em que a aceleração de P é nula.

PROFESSOR

Soluções

49. b) Amplitude: $\sqrt{12}$; período: 8; frequência: $\frac{1}{8}$; fase: $\frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{10}{3}, \frac{22}{3}, \frac{34}{3}, \frac{46}{3}, \frac{58}{3}$

continuação

Para $k = 2$, tem-se $t = \frac{5}{6}$.

Para $k = 3$, tem-se $t = \frac{11}{6}$.

Para $k = 4$, tem-se $t = \frac{17}{6}$.

Para outros valores de k, os correspondentes valores de t não pertencem ao intervalo $[0, 3]$.

Portanto, os valores de t para os quais a velocidade do ponto P é nula são $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{6}$ e $\frac{17}{6}$.

d) Tem-se: $\forall t \in I,\ x''(t) = -kx(t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \left[-2\pi \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)\right]' = -k \times 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I,\ -2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) = -2k\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

Portanto, $k = \pi^2$.

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 60 e 61 (pág. 42).

Equações diferenciais envolvendo funções trigonométricas. Lei de Hooke e a segunda lei de Newton

Comecemos por recordar o conceito de equação diferencial.

Consideremos, por exemplo, a equação $f'' = -4f$.

Pelo facto de, na equação $f'' = -4f$, a incógnita representar uma função e a equação envolver uma derivada dessa função, dizemos que esta equação é uma equação diferencial (note-se que, neste caso, a derivada é de segunda ordem).

Dizemos que a função definida por $f(x) = \cos(2x)$ é uma solução desta equação, pois é verdade que $[\cos(2x)]'' = -4\cos(2x)$.

De facto, tem-se $[\cos(2x)]' = -2\operatorname{sen}(2x)$, pelo que

$$[\cos(2x)]'' = [-2\operatorname{sen}(2x)]' = -4\cos(2x)$$

Vejamos mais dois exemplos:

EXEMPLOS

1. A função f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é solução da equação diferencial

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \cos x$$

De facto, tem-se: $f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x$

Portanto, $f''(x) + f'(x) + f(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x = \cos x$.

continua

50 Mostra que a função f definida por $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ é solução da equação diferencial

$$f'(x) + f(x) = 2\cos x$$

continuação

2. A função f definida por $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ é solução da equação diferencial

$$f''(x) + 4f(x) = 2$$

De facto, tem-se $f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$, de onde vem

$$f''(x) = 2\cos(2x) = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x,$$

pelo que se tem:

$$f''(x) + 4f(x) = 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x =$$
$$= 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 2 \times 1 = 2$$

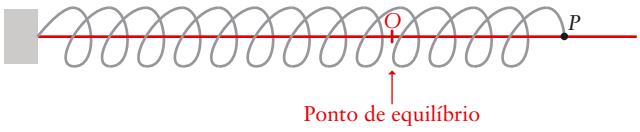
PROFESSOR

Gestão curricular

O descritor 3.3 pode ser considerado facultativo, aconselhando-se a sua lecionação numa perspetiva interdisciplinar com a disciplina de Física para os alunos do Curso de Ciências e Tecnologias.

Como já vimos, existem muitas situações da realidade que podem ser traduzidas por meio de equações diferenciais. Vamos ver mais um exemplo especialmente importante.

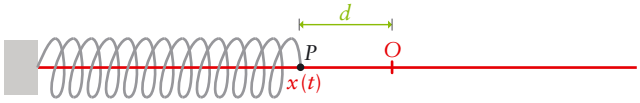
Consideremos um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa. Como resultado da força exercida pela mola, o ponto P desloca-se sobre uma reta numérica. Nesta reta, vamos tomar para origem o ponto de equilíbrio (o ponto de equilíbrio corresponde à posição do ponto P quando a mola não está comprimida nem estendida).



NOTA

Só vamos considerar o caso em que a mola alonga no sentido positivo da reta numérica.

Suponhamos agora que, num certo instante t, o ponto P está à esquerda do ponto de equilíbrio, tal como ilustrado na figura seguinte.



Na figura designou-se por $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t e designa-se por d a distância do ponto P ao ponto de equilíbrio.

Neste caso, em que o ponto P está à esquerda do ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ do ponto P é negativa, tendo-se, portanto, $d = -x(t)$.

Como o ponto P está à esquerda do ponto de equilíbrio, a força F exercida pela mola sobre P tem sentido positivo. De acordo com a **lei de Hooke**, esta força é proporcional à distância d a que P se encontra do ponto de equilíbrio. Tem-se, portanto, $F = kd$, onde k é a constante de proporcionalidade*.

NOTA

* Esta constante depende das unidades consideradas.

Vem, então: $F = kd = k(-x(t)) = -kx(t)$

Por outro lado, de acordo com a **segunda lei de Newton**, esta força é igual ao produto da massa m pela aceleração do ponto P.

Como sabemos, se $x(t)$ é a abcissa do ponto P no instante t, então a aceleração do ponto P nesse instante é dada por $x''(t)$.

Portanto, o produto da massa m pela aceleração do ponto P é dado por $mx''(t)$.

Assim, a abcissa $x(t)$ do ponto P no instante t satisfaz a equação diferencial:

$$mx''(t) = -kx(t)^*$$

Esta equação é equivalente a $x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)$.

Designando $\frac{k}{m}$ por α, vem:

$$x''(t) = -\alpha x(t)$$

Vamos agora ver que qualquer função definida por uma expressão da forma

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$$

onde A e b são constantes reais, satisfaz a equação diferencial $x''(t) = -\alpha x(t)$.

De facto, tem-se:

$$x'(t) = \left[A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)\right]' = -\sqrt{\alpha}A\,\text{sen}\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$$

de onde vem

$$x''(t) = \left[-\sqrt{\alpha}A\,\text{sen}\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)\right]' = -\alpha A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right),$$

pelo que, efetivamente, se tem $x''(t) = -\alpha x(t)$.

É possível provar que qualquer solução da equação diferencial $x''(t) = -\alpha x(t)$ é da forma $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$, com $A > 0$ e $b \in [0, 2\pi[$, escolhidos convenientemente.

Concluímos, assim, que um sistema formado por uma mola e por um ponto material na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

NOTA

* Justificou-se a igualdade

$$mx''(t) = -kx(t)$$

para a situação em que o ponto P tem abcissa negativa.

51 Justifica a igualdade

$$mx''(t) = -kx(t)$$

para a situação em que o ponto P tem abcissa positiva.

Exercício resolvido

Um ponto material P de massa 10 g, colocado na extremidade de uma mola, desloca-se numa reta numérica, orientada da esquerda para a direita e onde uma unidade corresponde a 1 cm. Admite que a origem desta reta numérica coincide com o ponto de equilíbrio.

A força exercida pela mola é proporcional à distância a que o ponto P se encontra do ponto de equilíbrio, sendo, neste caso, a constante de proporcionalidade igual a 40 (na unidade física correspondente às unidades de massa, comprimento e tempo considerado). Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo (o tempo é medido em segundos).

Seja $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t.

a) Traduz esta situação por uma equação diferencial, da forma:

$$x''(t) = -\alpha x(t)$$

b) No instante 0, a mola está a estender-se, o ponto P encontra-se 3 centímetros à direita do ponto de equilíbrio e a sua velocidade, nesse instante, é 2 cm/s. Determina $x(t)$.

c) Indica a amplitude, o período, a frequência e a fase deste oscilador harmónico. Apresenta o valor da fase arredondado às centésimas.

continua ▶

52 Um ponto material P de massa 5 kg, colocado na extremidade de uma mola, desloca-se numa reta numérica, orientada da esquerda para a direita e onde uma unidade corresponde a 1 m. Admite que a origem desta reta numérica coincide com o ponto de equilíbrio. Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo (o tempo é medido em segundos). Seja $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t.

Sabe-se que $x''(t) = -9x(t)$.

a) De acordo com a lei de Hooke, a força exercida pela mola sobre P é proporcional à distância a que o ponto P se encontra do ponto de equilíbrio. Qual é, neste caso, o valor da constante de proporcionalidade (relativamente às unidades de medida consideradas)?

b) No instante 0, a mola está a estender-se, o ponto P encontra-se 2 metros à esquerda do ponto de equilíbrio e a sua velocidade, nesse instante, é 3 m/s. Determina $x(t)$, apresentando o valor da fase arredondado às décimas.

PROFESSOR

Soluções

52. a) 45

b) $\sqrt{5}\cos(3t+3{,}6)$

Caça aos erros!

Caderno de exercícios
Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

Mais sugestões de trabalho

Exercício proposto n.º 62 (pág. 42).
+Exercícios propostos (págs. 43 a 63).

continuação

Resolução

a) Tem-se $\alpha = \frac{40}{10} = 4$, de onde vem $x''(t) = -4x(t)$.

b) Tem-se $x(t) = A\cos\left(\sqrt{4}t + b\right) = A\cos(2t+b)$, com $A > 0$ e $b \in [0, 2\pi[$.

No instante 0:

- o ponto P encontra-se 3 centímetros à direita do ponto de equilíbrio, pelo que $x(0) = 3$;
- a mola está a estender-se e a velocidade do ponto P é 2 cm/s, pelo que $x'(0) = 2$.

Ora,

- $x(0) = 3 \Leftrightarrow A\cos b = 3$
- dado que $x'(t) = -2A\,\text{sen}\,(2t+b)$, tem-se:

$$x'(0) = 2 \Leftrightarrow -2A\,\text{sen}\,b = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\,\text{sen}\,b = -1$$

Vem, então:

$$\begin{cases} A\cos b = 3 \\ A\,\text{sen}\,b = -1 \end{cases} \Rightarrow A^2\cos^2 b + A^2\text{sen}^2 b = 9 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^2\left[\cos^2 b + \text{sen}^2 b\right] = 10 \Rightarrow A^2 \times 1 = 10 \Rightarrow A = \sqrt{10} \quad (\text{pois } A > 0)$$

Determinemos agora o valor de b.

Como $\cos b > 0$ e $\text{sen}\,b < 0$, vem $b \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

De $\sqrt{10}\cos b = 3$, vem $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Como $b \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$, vem $b \approx 5{,}96$.

Portanto:

$$x(t) = \sqrt{10}\cos(2t + 5{,}96)$$

c) Tem-se:

Amplitude: $A = \sqrt{10}$

Período: $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Frequência: $\frac{1}{\pi}$

Fase: 5,96

Síntese

pp. 6 e 7	Fórmulas trigonométricas	Tem-se, para quaisquer números reais x e y: • $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$ • $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$ • $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ • $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ • $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ • $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
p. 12	Limites de funções trigonométricas	Tem-se o seguinte limite notável: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
pp. 14 e 15	Derivadas de funções trigonométricas	Tem-se que as funções seno e cosseno são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e que a função tangente é diferenciável em todo o seu domínio. Têm-se também as seguintes regras de derivação (u designa uma função): • $\operatorname{sen}' x = \cos x$ • $\cos' x = -\operatorname{sen} x$ • $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ • $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$ • $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ • $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
pp. 23 e 24	Modelos periódicos	Propriedades: **1.** Qualquer função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{a \operatorname{sen}(bx+c)+d}$, ou do tipo $\boldsymbol{a \cos(bx+c)+d}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem contradomínio $[d-\lvert a\rvert,\ d+\lvert a\rvert]$ e é periódica, com período fundamental igual a $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$. **2.** Qualquer função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} :\ bx + c = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, definida por uma expressão do tipo $\boldsymbol{a \operatorname{tg}(bx+c)+d}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem contradomínio $\mathbb{R}$ e é periódica, com período fundamental igual a $\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$.
p. 28	Oscilador harmónico	Dá-se o nome de **oscilador harmónico** a um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica, num determinado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, é dada por uma expressão da forma: $\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$. À constante A dá-se o nome de **amplitude**. À constante ω dá-se o nome de **pulsação**. À constante ϕ dá-se o nome de **fase**. Tem-se que a função x é periódica de **período** $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ao inverso do período dá-se o nome de **frequência**. A frequência é designada por f. Tem-se, portanto, $f = \frac{1}{T}$.
p. 34	Sistema formado por uma mola e por um ponto material colocado na respetiva extremidade	Seja P um ponto material de massa m colocado na extremidade de uma mola (cuja outra extremidade se encontra fixa). Vamos considerar que, em resultado da força exercida pela mola, o ponto P se desloca sobre uma reta numérica, na qual vamos tomar para origem o ponto de equilíbrio (ponto que corresponde à posição do ponto P quando a mola não está comprimida nem estendida). De acordo com a lei de Hooke, a força exercida pela mola sobre P é proporcional à distância a que P se encontra do ponto de equilíbrio. Designando por k a constante de proporcionalidade, a abcissa $x(t)$ do ponto P satisfaz a equação diferencial $\boldsymbol{mx''(t) = -kx(t)}$. Esta equação é equivalente a $\boldsymbol{x''(t) = -\alpha x(t)}$ onde $\alpha = \frac{k}{m}$. Qualquer solução da equação diferencial $x''(t) = -\alpha x(t)$ é da forma $\boldsymbol{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)}$.

Teste 1

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Indica o valor de $\operatorname{sen}(2x)$, sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e que $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(C) $-\frac{2}{3}$ **(D)** $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

2. Para um certo número real k, é contínua a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k - \cos x & \text{se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x + \operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 3 **(B)** 4

(C) 5 **(D)** 6

3. Seja f a função definida por $f(x) = 3\operatorname{sen}^2(4x)$. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{48}$?

(A) 6 **(B)** 8

(C) 10 **(D)** 12

4. Considera que um ponto P percorre uma circunferência, de tal modo que a distância do ponto P a uma reta r, t segundos após um certo instante inicial, é dada por:

$$d(t) = 3 + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi t + 2\pi}{6}$$

Considera as seguintes proposições:

I. A reta r é tangente à circunferência.

II. O comprimento da circunferência é 4π.

III. O ponto P demora 4 segundos a percorrer a circunferência.

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) I e II são falsas. **(B)** I e III são verdadeiras.

(C) II é verdadeira e III é falsa. **(D)** II e III são verdadeiras.

5. Um ponto desloca-se sobre uma reta numérica de tal modo que a sua abcissa, t segundos após um certo instante inicial, é dada por $x(t) = 5\cos(6\pi t + 2)$.

Qual é a frequência deste oscilador harmónico?

(A) 2 **(B)** 3

(C) 5 **(D)** 6

PROFESSOR

Soluções

1. (D)

2. (C)

3. (A)

4. (D)

5. (B)

Ajuda

Grupo II

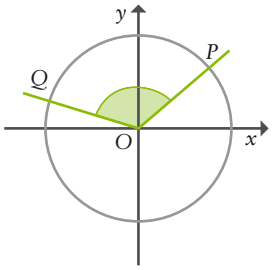
Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica. Os pontos P e Q pertencem à circunferência.

O ponto P tem ordenada $\frac{2}{3}$.

O ângulo POQ tem $\frac{2\pi}{3}$ radianos de amplitude.

Determina o valor exato da abcissa do ponto Q.



2. Seja f a função, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = 1 + 3\cos^2 x$.

a) Seja α pertencente a $]0, \pi[$ tal que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$. Determina $f(\alpha)$.

b) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e determina as coordenadas dos pontos de inflexão.

d) A reta de equação $y = \frac{13}{4}$ interseta o gráfico da função f em dois pontos.

Sejam P e Q esses dois pontos, sendo P o de menor abcissa.

Determina a área do triângulo $[OPQ]$.

3. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi[$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^x & \text{se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2 - \cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Estuda a função g quanto às assíntotas ao seu gráfico.

b) Estuda a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]0, \pi[$.

4. Determina $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \operatorname{sen}^2 x}{x + \ln(x)}$.

5. A Marta tem doze livros. Dois são de aventuras, quatro são de ficção científica e seis são policiais.

a) A Marta vai de férias e quer levar metade dos livros. De quantas maneiras pode fazer a seleção, de modo a levar, pelo menos, três livros de ficção científica?

b) Por fim, decidiu levar dois livros de cada género e vai arrumá-los numa prateleira. Supondo que o faz ao acaso, qual é a probabilidade de os livros ficarem arrumados por género?

PROFESSOR

Soluções

1. $-\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$

2. a) $f(\alpha) = \frac{17}{5}$

b) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Os pontos de abcissas $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão do gráfico da função f.

d) $\frac{13\pi}{12}$ (u.a.)

3. a) A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g, quando $x \longrightarrow -\infty$.

As retas de equações $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais ao gráfico da função g.

b) A função é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right[$.

A função atinge um mínimo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$.

4. 2

5. a) 252

b) $\frac{1}{15}$

Resolução

Exercícios propostos

53 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 1 - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi(x+2{,}5)}{3}$$

a) Determina uma expressão geral dos zeros da função f.

b) Determina o período fundamental da função f.

c) Determina o contradomínio da função f.

d) Determina uma expressão geral dos maximizantes da função f.

e) Determina uma expressão geral dos minimizantes da função f.

f) Esboça o gráfico de f.

20 AULA DIGITAL
- **Resolução**
  Exercício 53 (resolução passo a passo)

54 Esboça o gráfico de cada uma das seguintes funções definidas por:

a) $a(x) = 1 + \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$

b) $b(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

c) $c(x) = 2\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

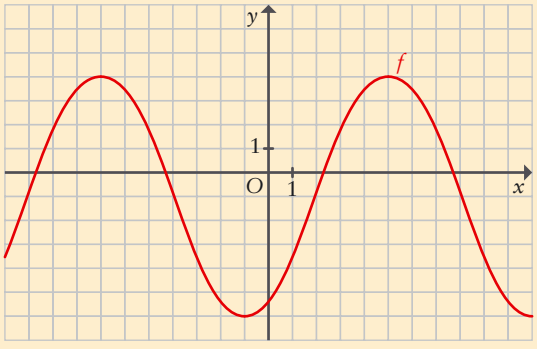
55 Em cada uma das alíneas seguintes está indicado o contradomínio, o período fundamental e um maximizante de uma função definida por uma expressão analítica do tipo $a\,\text{sen}(bx + c) + d$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c \in [0, 2\pi[$. Para cada uma delas, determina o valor de a, b, c e d.

a) Contradomínio: $[-2, 6]$
Período fundamental: 5
Maximizante: 5

b) Contradomínio: $[-3, 7]$
Período fundamental: 20
Maximizante: 5

c) Contradomínio: $[1, 5]$
Período fundamental: 100
Maximizante: 23

56 Seja f a função periódica, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente abaixo.



a) Indica o período fundamental da função f.

b) Indica o contradomínio da função f.

c) Determina uma expressão analítica para a função f, do tipo $a\cos(bx + c) + d$, com $a > 0$, $b > 0$ e $c \in [0, 2\pi[$, que seja compatível com o gráfico apresentado.

PROFESSOR

Soluções

53. a) $x = 6k \vee$
$\vee\, x = -2 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

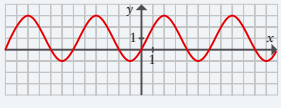
b) 6

c) $[-1, 3]$

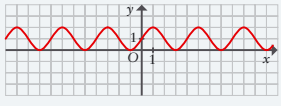
d) $x = 2 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x = -1 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}$

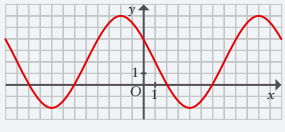
f)



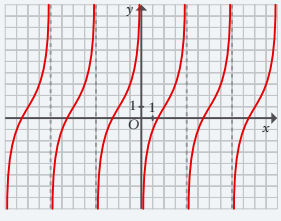
54. a)



b)



c)



55. a) $4\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}x + \frac{\pi}{10}\right) + 2$

b) $5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 2$

c) $2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{50}x + \frac{\pi}{25}\right) + 3$

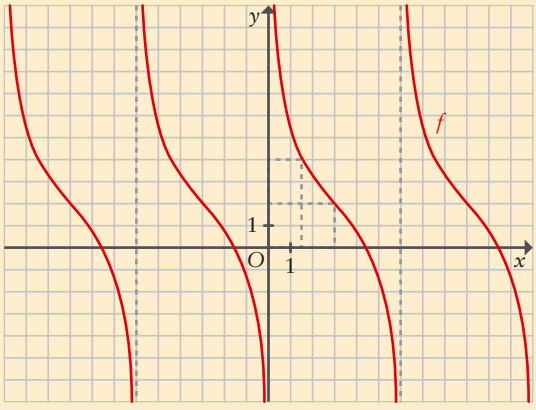
56. a) 12

b) $[-6, 4]$

c) $5\cos\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{7\pi}{6}\right) - 1$

57 Seja f a função periódica, de domínio

$\mathbb{R}\backslash\{x : x = 6k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, representada graficamente abaixo.



Tal como a figura sugere, tem-se:

$$f(3) = 2 \text{ e } f(1{,}5) = 4$$

Determina uma expressão analítica para a função f, do tipo $a\,\text{tg}\,(bx + c) + d$, com $b > 0$ e $c \in [0, \pi[$, que seja compatível com o gráfico apresentado.

58 Em Lisboa, o tempo que decorre do nascer ao pôr-do-sol, no dia de ordem n de cada ano, é dado, em horas, aproximadamente por:

$$f(n) = 12{,}2 + 2{,}64\ \text{sen}\,(0{,}017n + 4{,}893)$$

Por exemplo, no dia 5 de fevereiro, trigésimo sexto dia do ano, o tempo que decorre do nascer ao pôr-do-sol é $f(36) \approx 10{,}35$ (horas).

a) No dia 13 de fevereiro, o Sol nasce às sete e meia da manhã. A que horas ocorre o pôr-do-sol? Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre do nascer ao pôr-do-sol é superior a 14,5 horas. Em quantos dias é que tal acontece?

59 A profundidade da água do mar, à entrada de um porto de abrigo, varia com a maré.

Num certo dia, ocorreu uma maré baixa às 5 horas da manhã, sendo a profundidade da água do mar, a essa hora, de 4,3 metros.

Seis horas depois, ocorreu uma maré alta, sendo então a profundidade da água do mar de 7,9 metros.

Admite que a profundidade da água do mar, à entrada desse porto de abrigo é bem modelada por uma função definida por uma expressão do tipo:

$$a\cos(bt + c) + d\text{, com } a > 0,\ b > 0 \text{ e } c \in [0, 2\pi[$$

A variável t designa o tempo, medido em horas, decorrido desde as 0 horas desse dia.

a) Determina os valores de a, b, c e d adequados ao modelo.

b) Eram sete horas da manhã desse dia quando um barco, vindo da faina da pesca, chegou às proximidades do porto. Para navegar com segurança, esse barco precisa que a profundidade da água seja, no mínimo, de 6 metros. Quanto tempo precisou de esperar para entrar no porto em segurança? Apresenta o resultado em minutos, arredondado às unidades.

PROFESSOR

Soluções

57. $-2\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

58. a) 18 h 7 min

b) 61

59. a) $a = 1{,}8$; $b = \frac{\pi}{6}$; $c = \frac{\pi}{6}$; $d = 6{,}1$

b) 54 minutos

60 Considera que um ponto P se desloca numa reta numérica, de tal forma que a sua abcissa, t segundos após um certo instante inicial, é dada por:

$$x(t) = 8\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{2\pi}{3}\right), \text{ com } t \in [0, 60]$$

a) No instante inicial, qual é a abcissa do ponto P?

b) Qual é a maior e qual é a menor abcissa que o ponto P pode ter?

c) Indica a amplitude, a pulsação, a fase, o período e a frequência deste oscilador harmónico.

61

a) Prova que:

$$M\,\text{sen}(Bt) + N\cos(Bt) = \sqrt{M^2 + N^2}\cos(Bt + C)$$

onde C é tal que:

$$\cos C = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}} \text{ e } \text{sen } C = -\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

Sugestão:

Tem em consideração que $M\,\text{sen}(Bt) + N\cos(Bt) =$

$$= \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M^2 + N^2}}\left[M\,\text{sen}(Bt) + N\cos(Bt)\right]$$

b) Escreve cada uma das expressões seguintes na forma $A\cos(\omega t + \phi)$, onde $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$, recorrendo à igualdade da alínea anterior.

b$_1$) $3\,\text{sen}(2t) + 3\cos(2t)$

b$_2$) $\text{sen}(\pi t) - \cos(\pi t)$

b$_3$) $-2\,\text{sen}(3\pi t) - \sqrt{12}\cos(3\pi t)$

b$_4$) $-\sqrt{48}\,\text{sen}\,t + 4\cos t$

b$_5$) $3\,\text{sen}(8t) + 4\cos(8t)$ (apresenta o valor de ϕ arredondado às centésimas)

62 Um ponto material P de massa 4 g, colocado na extremidade de uma mola, desloca-se numa reta numérica, orientada da esquerda para a direita e onde uma unidade corresponde a 1 cm. Admite que a origem desta reta numérica coincide com o ponto de equilíbrio. A força exercida pela mola é proporcional à distância a que o ponto P se encontra do ponto de equilíbrio, sendo, neste caso, a constante de proporcionalidade igual a 36 (na unidade física correspondente às unidades de massa, comprimento e tempo consideradas).

Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo (o tempo é medido em segundos).

Seja $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t.

a) Traduz esta situação por uma equação diferencial, da forma $x''(t) = -\alpha x(t)$.

b) No instante 0, a mola está a contrair-se, o ponto P encontra-se 4 centímetros à esquerda do ponto de equilíbrio e o módulo da sua velocidade, nesse instante, é 9 cm/s.

Determina $x(t)$.

Apresenta o valor da fase arredondado às décimas.

PROFESSOR

Soluções

60. a) -4

b) Maior abcissa: 8

Menor abcissa: -8

c) Amplitude: 8

Pulsação: $\frac{\pi}{6}$

Fase: $\frac{2\pi}{3}$

Período: 12

Frequência: $\frac{1}{12}$

61. b$_1$) $\sqrt{18}\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{18}\cos\left(2t + \frac{7\pi}{4}\right)$

b$_2$) $\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)$

b$_3$) $4\,\text{sen}\left(3\pi t + \frac{4\pi}{3}\right) =$

$= 4\cos\left(3\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$

b$_4$) $8\,\text{sen}\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 8\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

b$_5$) $5\,\text{sen}(8t + 0{,}93) =$

$= 5\cos(8t + 5{,}64)$

62. a) $x''(t) = -9x(t)$

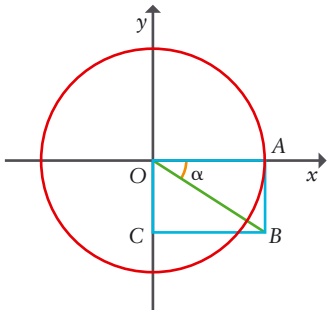
b) $x(t) = 5\cos(3t + 2{,}5)$

+ Exercícios propostos

Itens de escolha múltipla

Fórmulas trigonométricas

63 Na figura estão representados a circunferência trigonométrica e o retângulo $[OABC]$. O ponto A tem coordenadas $(1, 0)$. Seja α a amplitude do ângulo orientado de sentido negativo, cujo lado origem é a semirreta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$ $\left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right)$.



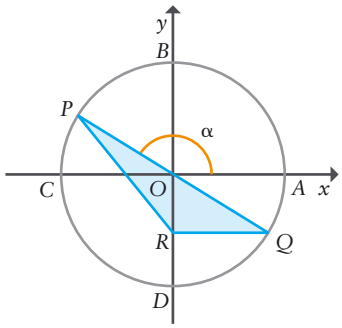
Qual das expressões seguintes dá o perímetro do retângulo $[OABC]$ em função de α?

(A) $2(1 - \operatorname{tg}\alpha)$ **(B)** $2(1 + \operatorname{tg}\alpha)$

(C) $2(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$ **(D)** $2(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$

64 Na figura está representada a circunferência trigonométrica. Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco BC;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[RQ]$ é paralelo a $[AC]$.



Seja α a amplitude do ângulo orientado de sentido positivo, cujo lado origem é a semirreta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[PQR]$ em função de α?

(A) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)$ **(B)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

(C) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha + \pi)$ **(D)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$

65 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{10}\right)\cos\left(\frac{x}{10}\right)$.

Qual das expressões seguintes também define a função f?

(A) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$ **(B)** $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$ **(C)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right)$ **(D)** $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right)$

66 Seja f a função definida por $f(x) = 1 - (\cos(50x) - \operatorname{sen}(50x))^2$. Qual das expressões seguintes também define a função f?

(A) $\operatorname{sen}(100x)$ **(B)** $\operatorname{sen}(25x)$ **(C)** $1 - \cos(100x)$ **(D)** $1 - \cos(25x)$

NOTA

Sempre que não é dito algo em contrário, são considerados ângulos generalizados e as suas amplitudes são medidas em radianos. Usaremos frequentemente a mesma designação para nos referirmos a um ângulo e à sua amplitude, quando desta simplificação não resultar ambiguidade.

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «+ Exercícios propostos»
- **Simulador**
  Geogebra: Exercício 3
  Geogebra: Exercício 4

PROFESSOR

Soluções

63. (A)

64. (C)

65. (C)

66. (A)

Limites e derivadas de funções trigonométricas

67 Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - e^{-n}\right)$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

68 Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}{\operatorname{sen} x}$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

69 Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(e^x)}{e^{2x} + 5e^x}$?

(A) 0 **(B)** $0{,}1$ **(C)** $0{,}2$ **(D)** $0{,}5$

70 Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} = +\infty$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$.

71 Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{-x}} = 0$ **(B)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{-x}} = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{-x}} = +\infty$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{-x}}$.

72 Sejam a e b números reais tais que $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\operatorname{sen}(ax+a)}{bx+b}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\dfrac{a}{b}$ **(D)** $\dfrac{b}{a}$

73 Seja k um número real diferente de 0 e seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{kx} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k para o qual existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

(A) $\dfrac{1}{2}$ **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

PROFESSOR

Soluções

67. (B)

68. (A)

69. (C)

70. (A)

71. (D)

72. (C)

73. (D)

74 Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(a-x)}{x-a} & \text{se } x\neq a\\ k & \text{se } x=a\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

Qual é o valor de k para o qual a função g é contínua em a?

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** a^2

75 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{x} & \text{se } x\neq 0\\ a+2 & \text{se } x=0\end{cases}$$

Qual é o valor de a para o qual a função f é contínua?

(A) $\pi-2$ **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** $-\pi-2$

76 Seja $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$ e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{6}$.

Qual é o declive da reta r?

(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $-2\sqrt{3}$ **(C)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $2\sqrt{3}$

77 Seja f a função definida em $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$?

(A) $1-\dfrac{\pi}{4}$ **(B)** $1-\dfrac{\pi}{2}$ **(C)** $1+\dfrac{\pi}{4}$ **(D)** $1+\dfrac{\pi}{2}$

78 Se $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$, então $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)}{x}$:

(A) é 0. **(B)** é 1. **(C)** é 2. **(D)** não existe.

79 Para qual das funções se tem $\forall x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, $h'(x)>0$?

(A) $h(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ **(B)** $h(x)=\operatorname{sen}x-\cos x$

(C) $h(x)=\cos x-\operatorname{sen}x$ **(D)** $h(x)=-\operatorname{sen}x-\cos x$

PROFESSOR

Soluções

74. (B)

75. (B)

76. (B)

77. (B)

78. (C)

79. (D)

80 Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$.

Qual das expressões seguintes é igual a $f'(x)$?

(A) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ **(B)** $\frac{1}{\cos x}$ **(C)** $\ln(\cos x)$ **(D)** $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

81 Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$. Qual dos pontos seguintes pertence à reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$?

(A) $A(0, 0)$ **(B)** $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ **(C)** $C\left(-\frac{\pi}{4}, -\pi\right)$ **(D)** $D\left(-\frac{\pi}{4}, 1-\pi\right)$

82 Considera a função f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Qual das equações seguintes define uma reta tangente ao gráfico de f?

(A) $y = 2$ **(B)** $y = 2x$ **(C)** $y = \sqrt{2}x$ **(D)** $y = x$

83 Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ no intervalo $]0, 15\pi[$?

(A) 29 **(B)** 30 **(C)** 31 **(D)** 32

84 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2x+\pi}{3}\right)$.

Qual é o período fundamental da função f?

(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $\frac{2\pi}{3}$ **(C)** 2π **(D)** 3π

85 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{2 - \operatorname{sen}(50x)\cos(50x)}{\sqrt{2}}$.

Qual é o contradomínio da função f?

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$ **(B)** $[4 - 2\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2}]$

(C) $\left[\frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{8\sqrt{3}}{8}\right]$ **(D)** $\left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right]$

86 Seja g a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Qual é o contradomínio da função g?

(A) $[-1, 1]$ **(B)** $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right]$

(C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

PROFESSOR

Soluções

80. (D)
81. (D)
82. (D)
83. (A)
84. (D)
85. (D)
86. (D)

87 Seja h a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$, definida por $h(x) = \cos^2 x$.

O contradomínio da função h é:

(A) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ **(B)** $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ **(C)** $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$

Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

88 Seja $x(t) = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ um oscilador harmónico.

A amplitude, a pulsação e a frequência desse oscilador são, respetivamente:

(A) 2, 2 e $\frac{1}{2}$. **(B)** 2, π e $\frac{1}{2}$. **(C)** 4, 2 e 2. **(D)** 4, π e 2.

89 Seja x um oscilador harmónico. A amplitude, a fase e a frequência de x são, respetivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Qual das expressões seguintes é uma expressão de $x(t)$?

(A) $\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ **(B)** $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t + \pi}{2}\right)$

(C) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{\pi t + 2\pi}{4}\right)$

90 Qual é a frequência de um oscilador harmónico cuja pulsação é igual a π?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{\pi}$ **(D)** $\frac{2}{\pi}$

Itens de construção

Fórmulas trigonométricas

91 Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes.

a) $\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{2} = -1$

b) $\cos x - \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2 = 0$

c) $\operatorname{sen}(4x) = 2\operatorname{sen}(2x)$

92 Determina $\cos(4x)$, sabendo que $\operatorname{sen}(x+\pi)\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(3x)\cos x = \frac{1}{3}$.

93 Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

a) Determina o domínio de f.

b) Prova que $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$.

c) Determina o conjunto das soluções da condição $|f(x)| < 4$ que pertencem ao intervalo $[0, \pi]$.

PROFESSOR

Soluções

87. (A)

88. (B)

89. (B)

90. (A)

91. a) $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$

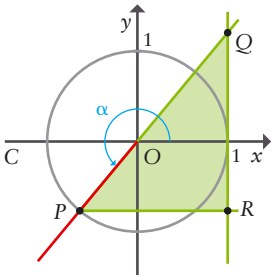
c) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

92. $\frac{7}{9}$

93. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}: \left(\exists k \in \mathbb{Z}: x = \frac{k\pi}{2}\right)\right\}$

c) C.S. $= \left]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right[$

94 Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$.



Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no terceiro quadrante.

Para cada posição do ponto P, seja:

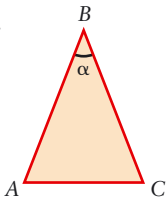
- $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ a amplitude do ângulo orientado de sentido positivo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$;
- Q o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$;
- R o ponto da reta de equação $x = 1$ que tem ordenada igual à do ponto P;
- $f(\alpha)$ a área do triângulo $[PQR]$.

a) Mostra que $f(\alpha) = \dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha - 4\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,(2\alpha)}{4}$.

b) Para um certo $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, tem-se $\text{tg}\,(2x) = \frac{4}{3}$. Determina $f(x)$.

Limites e derivadas de funções trigonométricas

95 A figura representa um triângulo $[ABC]$, em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo ABC.

a) Mostra que o comprimento do lado $[AC]$ pode ser dado por $2\overline{AB}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$.

b) Considera agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Usa o resultado da alínea anterior para provar que o perímetro do polígono é dado por $p_n = 2n\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$.

c) Determina e interpreta o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

96 Determina:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\text{sen}\,(x+2)}{x^2 + x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\text{sen}\,x} - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\text{tg}\,x}{\pi - x}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen}\,x - \cos x}{4x - \pi}$

PROFESSOR

Soluções

94. b) $\dfrac{9 + 4\sqrt{5}}{20}$

95. c) 2π

Este limite é o perímetro do círculo de raio 1, que é o limite da sucessão dos perímetros dos polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1, quando o número de lados tende para $+\infty$.

96. a) $-\dfrac{1}{3}$ **b)** 1

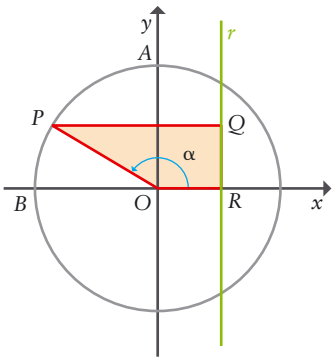
c) -1 **d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

97 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{e^{4x}-1} & \text{se } x<0\\[2ex] \dfrac{1-\cos(ax)}{x^2} & \text{se } x>0\end{cases},\quad a\neq 0$$

Determina os valores de a para os quais existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

98 Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, bem como a reta r, de equação $x=\frac{1}{2}$, que interseta o eixo Ox no ponto R. Estão também representados os pontos $A(0,1)$ e $B(-1,0)$.
Considera que o ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.



Para cada posição do ponto P, seja:

- Q o ponto da reta r cuja ordenada é igual à ordenada do ponto P;
- α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado positivamente, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$;
- $f(\alpha)$ a área do quadrilátero $[OPQR]$.

a) Mostra que $f(\alpha)=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$.

b) Determina $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

c) Determina o valor de α para o qual a área do quadrilátero $[OPQR]$ é máxima.

99 Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\operatorname{sen}(2x)+x$.

a) Estuda, quanto à monotonia e quanto existência de extremos relativos, a restrição da função f ao intervalo $]-\pi,\pi[$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Mostra que, se $a+b=\pi$, também $f(a)+f(b)=\pi$.

d) Seja $h(x)=f(x)-x$. Calcula o valor exato de $h(\theta)$, sabendo que $\cos(4\theta)=\frac{1}{5}$ e que $\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

PROFESSOR

Soluções

97. $a=-\frac{1}{2}$ ou $a=\frac{1}{2}$

98. b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$;
quando $x=\frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto A e o quadrilátero $[OPQR]$ é um retângulo de largura igual a $\frac{1}{2}$ e altura igual a 1.

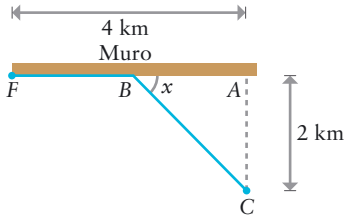
c) $\frac{2\pi}{3}$

99. a) f é crescente em $\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$, em $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$;
f é decrescente em $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$;
$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$ e
$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$
são máximos relativos e
$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$ e
$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}$
são mínimos relativos.

b) 3

d) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

100 Pretende-se ligar uma fábrica F a uma central de tratamento de resíduos C, por meio de uma conduta, conforme se apresenta na figura.



- A conduta deve seguir ao longo de um muro, até um certo ponto B, e daí deve seguir em linha reta até à central de tratamento.
- Designou-se por A o ponto do muro mais próximo da central de tratamento.
- A distância da fábrica ao ponto A é 4 km, e a distância deste ponto à central é 2 km.
- Designou-se por x a amplitude do ângulo ABC.

O preço de colocação da conduta é:

- quinze mil euros por quilómetro, ao longo do muro;
- vinte e cinco mil euros por quilómetro, do muro à central de tratamento.

a) Determina o preço da colocação da conduta se $\cos(F\hat{B}C) = -\frac{6}{7}$.

b) Identifica a forma da conduta se $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Mostra que o preço de colocação da conduta, em milhares de euros, é dado, em função de x, por $C(x) = 60 + \frac{50 - 30\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $x \in \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right[$.

d) Determina o valor de $\cos x$ para o qual o preço de colocação da conduta é mínimo.

101 Considera a função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$. Determina, por processos analíticos, o contradomínio de f.

102 Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x + 1$. Mostra, sem recorrer à calculadora, que f tem um único zero e que esse zero pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$.

103 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + x$.

a) Determina $f'(\pi)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 2\pi$.

PROFESSOR

Soluções

100. a) 107 149,52 euros

b) É o segmento de reta $[FC]$.

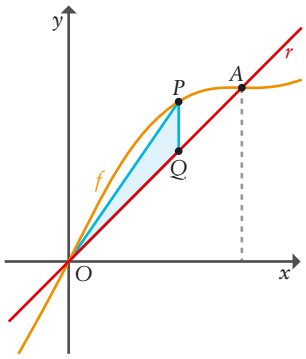
d) $\cos x = \frac{3}{5}$

101. $D'_f = [1, e-1]$

103. a) $f'(\pi) = 0$

b) $y = 2x - 2\pi$

c) No referencial seguinte estão representadas parte do gráfico da função f e parte da reta r de equação $y = x$. O ponto A pertence à reta r e ao gráfico de f.



Considera que um ponto P se desloca sobre o gráfico de f, entre O e A, não coincidindo nunca com qualquer destes pontos.

Para cada posição do ponto P, seja x a sua abcissa e seja Q o ponto da reta r que tem abcissa igual à de P.

Recorrendo à calculadora, determina o valor de x para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é máxima.

Apresenta o(s) gráfico(s) que utilizaste para responder ao problema, identifica a(s) função(funções) representada(s) e assinala os pontos relevantes.

Apresenta o valor pedido arredondado às centésimas.

104 De uma função g, de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua derivada tem domínio $[-\pi, \pi]$ e é definida por $g'(x) = x + 2\operatorname{sen} x$.

a) Determina o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0) + g'(x)}{x}$.

b) Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e determina as abcissas dos pontos de inflexão.

105 Considera as funções f e h, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$ e $h(x) = \operatorname{sen} x$.

a) Os gráficos de f e h intersetam-se numa infinidade de pontos. Determina uma expressão que represente as abcissas desses pontos.

b) Supondo que $h\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}$ e que $a \in [\pi, 2\pi]$, determina o valor exato de $f(a)$.

c) Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{4}$.

106 Seja f a função, de domínio $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 1 + \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}$.

a) Estuda a função quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

b) Mostra que f tem um máximo e determina-o.

c) Determina a área do triângulo $[ABC]$, sendo A e B os pontos em que o gráfico de f interseta o eixo Ox e C o ponto do gráfico de f com abcissa $\dfrac{5\pi}{6}$.

PROFESSOR

Soluções

103. c) $\approx 2{,}03$

Seja g a função de domínio $]0, \pi[$, definida por $g(x) = \dfrac{x \times \operatorname{sen} x}{2}$.

104. a) 3

b) O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

105. a) $x = k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $f(a) = -\dfrac{8\sqrt{5}}{27}$

c) $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

106. a) A função é contínua, as retas de equaçoes $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais.
Não há assíntotas não verticais.

b) $f(\pi) = 1$ é máximo.

c) $A = \dfrac{6\pi - 2\sqrt{3}\,\pi}{9}$

107 Seja f a função, de domínio $[-2\pi, +\infty[\setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + \operatorname{sen} x}{x} & \text{se } -2\pi \leqslant x < 0 \\ 3x + \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 - xe^{-x} + 2x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico, por processos analíticos, sem recorrer à calculadora, e escreve equações das assíntotas que identificares.

b) Considera o gráfico da função f em referencial o.n. Existe um ponto no gráfico de f, cuja abcissa pertence ao intervalo $\left]-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[$, onde a reta tangente ao gráfico é paralela à reta de equação $10y - x = 0$.

Determina as coordenadas desse ponto, recorrendo a uma calculadora gráfica.

Apresenta as coordenadas arredondadas às décimas.

Na tua resposta deves equacionar o problema, apresentar o(s) gráfico(s) que sustenta(m) a tua resposta e identificar a(s) função(funções) cujo(s) gráfico(s) apresentas.

108 O modelo matemático que descreve o salto de um animal é $y = x \operatorname{tg}\theta - \dfrac{4{,}9x^2}{v^2\cos^2\theta}$, onde y é a altura em função do avanço x na horizontal, θ é o ângulo com a horizontal e v é a velocidade inicial.

Determina a altura máxima atingida por uma rã que salta com velocidade de 4,57 m/s fazendo 30º com a horizontal.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às milésimas.

Adaptado de Luís Madureira, *Aplicando a Matemática*

109 Seja $f(x) = x^2 + \cos x + x$ uma função de domínio $\mathbb{R}$.

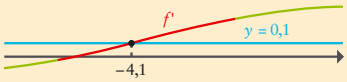
Por processos analíticos, prova que a função f' tem apenas um extremo relativo e que esse extremo pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

PROFESSOR

Soluções

107. a) $x = 1$ e $y = 2x + 1$

b) $A(-4{,}1; 1{,}8)$



108. 0,266 m

110 Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{se } -\frac{\pi}{2}<x<0\\ \ln(2e^x-x) & \text{se } x\geqslant 0\end{cases}$$

a) Estuda a existência de assíntotas verticais ao gráfico da função.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ e interpreta o resultado obtido em termos de assíntotas ao gráfico da função f.

c) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{4}$.

111 Seja f a função, de domínio $]-1, 1[$, definida por $f(x)=x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a) Investiga se existem assíntotas ao gráfico de f.

b) Estuda a função f quanto à monotonia, existência de extremos e sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.

112 Seja f a restrição ao conjunto $]0, \pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ da função h definida por $h(x)=\frac{4}{e^{\operatorname{sen}(2x)}-1}$.

a) Investiga se existem assíntotas ao gráfico de f.

b) Estuda a função f quanto à monotonia e determina o seu contradomínio.

113 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$.

a) Mostra que 2π é período da função f.

b) Estuda a restrição da função ao intervalo $[0, 2\pi]$ quanto à monotonia e existência de extremos e conclui, justificando, qual é o contradomínio da função f.

c) Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{3\pi}{4}$. Existe um ponto, cuja abcissa pertence ao intervalo $[-\pi, 0]$, em que a reta tangente ao gráfico de f é perpendicular à reta r. Determina a abcissa desse ponto.

d) Mostra que o gráfico da função f tem uma infinidade de pontos de inflexão cujas abcissas são os zeros da função.

114 Considera as funções f e g definidas por $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$ e $g(x)=\frac{5}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Por processos analíticos, determina, justificando, o contradomínio de cada uma das funções.

PROFESSOR

Soluções

110. a) A reta de equação $x=-\frac{\pi}{2}$ é a única assíntota vertical.

b) $\ln(2)$; a reta de equação $y=x+\ln(2)$ é assíntota ao gráfico de f, em $+\infty$.

c) $y=\frac{16-8\pi}{\pi^2}x+\frac{8-2\pi}{\pi}$

111. a) As retas de equações $x=-1$ e $x=1$ são as únicas assíntotas verticais.

b) f é decrescente; o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 1[$; o ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão.

112. a) As retas de equações $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$ são as únicas assíntotas.

b) $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{e-1}$ é mínimo relativo e $h\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{4}{e^{-1}-1}$ é máximo relativo;

$D'_h=\left]-\infty, \frac{4}{e^{-1}-1}\right]\cup\left[\frac{4}{e-1}, +\infty\right[$.

113. b) f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ é máximo absoluto e $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ é mínimo absoluto da restrição de f ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Dado que 2π é período da função f, o seu contradomínio é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

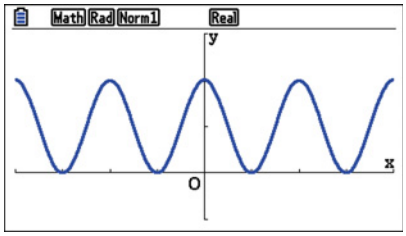
c) $-\frac{7\pi}{12}$

114. $D'_f=[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

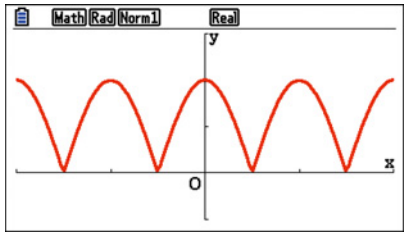
$D'_g=]-\infty, -5]\cup[5, +\infty[$

115 Um dos gráficos seguintes representa a função f definida por $f(x)=\cos^2 x$ e o outro representa a função g definida por $g(x)=|\cos x|$.

A



B



Os dois gráficos estão visualizados em «janelas» iguais.

Qual é qual?

Apresenta argumentos que justifiquem a tua escolha, sem recorrer à calculadora.

116 Seja h a função, de domínio $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, definida por $h(x)=e^{\frac{1}{4\cos x}}$.

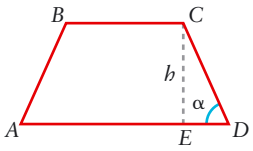
a) Prova que a função h tem um extremo e caracteriza-o.

b) Investiga se existem assíntotas ao gráfico da função h .

c) Determina o contradomínio da função h .

d) Determina o conjunto-solução da condição $h(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{e}}$.

117 Considera o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$ m .

Seja α a amplitude do ângulo ADC, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, e seja $A(\alpha)$ a área do trapézio em função de α .

a) Determina a área do trapézio para $\alpha=1$. Apresenta o resultado em m^2, arredondado às centésimas. Em cálculos intermédios conserva, no mínimo, quatro casas decimais.

b) Mostra que $A(\alpha)=100\,\text{sen}\,\alpha+50\,\text{sen}\,(2\alpha)$ e determina o valor de α para o qual a área do trapézio é máxima.

c) Determina $\lim\limits_{\alpha\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} A(\alpha)$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

d) Mostra que existe uma amplitude $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{5}\right[$ para a qual a área do trapézio correspondente é 100 m^2.

PROFESSOR

Soluções

115. O gráfico A corresponde à função g e o gráfico B corresponde à função f.

116. a) $f(\pi)=e^{-\frac{1}{4}}$ é máximo (absoluto).

b) Não existem assíntotas.

c) $D'=\left]0,e^{-\frac{1}{4}}\right]$

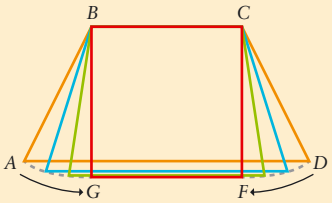
d) C.S. $=\left]\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right[$

117. a) 129,61 m^2

b) $\alpha=\frac{\pi}{3}$

c) 100

Quando α tende para $\frac{\pi}{2}$, o ponto D desloca-se para F e o ponto A desloca-se para G. Portanto, o trapézio tende para o quadrado $[GBCF]$, que é um quadrado de área 100 porque tem lado 10.



118 De uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada g' também tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = 2 - \operatorname{sen} x$.

a) Determina o valor de $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi}$.

b) Estuda o gráfico de g quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão, no intervalo $[0, 2\pi]$.

c) Indica, justificando, o valor lógico da afirmação:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b \Longrightarrow g(a) > g(b)$$

d) O gráfico de g tem uma infinidade de pontos onde a reta tangente é paralela à reta de equação $y = \dfrac{4x}{3}$.

Utiliza a calculadora para determinar a abcissa do que tem maior abcissa negativa e explica como procedeste. Apresenta o resultado aproximado às décimas.

119 Seja f a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $f(x) = \ln(\cos x + 1)$.

a) Averigua se o gráfico de f tem assíntotas.

b) Determina o contradomínio de f.

c) Mostra que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

120 Considera a função g definida por $g(x) = |\cos x| + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

a) Justifica que g é contínua.

b) Em que intervalo g é positiva e crescente?

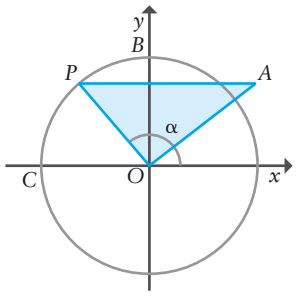
c) Resolve a equação $g(x) = 0$.

d) Determina o contradomínio de g.

e) Esboça o gráfico de g.

121 Na figura estão representados a circunferência trigonométrica e o triângulo $[OPA]$. O ponto P pertence ao arco BC e o ponto A é o ponto de abcissa 1 que tem ordenada igual à do ponto P.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado positivamente, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.



a) Mostra que a área do triângulo $[OPA]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$.

b) Determina a área do triângulo que tem a maior área possível.

c) Determina, sem recorrer à calculadora, o valor exato da área do triângulo quando a reta OA tem declive 0,6.

PROFESSOR

Soluções

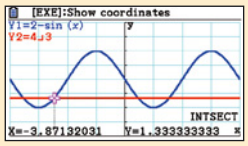
118. a) 2

b) No intervalo $[0, 2\pi]$, os zeros de g'' são $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$ que correspondem a dois pontos de inflexão;

concavidade voltada para cima em $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

c) A afirmação traduz que g é crescente em $\mathbb{R}$, o que é verdade, pois $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ (recorda que $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$).

d) $x \approx -3{,}9$



119. a) As retas de equações $x = -\pi$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais.

Não há assíntotas não verticais.

b) $D'_f = \left]-\infty, \ln(2)\right]$

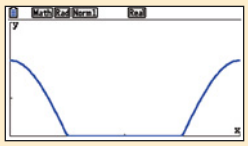
120. a) É a soma de duas funções contínuas.

b) $\left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

c) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

d) $D'_g = [0, 2]$

e)



121. b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ (u.a.)

c) 0,54

122 Determina o domínio e uma expressão dos zeros, caso existam, da função f definida em $\mathbb{R}$ por:

a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{tg} x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ **c)** $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{tg} x}$

123 Sejam g, h, r e s as funções definidas por $g(x)=2\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)+3$, $h(x)=\operatorname{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $r(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}$ e $s(x)=1-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Indica, para cada uma delas, o contradomínio e o período fundamental e explica como se pode obter o respetivo gráfico a partir do gráfico da função seno.

124 Considera a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x)=a+b\cos(cx)$.

a) Indica valores para a, b e c de modo que a função h tenha contradomínio $[1, 7]$ e período 2.

b) Seja $a=1$, $b=2$ e $c=2$.

b₁) Resolve a equação $h(x)=0$.

b₂) Determina o maior e o menor zero de h' no intervalo $\left]-50\pi, \dfrac{11}{3}\pi\right[$.

125 O número de pessoas na fila do Oceanário, num certo dia, pode ser dado, aproximadamente, em dezenas, por:

$$N(t)=a-b\cos\frac{\pi t}{20}$$

sendo t o tempo, em minutos, a partir das 9 h 30 min ($a, b \in \mathbb{R}^+$).

a) Sabendo que às 10 h 30 min estavam 130 pessoas na fila e que o número mínimo de pessoas na fila é 30, mostra que $a=8$ e $b=5$.

b) Determina a que horas a fila atinge pela primeira vez 105 pessoas. Apresenta a resposta com os minutos arredondados às unidades.

126 A profundidade da água do mar à entrada de um porto de abrigo é dada, em metros, às t horas de certo dia, por $h(t)=9-2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$. Responde aos itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostra que a primeira maré baixa desse dia ocorreu às zero horas.

b) Quanto tempo decorreu entre duas marés baixas?

c) Uma determinada embarcação só pode entrar neste porto se a profundidade da água for pelo menos 10 metros. Determina entre que horas deste dia é que a embarcação pode ter entrado no porto.

PROFESSOR

Soluções

122. a) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: (\exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \vee \exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi)\right\}$;
zeros: $k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b) $D=\mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}: (\exists k\in\mathbb{Z}: x=2k\pi)\}$;
zeros: $\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}: (\exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \vee \exists k\in\mathbb{Z}: x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi)\right\}$;
não existem zeros.

123.

Função	D'	Período fundamental	Transformações
g	$[1, 5]$	2π	Translação de vetor $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$, seguida de dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de translação de vetor $(0, 3)$
h	$[-1, 1]$	π	Translação de vetor $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$
r	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{2\pi}{3}$	Translação de vetor $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$
s	$[-1, 3]$	4π	Dilatação horizontal de coeficiente 2, seguida de dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de reflexão de eixo Ox, seguida de translação de vetor $(0, 1)$

124. a) Por exemplo, $a=4$, $b=3$ e $c=\pi$.

b₁) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

b₂) O menor é $-\dfrac{99\pi}{2}$ e o maior é $\dfrac{7\pi}{2}$.

125. a) $a-b=3 \wedge a-b\cos(3\pi)=13$

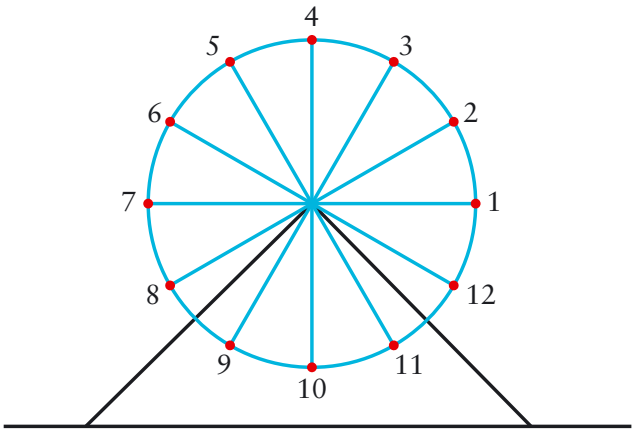
b) 9 h 43 min

126. b) 12 horas

c) A embarcação pode ter entrado no porto entre as 4 horas e as 8 horas ou entre as 16 horas e as 20 horas.

Osciladores harmómicos e a segunda lei de Newton

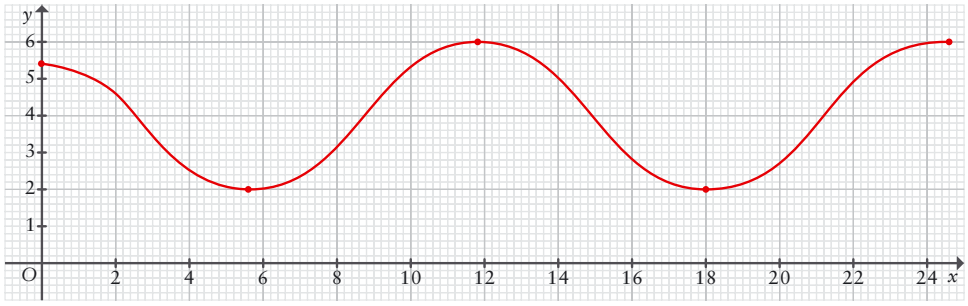
127 Uma roda gigante de um parque de diversões tem 10 metros de diâmetro. Quando a roda começa a girar, a Marta está sentada na cadeira com o número 1, que se encontra a 8 metros do solo. A roda demora 2 minutos a dar uma volta completa.



A distância da cadeira da Marta ao solo, t minutos depois de se iniciar o movimento, é dada por uma função definida por uma expressão do tipo $a\,\text{sen}\,(bt+c)+d$, com $a>0$, $b>0$ e $c\in[0, 2\pi[$.

Determina valores para a, b, c e d de modo que a expressão $a\,\text{sen}\,(bt+c)+d$ modele a situação descrita.

128 Observa o gráfico seguinte que representa o nível que a água atinge num porto entre as 0 horas de um dia e as 0 horas e 36 minutos do dia seguinte.



Obtém valores para a, b, c e d de modo que a função definida por $f(x)=a\,\text{sen}\,(bx+c)+d$ seja compatível com o gráfico apresentado. Podes usar valores aproximados.

Sugestão: começa por considerar o referencial de eixos paralelos ao referencial da figura com origem no ponto de coordenadas $(8{,}8;\ 4)$.

PROFESSOR

Soluções

127. Por exemplo: $a=5$, $b=\pi$, $c=\frac{\pi}{2}$ e $d=3$.

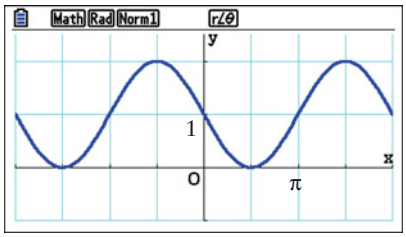
128. Por exemplo: $a=2$, $b\approx 0{,}5$, $c=4{,}4$ e $d=4$.

129 Os gráficos seguintes representam funções que podem ser definidas por expressões do tipo:

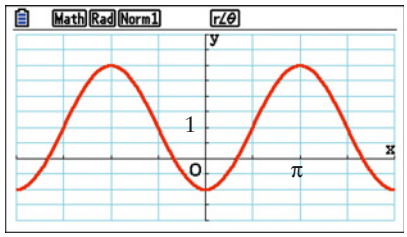
$$a\cos(bx+c)+d\text{, com } a>0\text{, } b>0 \text{ e } c\in[0, 2\pi[$$

Determina uma expressão deste tipo que seja adequada a cada uma das funções representadas.

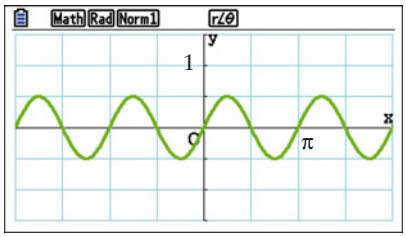
f



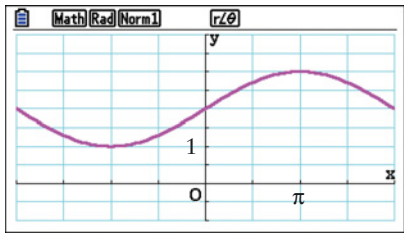
g



h



i



130 Admite que num certo dia de verão, na praia de Santa Cruz, a temperatura do ar e a temperatura da água do mar, às t horas desse dia, são dadas, em graus Celsius (°C), respetivamente por:

$$A(t) = 20 + 8\,\text{sen}\,\frac{\pi(t-8{,}3)}{12} \qquad M(t) = 10 + 2\cos\frac{\pi(t-17{,}6)}{12}$$

a) Indica em que altura do dia, horas e minutos, a temperatura do ar atingiu o valor máximo.

b) Determina durante quanto tempo a água do mar esteve, nesse dia, a uma temperatura superior a 11 °C.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, determina o instante em que foi máxima a diferença entre a temperatura do ar e a temperatura da água, nesse dia, na praia de Santa Cruz. Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Explica como procedeste. Na tua explicação deves incluir o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e assinalar as coordenadas de algum(alguns) ponto(s) relevante(s) (apresenta essas coordenadas arredondadas às centésimas).

131 A posição, em relação à origem, de um corpo móvel sobre um eixo é dada por:

$$S(t) = m\,\text{sen}\,(kt) + n\cos(kt)$$

onde m, n, k são constantes não nulas.

Mostra que a aceleração do movimento (S'') é diretamente proporcional a S. Qual é a constante de proporcionalidade?

PROFESSOR

Soluções

129. $f(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$g(x) = 2\cos(x+\pi)+1$

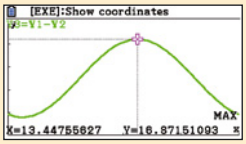
$h(x) = \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$

$j(x) = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)+2$

130. a) 14 h 18 min

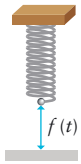
b) 8 horas

c) Ocorre às 13 h e 27 min (aproximadamente).



131. $\frac{S''(t)}{S(t)} = -k^2$

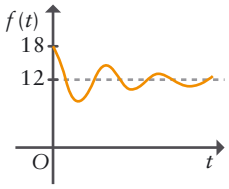
132 Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.



Admite que a distância (em cm) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por uma função da família:

$$f(t) = a + be^{-0,1t}\cos\left(\frac{\pi t}{c}\right), \ t \in [0, +\infty[$$

Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função f.



A reta de equação $y = 12$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f.

Sabe-se também que:

$$f(t) = 12 \Leftrightarrow t = 1,5 + 3k, \ k \in \mathbb{N}_0$$

Determina valores para a, b e c.

133 No movimento de um ponto sobre um eixo, a abcissa δ do ponto varia, em função do tempo t, de acordo com a equação:

$$\delta(t) = \cos t - \sqrt{3}\,\text{sen}\, t, \ t \in [0, 2\pi[$$

a) Mostra que $\delta(t) = -2\,\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Determina a maior distância a que o ponto está da origem.

c) Indica o contradomínio de δ.

134 Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I = [0, 4]$ (sendo o tempo medido em segundos). A expressão $4\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$ dá a abcissa do ponto P, em função de $t \in I$. Trata-se, portanto, de um oscilador harmónico.

a) Determina a abcissa do ponto P no instante em que termina o movimento.

b) Quantas vezes é que o ponto P atinge a distância máxima à origem durante o movimento?

PROFESSOR

Soluções

132. $a = 12$, $b = 6$ e $c = 3$.

133. b) 2

c) $[-2, 2]$

134. a) -2

b) Seis

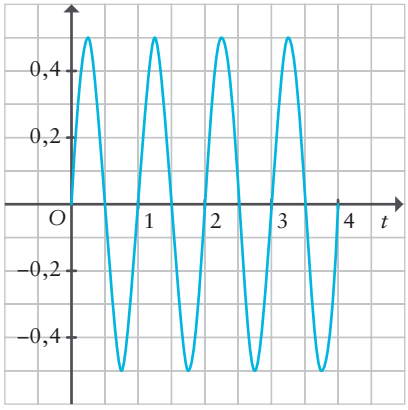
135 Um ponto P desloca-se numa reta numérica no intervalo de tempo $I=[0, 8]$ (sendo o tempo medido em segundos). A expressão $4\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$, com $\omega>0$, dá a abcissa do ponto P, em função de $t\in I$. Trata-se, portanto, de um oscilador harmónico.

Sabe-se que a frequência do oscilador é $\frac{3}{4}$.

a) Determina a abcissa do ponto P decorrido 1 segundo.

b) Determina o primeiro instante em que a velocidade é nula e explica o que acontece nesse instante. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

136 Considera um oscilador harmónico tal que a abcissa de um ponto P que se desloca numa reta numérica no intervalo de tempo $I=[0, 4]$ (sendo o tempo medido em segundos) é dada por $x(t)$. A representação gráfica de x no intervalo $[0, 4]$ é a seguinte:



a) Determina a amplitude A, o período T, a pulsação ω e a fase $\phi\in[0, 2\pi[$ deste oscilador.

b) Escreve $x(t)$ na forma $A\cos(\omega t+\phi)$.

c) Sem recorrer à calculadora, determina os instantes em que o ponto P passa na posição em que se encontra decorrido 1 minuto e 15 segundos, a partir do instante inicial.

137 Um ponto P move-se no eixo das abcissas de forma que a sua abcissa, no instante t (em segundos) é dada por $x(t)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$.

a) Mostra que este sistema é um oscilador harmónico.

b) Determina o valor real de k tal que $x''(t)=-kx(t)$.

PROFESSOR

Soluções

135. a) $2\sqrt{3}$

b) 0,44 s; o ponto P inverte, pela primeira vez, o sentido em que se desloca.

136. a) Amplitude: 0,5;

período: 1;

pulsação: 2π;

fase: $\frac{3\pi}{2}$.

b) $x(t)=0{,}5\cos\left(2\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$

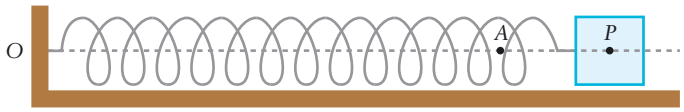
c) Os instantes são 0,25 s, 1,25 s, 2,25 s e 3,25 s.

137. a) $x(t)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $-\frac{k^2}{9}$

138 Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica de uma mola.

A figura esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$.



Admite que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por:

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $(t \in [0, +\infty[)$.

Resolve os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determina o primeiro instante em que o ponto P esteve mais perto da origem.

b) Indica, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação: «Durante o primeiro segundo, o ponto P esteve sempre a afastar-se da origem.»

c) Determina $b \in \mathbb{R}$ de modo que a função h definida por $h(t) = d(t) + b$ seja solução da equação diferencial $f'' = -\pi^2 f$.

139 Considera, num referencial ortonormado xOy, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$.

Admite que um ponto P, partindo do ponto de coordenadas $(0, 3)$, se desloca sobre essa circunferência, em sentido anti-horário, percorrendo arcos iguais em intervalos de tempo iguais. Para cada posição do ponto P, seja $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ o ângulo generalizado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$.

Admite que, em cada segundo, o ponto P percorre um arco de amplitude $\frac{\pi}{12}$.

a) Determina uma expressão que represente a abcissa do ponto P em função de θ.

b) Determina a abcissa do ponto P, 8 segundos depois de se iniciar o movimento.

c) Exprime θ em função de t, sendo t o tempo, dado em segundos, que decorre depois de o ponto P iniciar o seu movimento.

d) Determina uma expressão $x(t)$ que represente a abcissa do ponto P em função de t e verifica que x é um oscilador harmónico. Indica a amplitude, a pulsação, o período e a fase do oscilador.

PROFESSOR

Soluções

138. a) $t = \frac{4}{3}$

b) A afirmação é falsa porque a função é crescente em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ mas é decrescente em $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Portanto, durante o primeiro segundo, o ponto P só se afasta da origem no primeiro terço de segundo.

c) $b = -1$

139. a) $3\cos\theta$

b) $3\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

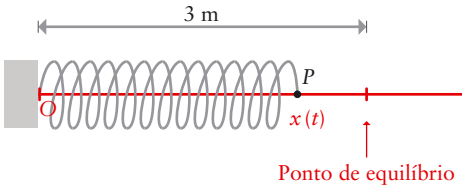
c) $\theta = \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{2}$, $t \in [0, 24[$

d) $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{2}\right)$

e esta expressão é da forma $A\cos(\omega t + \phi)$ com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$;

Amplitude: 3; pulsação: $\frac{\pi}{12}$; período: 24; fase: $\frac{\pi}{2}$.

140 Um ponto material P está colocado na extremidade de uma mola, cuja outra extremidade se encontra fixa. Como resultado da força exercida pela mola, o ponto P desloca-se sobre uma reta numérica, orientada da esquerda para a direita e onde uma unidade corresponde a 1 metro. Admite que a origem desta reta numérica coincide com o ponto de fixação da mola, o qual se encontra 3 metros à esquerda do ponto de equilíbrio.



Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo (medido em segundos).

Seja $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t.

Tem-se $x(t) = 3 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

a) No instante em que se inicia a contagem do tempo, o ponto P está numa certa posição. Durante os primeiros dez segundos do movimento, o ponto P passa por essa posição mais do que uma vez. Determina os instantes, diferentes do inicial, em que tal acontece.

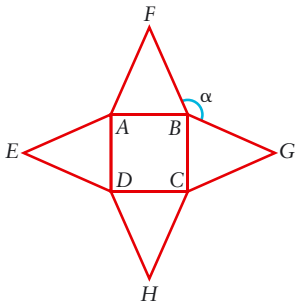
b) Justifica, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que há pelo menos um instante, entre os três e os quatro segundos após o ínicio da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O é igual a 1,5 metros.

c) Se a origem da reta numérica coincidisse com o ponto de equilíbrio, como seria a expressão que dá a abcissa do ponto P, em função do tempo t, medido em segundos e contado a partir do mesmo instante inicial? Apresenta a tua resposta na forma $A\cos(\omega t + \phi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\phi \in [0, 2\pi[$.

d) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, indica a amplitude, a pulsação, a fase, o período e a frequência deste oscilador harmónico.

«Os sete mais»

* **141** Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4.



Seja α a amplitude em radianos do ângulo FBG $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

Mostra que a área total da pirâmide é dada, em função de α, por:

$$32 - 32(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$$

PROFESSOR

Soluções

140. a) Nos instantes 2 s, 6 s e 8 s.

c) $d(t) = x(t) - 3 = 2\cos\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{5\pi}{3}\right)$

d) Amplitude: 2; pulsação: $\frac{\pi}{3}$; fase: $\frac{5\pi}{3}$; período: 6; frequência: $\frac{1}{6}$.

142 Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

143 Seja $[ABC]$ um triângulo. Designemos os ângulos internos cujos vértices são A e B por essas mesmas letras. Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é escaleno, que os ângulos A e B são agudos e que:

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 B}$$

Mostra que o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

144 Mostra que $a \operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x) = b$, sabendo que $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$.

145 Sem recorrer à calculadora, mostra que a função f definida por

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos x$$

atinge um extremo relativo em $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ e indica se esse extremo é máximo ou é mínimo.

146 A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica que contém um certo volume de líquido e as figuras 2 e 3 representam as secções produzidas no depósito por planos paralelos às bases.

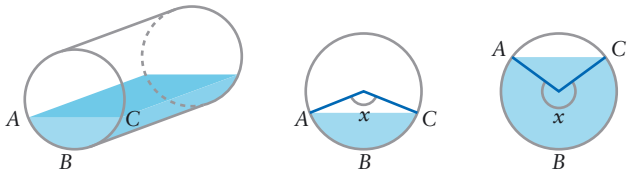


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

Seja x a amplitude em radianos do arco ABC $\left(x \in]0, 2\pi]\right)$.

a) Mostra que a área ocupada pelo líquido (em m^2) nas secções produzidas no depósito por planos paralelos às bases é dada, em função de x e do raio, r, do depósito, por:

$$a(x) = \frac{r^2(x - \operatorname{sen} x)}{2}$$

b) Admite que $r = \sqrt{2}$. Usa a calculadora para determinar a altura que o líquido atinge no depósito quando $a(x) = 5$ m^2. Apresenta o resultado em metros, aproximado às décimas. Em cálculos intermédios conserva pelo menos três casas decimais.

147 Admitindo que a função arco-tangente é diferenciável, mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e utiliza este resultado para mostrar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

PROFESSOR

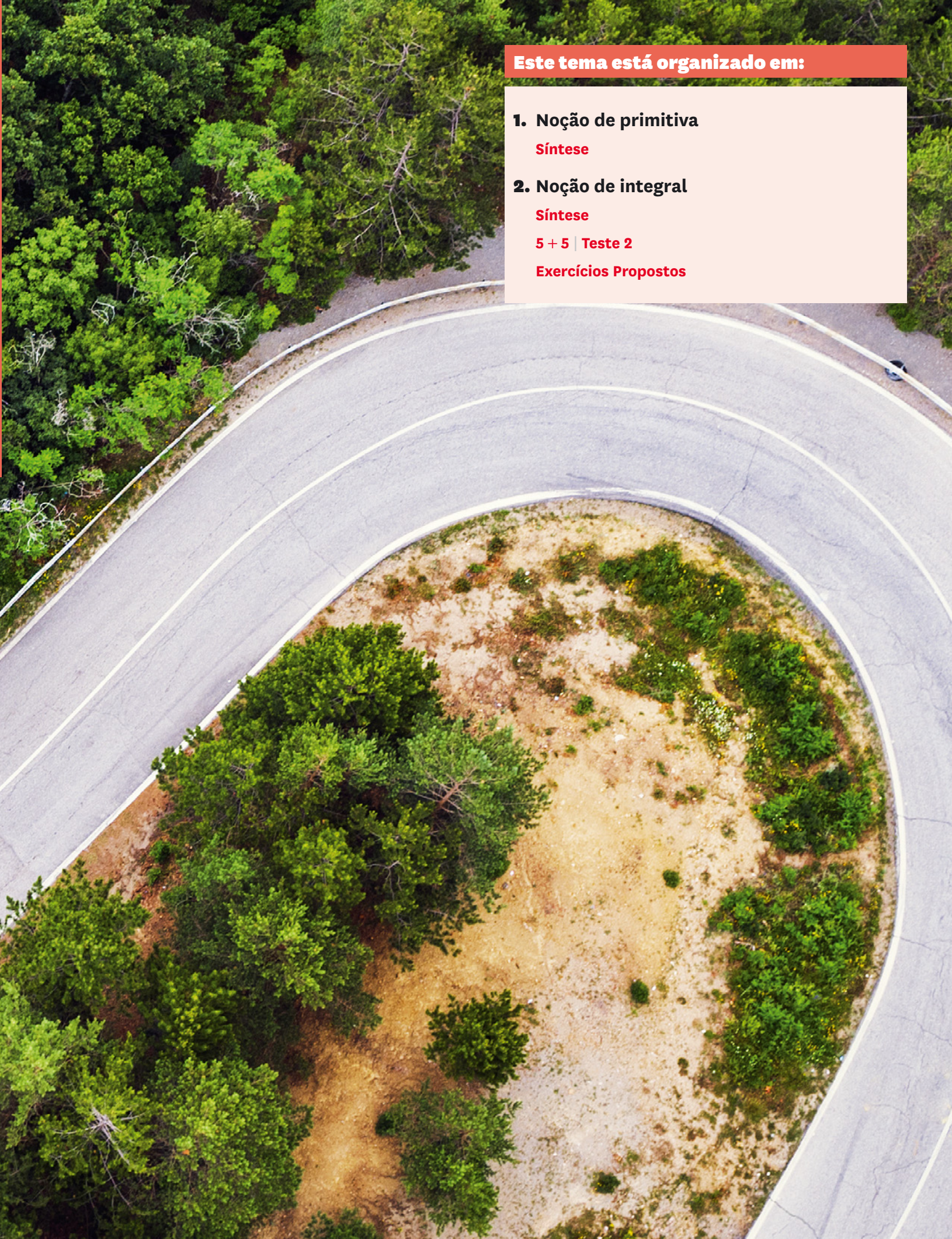
Soluções

145. f atinge um máximo relativo em $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

146. b) 2,1 m

Tema 6

Primitivas e Cálculo Integral



Este tema está organizado em:

1. Noção de primitiva

   Síntese

2. Noção de integral

   Síntese

   5 + 5 | Teste 2

   Exercícios Propostos

1. Noção de primitiva

PROFESSOR

Gestão curricular

Este tema poderá ser considerado facultativo, a título excecional, nos anos letivos 2017/2018 e 2018/2019.

No entanto, chama-se a atenção para a importância de trabalhar este tema também nestes anos letivos de exceção, sempre que possível e ainda que o tempo apenas permita fazê-lo de forma parcial.

NOTA

Embora não seja correto, é frequente escrever-se $[f(x)]'$ no lugar de $f'(x)$.

SERÁ QUE...? **Função cuja derivada é ...**

Repara que, se $f(x) = 3x^2 + 5$ então $f'(x) = 6x$.

De modo abreviado, dizemos que a derivada de $3x^2 + 5$ é $6x$. De igual modo, dizemos que a derivada de $1 + \operatorname{sen} x$ é $\cos x$.

Uma função cuja derivada é $2e^{2x}$ é a função definida por $e^{2x} + 3$.

Será que consegues descobrir uma função cuja derivada seja $2x + 4$?

Conceito de primitiva

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $3x^2 + 4$ e seja F a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $x^3 + 4x + 6$.

Tem-se que $F'(x) = f(x)$.

Diz-se que a função F é uma **primitiva** da função f.

De um modo geral, tem-se:

Seja f uma função real definida num intervalo I.

Diz-se que uma função F é uma **primitiva** de f em I se F é diferenciável em I e, para qualquer $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Diz-se que f é **primitivável** em I quando f admite uma primitiva nesse intervalo.

2.0 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Noção de primitiva»

Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLOS

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.

As funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $\operatorname{sen} x$, $1 + \operatorname{sen} x$ e $\sqrt{2} + \operatorname{sen} x$ são exemplos de primitivas da função f pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}' x = \cos x$, $(1 + \operatorname{sen} x)' = \cos x$ e $(\sqrt{2} + \operatorname{sen} x)' = \cos x$.

Portanto, f é primitivável em $\mathbb{R}$.

continua

continuação

2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^x$.

As funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por e^x e $e^x + 7$ são exemplos de primitivas da função g, pois $(e^x)' = e^x$ e $(e^x + 7)' = e^x$.

Portanto, g é primitivável em $\mathbb{R}$.

3. Seja h a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{1}{x}$.

As funções, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $\ln(x)$ e $2 + \ln(x)$ são exemplos de primitivas da função h, pois $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ e $[2 + \ln(x)]' = \frac{1}{x}$.

Portanto, h é primitivável em $]0, +\infty[$.

1 Indica três primitivas da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^2$.

Propriedades fundamentais

Propriedade 1

Seja f uma função primitivável num intervalo I.

Se F e G são duas primitivas de f nesse intervalo, então $F - G$ é constante em I.

Demonstração

Tem-se, para qualquer $x \in I$:

$$(F - G)'(x) = (F' - G')(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Portanto, para qualquer $x \in I$, $(F - G)'(x) = 0$.

Logo, $F - G$ é constante em I.

RECORDA

Se uma função f é diferenciável num intervalo I e se $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$ então f é constante em I.

Propriedade 2

Seja f uma função primitivável num intervalo I.

Se F é uma primitiva de f nesse intervalo, então as primitivas de f, nesse intervalo, são as funções definidas por $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Tendo em conta a propriedade 1, se G é uma primitiva de f, então $G - F$ é constante em I, ou seja, existe um número real c tal que $\forall x \in I$, $G(x) - F(x) = c$, ou seja, $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + c$.

Provemos agora que, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, a função definida por $F(x) + c$ é uma primitiva de f. De facto, tem-se:

$$\forall x \in I, [F(x) + c]' = F'(x) + (c)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Em conclusão, podemos afirmar que as primitivas de f são as funções definidas por expressões da forma $F(x) + c$, com $c \in \mathbb{R}$.

PROFESSOR

Soluções

1. x^3; $x^3 + 1$; $x^3 + 2$ (por exemplo)

NOTA

* As expressões $\boldsymbol{Pf}$ e $\boldsymbol{\int f(x)\,dx}$ designam uma família de funções (a família das funções que são primitivas da função f). A razão de ser da notação $\int f(x)\,dx$ será compreendida mais à frente, quando for apresentada a noção de integral.

Notação

Dada uma função f primitivável num intervalo I, e sendo F uma primitiva de f em I, a expressão $F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$, pode ser representada por $\boldsymbol{Pf}$ ou por $\int f(x)\,dx$*.

Por exemplo: $\int 4x^3\,dx = x^4 + c,\ c\in\mathbb{R}$

Propriedade 3

Seja f uma função primitivável num intervalo I.

Seja $a\in I$ e seja $b\in\mathbb{R}$.

Então, existe uma única primitiva F, de f, em I, tal que $F(a)=b$.

Demonstração

Tendo em conta a propriedade 2, se G é uma primitiva de f em I, então as primitivas de f, nesse intervalo, são as funções F definidas por $F(x)=G(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$. Vem, então:

$$F(a)=b \Leftrightarrow G(a)+c=b \Leftrightarrow c=b-G(a)$$

Portanto, existe uma única primitiva F, de f, em I, tal que $F(a)=b$, que é a função definida por $F(x)=G(x)+b-G(a)$.

EXEMPLO

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x+5$.

Uma primitiva de f, em $\mathbb{R}$, é a função definida por x^2+5x, pois:

$$(x^2+5x)'=2x+5$$

Assim, qualquer primitiva F, de f, é definida por uma expressão da forma x^2+5x+c, com $c\in\mathbb{R}$.

Determinemos a primitiva F tal que $F(1)=9$. Tem-se:

$$F(1)=9 \Leftrightarrow 1^2+5\times 1+c=9 \Leftrightarrow 1+5+c=9 \Leftrightarrow c=3$$

Portanto, a primitiva F, de f, tal que $F(1)=9$ é a função definida por $F(x)=x^2+5x+3$.

2 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\cos x$.

Determina a primitiva F, da função f, tal que:

a) $F(\pi)=2$

b) $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Propriedade 4

Se f e g são funções primitiváveis num intervalo I, então $f+g$ também é uma função primitivável em I e a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f+g$.

Demonstração

Seja F uma primitiva de f e seja G uma primitiva de g.

Então, para qualquer $x\in I$, tem-se:

$$(F+G)'(x)=(F'+G')(x)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$

o que prova que $f+g$ é uma função primitivável em I, sendo $F+G$ uma primitiva de $f+g$.

PROFESSOR

Soluções

2. a) $F(x)=\operatorname{sen} x+2$

b) $F(x)=\operatorname{sen} x-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

Propriedade 5

Se f é uma função primitivável num intervalo I e k é uma constante real, então kf é primitivável em I e o produto de k por uma primitiva de f é uma primitiva de kf.

Demonstração

Seja F uma primitiva de f. Então, para qualquer $x \in I$, tem-se:

$$(kF)'(x) = kF'(x) = kf(x)$$

o que prova que kf é uma função primitivável em I, sendo kF uma primitiva de kf.

NOTA

As propriedades 4 e 5, designadas conjuntamente por «linearidade da primitivação», são normalmente apresentadas como a seguir se indica:

- $P(f+g) = Pf + Pg$ ou $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$
- $P(kf) = kPf$ ou $\int [kf(x)]\, dx = k \int f(x)\, dx$

EXEMPLO

Dado que $(e^x)' = e^x$ e $\operatorname{sen}' x = \cos x$, a aplicação das propriedades 4 e 5 e a notação $\int f(x)\, dx$ para uma primitiva de f, permite escrever:

$$\int (2e^x - 3\cos x)\, dx = 2\int e^x\, dx - 3\int \cos x\, dx = 2e^x - 3\operatorname{sen} x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Cálculo de primitivas

Se atendermos às «regras de derivação», obtemos «regras de primitivação».

Propriedade 1

Se k é uma constante real, então $\int k\, dx = kx + c,\ c \in \mathbb{R}$.

NOTA

Em vez de $\int k\, dx = kx + c,\ c \in \mathbb{R}$, pode escrever-se, com o mesmo significado, $P(k) = kx + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Como $(kx)' = k$, vem que, efetivamente, se tem $\int k\, dx = kx + c,\ c \in \mathbb{R}$.

EXEMPLOS

- $\int \frac{1}{3}\, dx = \frac{x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \pi\, dx = \pi x + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int 1\, dx = x + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int (-1)\, dx = -x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$P(k) = kx + c,\ c \in \mathbb{R}$

Em particular, $P(1) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Propriedade 2

Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, então $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$P(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Demonstração

Tem-se, para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha$$

pelo que se tem $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

3 Determina:

a) $\int (5x^3)\, dx$

b) $\int \frac{1}{x^6}\, dx$

c) $\int \sqrt[7]{x^5}\, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$

e) $\int \left(x^3\sqrt{x}\right) dx$

f) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\, dx$

g) $\int (10x^4 - 3x^2 + 6x - 5)\, dx$

h) $\int \left(\frac{7}{\sqrt[4]{x^3}} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x}\right) dx$

i) $\int [x(1+x^3)]\, dx$

j) $\int [(1+x)^2(3-2x)]\, dx$

k) $\int \frac{x^3+3x^2-4x+5}{x^5}\, dx$

Sempre que, nos exemplos e nos exercícios (propostos ou resolvidos), o domínio das funções envolvidas não seja um intervalo, subentende-se que estamos a calcular primitivas em intervalos do domínio.

EXEMPLOS

- $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int x^\pi\, dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \left(x^2\sqrt[3]{x}\right) dx = \int \left(x^2 x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \int x^{\frac{7}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{10} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \int x^{3-\frac{1}{5}} = \int x^{\frac{14}{5}}\, dx = \frac{x^{\frac{19}{5}}}{\frac{19}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{x^{19}}}{19} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Exercício resolvido

Determina:

a) $\int (8x^3 - 4x + 7)\, dx$

b) $\int [(3-2x)(1+x)^2]\, dx$

c) $\int [\sqrt{x}(2-x)]\, dx$

d) $\int \frac{x^4+2x-3}{x^3}\, dx$

Resolução

a) $\int (8x^3 - 4x + 7)\, dx = 8\int x^3\, dx - 4\int x\, dx + \int 7\, dx =$

$= 8\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} + 7x + c = 2x^4 - 2x^2 + 7x + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int [(3-2x)(1+x)^2]\, dx = \int [(3-2x)(1+2x+x^2)]\, dx =$

$= \int (3 + 6x + 3x^2 - 2x - 4x^2 - 2x^3)\, dx =$

$= \int (-2x^3 - x^2 + 4x + 3)\, dx = -2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 3x + c =$

$= -\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $\int [\sqrt{x}(2-x)]\, dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$

$= \frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + c,\ c \in \mathbb{R}$

continua ▶

PROFESSOR

Soluções

3. Sendo $c \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{5x^4}{4} + c$

b) $-\frac{1}{5x^5} + c$

c) $\frac{7\sqrt[7]{x^{12}}}{12} + c$

d) $\frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2} + c$

e) $\frac{2\sqrt{x^9}}{9} + c$

f) $3\sqrt[3]{x} + c$

g) $2x^5 - x^3 + 3x^2 - 5x + c$

h) $28\sqrt[4]{x} - \frac{3\sqrt{x^4}}{4} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + c$

i) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + c$

j) $3x + 2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + c$

k) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x^3} - \frac{5}{4x^4} + c$

continuação

d) $\int \frac{x^4+2x-3}{x^3}\,dx = \int (x+2x^{-2}-3x^{-3})\,dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{-1}}{-1} - 3\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Propriedade 3

Seja $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$ e sejam u e u' uma função e a sua derivada.

Então, $\int [u'(x)\,(u(x))^{\alpha}]\,dx = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$P(u'u^{\alpha}) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Demonstração

Tem-se, para $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$:

$$\left[\frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]' = \frac{1}{\alpha+1}\left[(u(x))^{\alpha+1}\right]' = \frac{1}{\alpha+1} \times u'(x) \times (\alpha+1) \times (u(x))^{\alpha+1-1} =$$

$$= u'(x)(u(x))^{\alpha}$$

Portanto, $\int [u'(x)\,(u(x))^{\alpha}]\,dx = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

EXEMPLOS

- $\int [(2x+1)(x^2+x-5)^3]\,dx \overset{*}{=} \int [(x^2+x-5)'(x^2+x-5)^3]\,dx = \frac{(x^2+x-5)^4}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int (\cos x\ \text{sen}^2 x)\,dx \overset{**}{=} \int [(\text{sen}\,x)'\ \text{sen}^2 x]\,dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx \overset{***}{=} \int \left[\frac{1}{x}\ln(x)\right]dx = \int [\ln'(x)\ \ln(x)]\,dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

NOTAS

* Tem em consideração que, se $u(x) = x^2+x-5$, então $2x+1 = u'(x)$.

** Tem em consideração que, se $u(x) = \text{sen}\,x$, então $\cos x = u'(x)$.

*** Tem em consideração que, se $u(x) = \ln(x)$, então $\frac{1}{x} = u'(x)$.

Exercício resolvido

Determina:

a) $\int (x^3\sqrt{x^4+1})\,dx$

b) $\int [5x^2(2x^3+5)^7]\,dx$

c) $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}\,dx$

d) $\int \frac{3e^x}{(e^x+1)^4}\,dx$

Resolução

a) $\int (x^3\sqrt{x^4+1})\,dx = \int \left[x^3(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx =$

$= \int \left[\frac{1}{4}\times 4x^3(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx = \frac{1}{4}\int \left[4x^3(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx =$

$= \frac{1}{4}\frac{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\sqrt{(x^4+1)^3}}{6} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int [5x^2(2x^3+5)^7]\,dx = \int \left[\frac{5}{6}\times 6x^2(2x^3+5)^7\right]dx =$

$= \frac{5}{6}\int [6x^2(2x^3+5)^7]\,dx = \frac{5}{6}\times\frac{(2x^3+5)^8}{8} + c = \frac{5(2x^3+5)^8}{48} + c,\ c \in \mathbb{R}$

continua

4 Determina:

a) $\int [2x(x^2+1)^{25}]\,dx$

b) $\int (\cos^3 x \operatorname{sen} x)\,dx$

c) $\int \left[(2x+7)\sqrt{x^2+7x+5}\right]\,dx$

d) $\int [x^2(4x^3+7)^9]\,dx$

e) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,dx$

f) $\int \left(e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}\right)\,dx$

g) $\int \left[(1+\cos x)^2 \operatorname{sen} x\right]\,dx$

continuação

c) $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}dx = \int \left[3x(4x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\right]\,dx =$

$= \int \left[\frac{3}{8}\times 8x(4x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\right]\,dx = \frac{3}{8}\int \left[8x(4x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\right]\,dx =$

$= \frac{3}{8}\times\frac{(4x^2+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{4x^2+5}}{4} + c,\ c\in\mathbb{R}$

d) $\int \frac{3e^x}{(e^x+1)^4}dx = \int \left[3e^x(e^x+1)^{-4}\right]\,dx = 3\int \left[e^x(e^x+1)^{-4}\right]\,dx =$

$= 3\frac{(e^x+1)^{-3}}{-3} + c = -(e^x+1)^{-3} + c = -\frac{1}{(e^x+1)^3} + c,\ c\in\mathbb{R}$

$P(e^x) = e^x + c,\ c\in\mathbb{R}$

$P(u'e^u) = e^u + c,\ c\in\mathbb{R}$

Propriedade 4

i) $\int e^x\,dx = e^x + c,\ c\in\mathbb{R}$

ii) $\int [u'(x)\,e^{u(x)}]\,dx = e^{u(x)} + c,\ c\in\mathbb{R}$ (u designa uma função)

Demonstração

i) Este resultado decorre de se ter $(e^x)' = e^x$.

ii) Este resultado é consequência de $(e^x)' = e^x$ e da regra de derivação de uma função composta: $[e^{u(x)}]' = u'(x)\,e^{u(x)}$

EXEMPLOS

- $\int (3x^2+e^x)\,dx = x^3 + e^x + c,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int (\cos x\, e^{\operatorname{sen} x})\,dx \overset{*}{=} \int \left[(\operatorname{sen} x)' e^{\operatorname{sen} x}\right]\,dx = e^{\operatorname{sen} x} + c,\ c\in\mathbb{R}$

NOTA

* Se $u(x) = \operatorname{sen} x$ então $\cos x = u'(x)$ e, portanto, $\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} = u'(x)\,e^{u(x)}$.

Exercício resolvido

Determina:

a) $\int e^{3x}\,dx$

b) $\int (x\,e^{x^2+1})\,dx$

c) $\int \frac{7}{e^x}\,dx$

d) $\int \sqrt{e^x}\,dx$

Resolução

a) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int (\underbrace{3}_{u'}\,\overbrace{e^{3x}}^{u})\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c,\ c\in\mathbb{R}$

b) $\int (x\,e^{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2}\int (\underbrace{2x}_{u'}\,\overbrace{e^{x^2+1}}^{u})\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + c,\ c\in\mathbb{R}$

c) $\int \frac{7}{e^x}\,dx = \int (7e^{-x})\,dx = -7\int \left[\underbrace{(-1)}_{u'}\,\overbrace{e^{-x}}^{u}\right]\,dx = -7e^{-x} + c,\ c\in\mathbb{R}$

d) $\int \sqrt{e^x}\,dx = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int \left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{u'}\,\overbrace{e^{\frac{x}{2}}}^{u}\right]\,dx = 2e^{\frac{x}{2}} + c = 2\sqrt{e^x} + c,\ c\in\mathbb{R}$

PROFESSOR

Soluções

4. Sendo $c\in\mathbb{R}$:

a) $\frac{(x^2+1)^{26}}{26} + c$

b) $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$

c) $\frac{2\sqrt{(x^2+7x+5)^3}}{3} + c$

d) $y = \frac{(4x^3+7)^{10}}{120} + c$

e) $\frac{1}{2(e^x+1)^2} + c$

f) $\frac{\sqrt{(3+e^{2x})^3}}{3} + c$

g) $\frac{(1+\cos x)^3}{3} + c$

Propriedade 5

i) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$

ii) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c,\ c \in \mathbb{R}$ (u designa uma função)

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Demonstração

i) Para $x > 0$, tem-se: $(\ln|x|)' = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

Para $x < 0$, tem-se: $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Portanto, para qualquer $x \neq 0$, tem-se $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ pelo que, efetivamente, se tem $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$.

ii) é consequência de se ter $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$ e da regra de derivação de uma função composta.

5 Determina:

a) $\int (x^3 e^{x^4})\,dx$

b) $\int (\sqrt{x} + 4e^x)\,dx$

c) $\int \left(\frac{1}{2x^5} - \sqrt{2}\,e^x\right)dx$

d) $\int \left[12\,e^x(e^x+4)^5 - 15\,e^{-5x}\right]dx$

e) $\int \left[\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x} + 24x(x^2+7)^3\right]dx$

f) $\int \left[\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - (3x+1)^2\right]dx$

EXEMPLOS

- $\int \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx = \ln|x| + x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx \overset{*}{=} \int \frac{(x^3+4x)'}{x^3+4x}\,dx = \ln|x^3+4x| + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx \overset{**}{=} \int \frac{(e^x+3)'}{e^x+3}\,dx = \ln|e^x+3| + c = \ln(e^x+3) + c,\ c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{\operatorname{sen}x}{2-\cos x}\,dx \overset{***}{=} \int \frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}\,dx = \ln|2-\cos x| + c = \ln(2-\cos x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

NOTAS

* Tem em consideração que $(x^3+4x)' = 3x^2+4$.

** Tem em consideração que $(e^x+3)' = e^x$.

*** Tem em consideração que $(2-\cos x)' = \operatorname{sen}x$.

Exercício resolvido

Determina:

a) $\int \frac{2-5x^3}{x}\,dx$

b) $\int \operatorname{tg}x\,dx$

c) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

d) $\int \frac{x^4+9x^2+3x}{x^2+9}\,dx$

Resolução

a) $\int \frac{2-5x^3}{x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{5x^3}{x}\right)dx = \int \left(\frac{2}{x} - 5x^2\right)dx =$

$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - 5\int x^2\,dx = 2\ln|x| - \frac{5x^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c,\ c \in \mathbb{R}$

continua

PROFESSOR

Soluções

5. Sendo $c \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{e^{x^4}}{4} + c$

b) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 4e^x + c$

c) $-\frac{1}{8x^4} - \sqrt{2}e^x + c$

d) $2(e^x+4)^6 + 3e^{-5x} + c$

e) $e^{\operatorname{tg}x} + 3(x^2+7)^4 + c$

f) $2e^{\sqrt{x}} - \frac{(3x+1)^3}{9} + c$

6 Determina:

a) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+e^x\right) dx$

b) $\int \frac{4+x^3}{x} dx$

c) $\int \frac{x}{x^2+7} dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{1+\cos(3x)} dx$

e) $\int \frac{x^2+3x-1}{x+2} dx$

continuação

c) $\int \frac{1}{x\ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \ln|\ln(x)| + c, c \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{x^4+9x^2+3x}{x^2+9} dx = \int \left(\frac{x^4+9x^2}{x^2+9}+\frac{3x}{x^2+9}\right) dx =$

$= \int \left[\frac{x^2(x^2+9)}{x^2+9}+\frac{3x}{x^2+9}\right] dx = \int \left(x^2+\frac{3}{2}\times\frac{2x}{x^2+9}\right) dx =$

$= \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\ln|x^2+9| + c = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\ln(x^2+9) + c, c \in \mathbb{R}$

$P(\operatorname{sen} x) = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$

$P(\cos x) = \operatorname{sen} x + c, c \in \mathbb{R}$

$P(u' \operatorname{sen} u) = -\cos u + c, c \in \mathbb{R}$

$P(u' \cos u) = \operatorname{sen} u + c, c \in \mathbb{R}$

Propriedade 6

i) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$

ii) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c, c \in \mathbb{R}$

iii) $\int \left[u'(x)\ \operatorname{sen}(u(x))\right] dx = -\cos(u(x)) + c, c \in \mathbb{R}$

iv) $\int \left[u'(x)\ \cos(u(x))\right] dx = \operatorname{sen}(u(x)) + c, c \in \mathbb{R}$

Demonstração

i) e **ii)** decorrem de $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ e $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

iii) e **iv)** são consequência das igualdades referidas em i) e ii) e da regra de derivação de uma função composta.

EXEMPLOS

- $\int (\cos x + \operatorname{sen} x)\, dx = \operatorname{sen} x - \cos x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int [\underbrace{2x}_{u'} \cos \underbrace{(x^2)}_{u}]\, dx = \operatorname{sen}(x^2) + c, c \in \mathbb{R}$

Exercícios resolvidos

1. Determina:

a) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) dx$

b) $\int \frac{1+x\cos x}{x} dx$

c) $\int \cos^3 x\, dx$

d) $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

Resolução

a) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) dx = -\frac{1}{2}\int \left[-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right] dx =$

$= -\frac{1}{2}\times\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right] + c = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right) + c, c \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{1+x\cos x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x}+\cos x\right) dx = \ln|x| + \operatorname{sen} x + c, c \in \mathbb{R}$

continua

PROFESSOR

Soluções

6. Sendo $c \in \mathbb{R}$:

a) $\ln|x| - \frac{1}{x} + e^x + c$

b) $4\ln|x| + \frac{x^3}{3} + c$

c) $\frac{\ln(x^2+7)}{2} + c$

d) $-\frac{\ln|1+\cos(3x)|}{3} + c$

e) $\frac{x^2}{2} + x - 3\ln|x+2| + c$

continuação

c) $\int \cos^3 x\, dx = \int (\cos x \cos^2 x)\, dx = \int [\cos x (1 - \text{sen}^2 x)]\, dx =$

$= \int (\cos x - \cos x\, \text{sen}^2 x)\, dx = \text{sen}\, x - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $\int \text{sen}^2 x\, dx \overset{*}{=} \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right] dx =$

$= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2\cos(2x)\right] dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos^4 x$.

Seja F a primitiva de f tal que $F(0) = 1$.

Determina F.

Resolução

Tem-se:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x \cos^2 x)\, dx = \int [\cos^2 x\, (1 - \text{sen}^2 x)]\, dx =$$

$$= \int (\cos^2 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \int \left(\cos^2 x - \frac{1}{4} \times 4\, \text{sen}^2 x \cos^2 x\right) dx =$$

$$= \int \left[\cos^2 x - \frac{1}{4} \times (2\, \text{sen}\, x \cos x)^2\right] dx =$$

$$= \int \left[\cos^2 x - \frac{1}{4} \times \text{sen}^2(2x)\right] dx \overset{**}{=}$$

$$= \int \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos(2 \times 2x)}{2}\right] dx =$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)\right] dx =$$

$$= \int \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times 2\cos(2x) + \frac{1}{32} \times 4\cos(4x)\right] dx =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + \frac{1}{32}\text{sen}(4x) + c =$$

$$= \frac{12x + 8\,\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x)}{32} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Tem-se, então:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{12 \times 0 + 8\,\text{sen}\,0 + \text{sen}\,0}{32} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Portanto, a função F pedida é definida por:

$$F(x) = \frac{12x + 8\,\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x)}{32} + 1 =$$

$$= \frac{12x + 8\,\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x) + 32}{32}$$

continua

NOTA

* $\text{sen}^2 x = \frac{2\,\text{sen}^2 x}{2} =$

$= \frac{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x}{2} =$

$= \frac{1 - \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2} =$

$= \frac{1 - (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2} =$

$= \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

7 Determina:

a) $\int \left(\frac{2}{x} + 3e^x + \cos x\right) dx$

b) $\int [e^x \cos(e^x + 2)]\, dx$

c) $\int \frac{x^2 + \cos[\ln(x)]}{x}\, dx$

d) $\int [(x + 1)\cos(x^2 + 2x)]\, dx$

e) $\int \frac{\sqrt{x} + x\,\text{sen}\, x}{x}\, dx$

f) $\int [x^2\, \text{sen}(4x^3 + 5)]\, dx$

g) $\int [e^{2x}(1 + \text{sen}(e^{2x}))]\, dx$

NOTA

** Tem-se $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

A demonstração desta igualdade é idêntica à demonstração de

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

que também aplicamos aqui e que provámos acima.

PROFESSOR

Soluções

7. Sendo $c \in \mathbb{R}$:

a) $2\ln|x| + 3e^x + \text{sen}\, x + c$

b) $\text{sen}(e^x + 2) + c$

c) $\frac{x^2}{2} + \text{sen}[\ln(x)] + c$

d) $\frac{\text{sen}(x^2 + 2x)}{2} + c$

e) $2\sqrt{x} - \cos x + c$

f) $\frac{\cos(4x^3 + 5)}{12} + c$

g) $\frac{e^{2x} - \cos(e^{2x})}{2} + c$

8 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$.
Seja F a primitiva de f tal que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.
Determina F.

20 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercício 8 (resolução passo a passo)

9 Seja f a função, de domínio $]0, 2[$, definida por:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 6}$$

Seja F a primitiva de f em $]0, 2[$ tal que $F(1) = 3$.
Determina F.
Sugestão: começa por fatorizar $x^2 - 5x + 6$.

PROFESSOR

Soluções

8. $F(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + 4$

9. $F(x) = 3 \ln \left|\frac{x-3}{x-2}\right| + 3 - 3 \ln 2$, em $]0, 2[$

continuação

3. **a)** Determina constantes reais não nulas, A e B, tais que:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

b) Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.

Determina a primitiva de f que se anula para $x = 2$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

a) Tem-se, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax + A + Bx = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A+B)x + A = 1$$

Para que esta igualdade seja válida para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, tem que ser $A + B = 0$ e $A = 1$, ou seja, $A = 1$ e $B = -1$.

b) Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2 + x}\, dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$
$$= \ln(x) - \ln(x+1) + c =$$
$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$F(2) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = -\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow c = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Portanto,

$$F(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{3x}{2x+2}\right)$$

4. Sejam u e v funções deriváveis num intervalo I.

a) Mostra que, se $P(uv')$ é uma primitiva de uv', então $uv - P(uv')$ é uma primitiva de $u'v$.

b) Determina $\int (x e^x)\, dx$.

c) Determina $\int \ln(x)\, dx$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

continua

continuação

Resolução

a) Mostrar que $uv - P(uv')$ é uma primitiva de $u'v$ equivale a mostrar que $[uv - P(uv')]' = u'v$.

Ora, $[uv - P(uv')]' = (uv)' - uv' = u'v + uv' - uv' = u'v$.

b) Tendo em consideração a alínea anterior, tem-se: $P(u'v) = uv - P(uv')$.

Utilizemos esta propriedade para primitivar a função definida por $x\,e^x$.

Temos, à partida, duas escolhas possíveis: considerar $u'(x) = x$ e $v(x) = e^x$ ou considerar $u'(x) = e^x$ e $v(x) = x$.

Experimentemos a primeira hipótese: $u'(x) = x$ e $v(x) = e^x$.

Tem-se $v'(x) = e^x$ e seja $u(x) = \frac{x^2}{2}$ uma primitiva de x.

Então, $\int (x\,e^x)\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \left(\frac{x^2}{2}e^x\right) dx$.

Ficámos, portanto, com uma expressão para primitivar mais complexa do que a original.

Experimentemos agora a segunda hipótese: $u'(x) = e^x$ e $v(x) = x$.

Tem-se $v'(x) = 1$ e seja $u(x) = e^x$.

Então, $\int \underbrace{(x\,e^x)}_{vu'}\,dx = \underbrace{e^x x}_{uv} - \int \underbrace{(1\,e^x)}_{v'u}\,dx = e^x x - e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

c) Tem-se $\int \ln(x)\,dx = \int [1 \times \ln(x)]\,dx$.

Façamos então $u'(x) = 1$ e $v(x) = \ln(x)$.

Tem-se $v'(x) = \frac{1}{x}$ e seja $u(x) = x$.

Portanto,

$$\int [1 \times \ln(x)]\,dx = x\ln(x) - \int \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx = x\ln(x) - \int 1\,dx =$$
$$= x\ln(x) - x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

5. Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando, em cada instante $t \geqslant 0$, submetido à aceleração $a(t) = \cos(5t)$, na unidade de aceleração correspondente às unidades de tempo e de espaço que foram escolhidas.

a) Mostra que, se a velocidade inicial (ou seja, no instante $t = 0$) de P for não nula, P atinge pontos arbitrariamente afastados da respetiva posição inicial.

b) Esta propriedade (alínea a)) mantém-se quando a velocidade inicial de P é nula?

c) Calcula a velocidade e a posição inicial de P, sabendo que, nos instantes $t = \frac{5\pi}{2}$ e $t = 5\pi$, o ponto P se encontra na origem do referencial.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

continua

10 Ao método de primitivação baseado na propriedade

$$P(u'v) = uv - P(uv')$$

dá-se o nome de **primitivação por partes**. Utiliza este método para determinar:

a) $\int (x\cos x)\,dx$

b) $\int [x\ln(x)]\,dx$

c) $\int (x^2 e^{-x})\,dx$

PROFESSOR

Soluções

10. Sendo $c \in \mathbb{R}$:

a) $x\,\text{sen}\,x + \cos x + c$

b) $\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

c) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$

11 Um ponto material P desloca-se na reta numérica (na qual 1 unidade corresponde a 1 metro), estando, em cada instante, submetido à aceleração de 3 metros por segundo quadrado (o tempo é medido em segundos).

Calcula a posição que o ponto P ocupa no instante $t=5$, sabendo que, no instante $t=0$, o ponto P se encontra na origem e que a sua velocidade, nesse instante, é de 4 metros por segundo, no sentido positivo.

PROFESSOR

Soluções

11. 57,5

Caderno de exercícios
Noção de primitiva

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 20 e 21 (págs. 98 e 99).

continuação

Resolução

a) Tem-se $a(t)=v'(t)$, onde $v(t)$ designa a velocidade de P no instante t. Portanto, a função v é uma primitiva da função a, ou seja:

$$v(t)=\int \cos(5t)\,dt=\frac{1}{5}\int [5\cos(5t)]\,dt=\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t)+k\ (k\in\mathbb{R})$$

Tem-se $v(0)=k$, pelo que, se a velocidade inicial de P for não nula, então $k\neq 0$.

Ora, $v(t)=p'(t)$, onde $p(t)$ designa a posição de P no instante t.

Portanto, a função p é uma primitiva da função v, ou seja:

$$p(t)=\int\left[\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t)+k\right]dt=-\frac{1}{25}\cos(5t)+kt+c\ (c\in\mathbb{R})$$

Sendo $k\neq 0$, tem-se que $p(t)$ pode tomar valores arbitrariamente grandes (em valor absoluto). Com efeito,

$$|p(t)|=\left|kt+c-\frac{1}{25}\cos(5t)\right|\geqslant |kt+c|-\left|-\frac{1}{25}\cos(5t)\right|\geqslant |kt+c|-\frac{1}{25}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|kt+c|-\frac{1}{25}\right)=+\infty$, vem $\lim\limits_{x\to+\infty}|p(t)|=+\infty$, pelo que P atinge pontos arbitrariamente afastados da respetiva posição inicial.

b) Esta propriedade não se mantém quando a velocidade inicial de P é nula, pois, como $v(0)=k$, tem-se $v(0)=0\Leftrightarrow k=0$.

Vem, então, $p(t)=-\frac{1}{25}\cos(5t)+c$, pelo que, para qualquer $t\geqslant 0$, se tem $-\frac{1}{25}+c\leqslant p(t)\leqslant\frac{1}{25}+c$.

c) Tem-se, como vimos, $p(t)=kt-\frac{1}{25}\cos(5t)+c$.

Como, nos instantes $t=\frac{5\pi}{2}$ e $t=5\pi$, o ponto P se encontra na origem do referencial, tem-se $p\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0$ e $p(5\pi)=0$.

- $p\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{5\pi}{2}k-\frac{1}{25}\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)+c=0\Leftrightarrow\frac{5\pi}{2}k+c=0$
- $p(5\pi)=0\Leftrightarrow 5\pi k-\frac{1}{25}\cos(25\pi)+c=0\Leftrightarrow 5\pi k+\frac{1}{25}+c=0$

$$\frac{5\pi}{2}k+c=0\wedge 5\pi k+\frac{1}{25}+c=0\Leftrightarrow\frac{5\pi}{2}k=-c\wedge -c=5\pi k+\frac{1}{25}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=-\frac{5\pi}{2}k\wedge\frac{5\pi}{2}k=5\pi k+\frac{1}{25}\Leftrightarrow c=-\frac{5\pi}{2}k\wedge\frac{5\pi}{2}k=-\frac{1}{25}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c=-\frac{5\pi}{2}k\wedge k=-\frac{2}{125\pi}\Leftrightarrow c=\frac{1}{25}\wedge k=-\frac{2}{125\pi}$$

Portanto, $p(t)=-\frac{2}{125\pi}t-\frac{1}{25}\cos(5t)+\frac{1}{25}$, pelo que $p(0)=0$ e $v(0)=-\frac{2}{125\pi}$.

Síntese

p. 66	Conceito de primitiva	Seja f uma função real definida num intervalo I. Diz-se que uma função F é uma **primitiva** de f em I se F é diferenciável em I e, para qualquer $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Diz-se que f é **primitivável** em I quando f admite uma primitiva nesse intervalo.
p. 67	Propriedade	Seja f uma função primitivável num intervalo I. Se F é uma primitiva de f nesse intervalo, então as primitivas de f, nesse intervalo, são as funções definidas por $F(x) + c, c \in \mathbb{R}$. A expressão $F(x) + c, c \in \mathbb{R}$, pode ser representada por $\boldsymbol{Pf}$ ou por $\int f(x)\, dx$.
pp. 68 e 69	Linearidade da primitivação	• $P(f+g) = Pf + Pg$ • $P(kf) = kPf, k \in \mathbb{R}$
pp. 69 a 74	Regras de primitivação	No que se segue, c designa um número real e u designa uma função. • $P(k) = kx + c, k \in \mathbb{R}$ • $P(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ • $P(u'u^\alpha) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ • $P(e^x) = e^x + c$ • $P(u'e^u) = e^u + c$ • $P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\lvert x\rvert + c$, em $]-\infty, 0[$ ou em $]0, +\infty[$ • $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln\lvert u\rvert + c$ • $P(\operatorname{sen} x) = -\cos x + c$ • $P(\cos x) = \operatorname{sen} x + c$ • $P(u' \operatorname{sen} u) = -\cos u + c$ • $P(u' \cos u) = \operatorname{sen} u + c$

2. Noção de integral

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Noção de integral»
- **Simulador**
  Geogebra: Integral
  Geogebra: Integral – Polinomial de 3.º grau
  Geogebra: A área

SERÁ QUE...? **Cálculo de uma área**

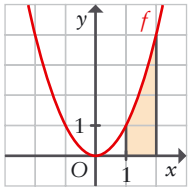
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$.

a) Representa graficamente a função f, em referencial o.n. xOy.

b) Considera a região do plano delimitada pelas retas de equações $x = 2$ e $x = 4$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função f. Representa essa região.

Será que consegues determinar a área da região que representaste?

Conceito de integral



Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Consideremos a região do plano delimitada pelas retas de equações $x = 1$ e $x = 2$, pelo eixo Ox e pelo gráfico desta função. Esta região está representada na figura ao lado.

À **área** desta região dá-se o nome de **integral de f entre 1 e 2**, e representa-se por $\int_1^2 f(x)\,dx$ ou por $\int_1^2 x^2\,dx$.

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 182
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 186
TI-Nspire CX ..... pág. 191

De um modo geral, tem-se:

Definição

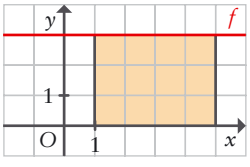
Dado um referencial cartesiano ortonormado e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, dá-se o nome de **integral de f entre a e b** à área*, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função.

O integral de f entre a e b representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$.

NOTA

* Em rigor, deve dizer-se **medida da área**, em vez de **área**. No entanto, para simplificar a linguagem, utilizaremos, ao longo de todo o capítulo, a designação **área** com o significado de **medida da área**.

EXEMPLOS



1. O integral $\int_1^5 3\,dx$ é a área da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = 1$ e $x = 5$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função definida por $f(x) = 3$, ou seja, é a área do retângulo representado na figura ao lado.

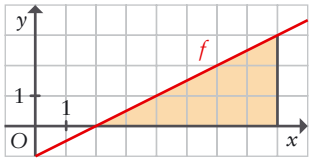
Portanto, $\int_1^5 3\,dx = 4 \times 3 = 12$.

continua

continuação

2. O integral $\int_2^8 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$ é a área da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = 2$ e $x = 8$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, ou seja, é a área do triângulo representado na figura ao lado.

Portanto, $\int_2^8 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx = \frac{6 \times 3}{2} = 9$.

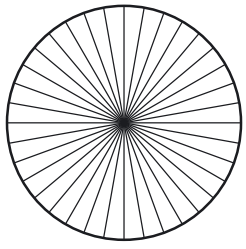


12 Calcula:

a) $\int_0^4 x\, dx$ **b)** $\int_1^6 2\, dx$

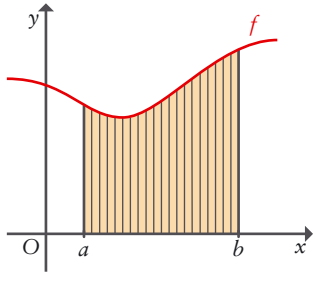
O problema complica-se se o gráfico da função f não for uma reta, ou seja, se a região cuja área se pretende determinar for delimitada superiormente pelo gráfico de uma função que não seja uma função afim. Nesse caso, como proceder?

Um dos primeiros matemáticos a debruçar-se sobre este problema foi Leibniz, matemático alemão do século XVII, que se inspirou no método que Arquimedes (matemático grego da Antiguidade) utilizou para determinar a área de um círculo. O método de Arquimedes consiste em dividir o círculo em setores muito pequenos (infininitesimais), de tal modo que se admita que cada um deles possa ser considerado um triângulo, e somar as áreas desses triângulos.



Consideremos então uma região delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico de uma função f.

Tal como ilustrado na figura ao lado, Leibniz concebeu a divisão desta região em regiões muito pequenas (infininitesimais), de tal forma que se admita que cada uma delas possa ser considerada um retângulo, sendo a área a determinar igual à soma das áreas desses retângulos.

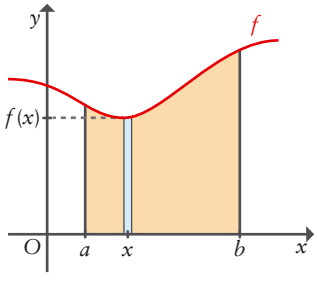


A notação $\int f(x)\, dx$ exprime precisamente a ideia de Leibniz.

De facto, sendo x um ponto do intervalo $[a, b]$, $f(x)\, dx$ representa o produto de $f(x)$ pelo comprimento dx do intervalo onde x se situa.

Leibniz considerava este intervalo infinitesimal, ou seja, de comprimento desprezável, e portanto considerava que o valor da função não variava nesse intervalo, tomando sempre o valor $f(x)$.

O símbolo $\int$ era a forma geralmente utilizada, no tempo de Leibniz, para a letra «s». Leibniz pretendeu assim abreviar a palavra latina «summa», ou seja, «soma». Assim, $\int f(x)\, dx$ foi a forma utilizada por Leibniz para representar a soma das áreas dos referidos retângulos.



O teorema fundamental do cálculo integral e a fórmula de Barrow

O nosso objetivo é encontrar um processo simples para efetuar o cálculo de $\int_a^b f(x)\, dx$, dados a, b e uma função f, contínua e não negativa.

Começamos por chamar a atenção para o seguinte: na expressão $\int_a^b f(x)\, dx$, podemos substituir a letra x por qualquer outra, isto é, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du = \ldots$$

Dizemos, por isso, que a variável x é muda.

PROFESSOR

Soluções

12. a) 8 **b)** 10

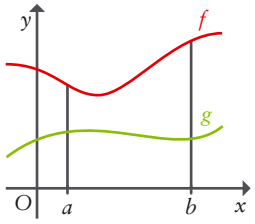
Vejamos agora uma propriedade bastante intuitiva, que será utilizada mais à frente.

Propriedade 1 (monotonia do integral)

Sejam f e g funções contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$.

Se, para todo o x pertencente a $[a, b]$, se tem $g(x) \leqslant f(x)$, então:

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$$



Esta propriedade está ilustrada na figura ao lado. A área da região delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico de g é inferior à área da região delimitada pelas mesmas retas e pelo gráfico de f.

A propriedade que vamos ver a seguir é a chave do nosso objetivo, sendo, por isso, conhecida como **teorema fundamental do cálculo integral**.

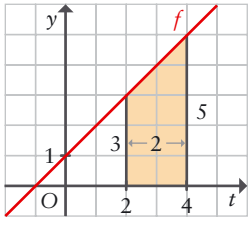
NOTA

* Vamos utilizar a letra t para designar a variável independente porque, mais à frente, vamos utilizar a letra x para designar um valor (genérico) desta variável.

Para melhor a compreendermos, comecemos por analisar um exemplo.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(t) = t + 1$.*

Pretendemos calcular $\int_2^4 f(t)\,dt$, isto é, a área da região delimitada pelas retas de equações $t = 2$ e $t = 4$, pelo eixo Ot e pelo gráfico da função f.



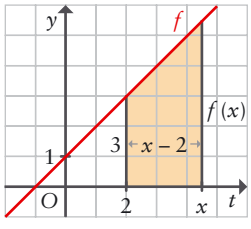
Esta região é o trapézio representado na figura ao lado.

A área deste trapézio é igual a $\frac{3+5}{2} \times 2 = 8$. Portanto, $\int_2^4 f(t)\,dt = 8$.

Seja agora $x \geqslant 2$. O que representará a expressão $\int_2^x f(t)\,dt$?

Naturalmente, designa a área da região delimitada pelo eixo Ot, pelas retas de equações $t = 2$ e $t = x$, e pelo gráfico da função f.

Como é evidente, esta área depende do valor de x, ou seja, é função de x. Designemo-la por $F(x)$. Tem-se, portanto, $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.



Determinemos $F(x)$. Tem-se:

$$F(x) = \frac{3 + f(x)}{2} \times (x - 2) = \frac{3 + (x + 1)}{2} \times (x - 2) =$$

$$= \frac{(x + 4)(x - 2)}{2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$$

Determinemos agora $F'(x)$. Tem-se:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right) = x + 1 \text{, ou seja, } F'(x) = x + 1$$

Mas $x + 1$ é a expressão que define $f(x)$!

Chegamos assim a este resultado espantoso: a função F, definida por $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, é uma primitiva da função f.

Será coincidência? A propriedade da página seguinte responde a esta questão.

Propriedade 2 (teorema fundamental do cálculo integral)

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

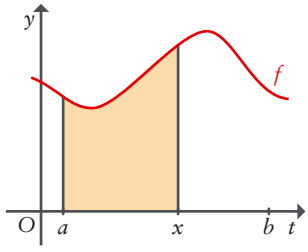
Seja F_a a função definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Então, F_a é a primitiva de f que se anula para $x = a$.

Demonstração

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, com $a < b$, e seja F_a a função definida em $[a, b]$ por:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Queremos provar que:

i) F_a é uma primitiva de f

ii) $F_a(a) = 0$

Provar **i)** é provar que $F'_a(x) = f(x)$, ou seja, é provar que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)^*$$

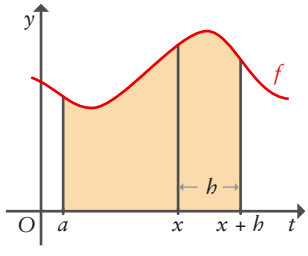
NOTA

* Recorda que, sendo F uma função, define-se $F'(x)$ como:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Seja $x \in [a, b[$ e seja $h > 0$ tal que $x + h \leqslant b$.

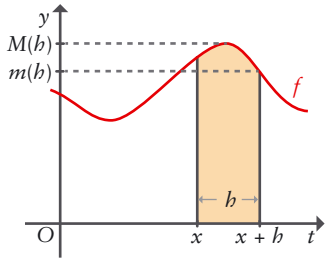
Tem-se que $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ou seja, $F_a(x)$ é a área da região entre o eixo Ot e o gráfico de f, de a até x.



De igual modo, tem-se que $F_a(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$, ou seja, $F_a(x+h)$ é a área da região entre o eixo Ot e o gráfico de f, de a até $x + h$.

Assim, $F_a(x+h) - F_a(x)$ é a área da região entre o eixo Ot e o gráfico de f, de x até $x + h$, ou seja:

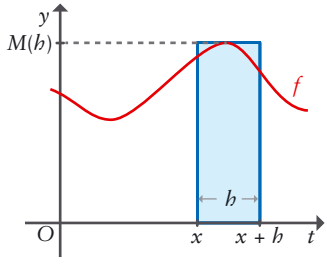
$$F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$



Pelo teorema de Weierstrass, sabemos que, no intervalo $[x, x+h]$, a função f atinge um máximo e um mínimo absolutos. Designemos esse mínimo por $m(h)$ e esse máximo por $M(h)$.

Tem-se, então, $\forall t \in [x, x+h]$, $m(h) \leqslant f(t) \leqslant M(h)$, pelo que, tendo em conta a propriedade 1 (monotonia do integral), se tem:

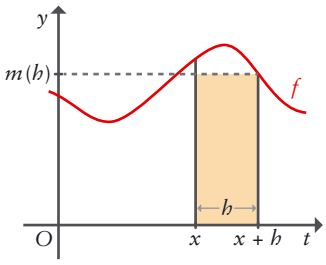
$$\int_x^{x+h} m(h)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \int_x^{x+h} M(h)\,dt$$



Note-se agora que $\int_x^{x+h} M(h)\,dt$ é a área de um retângulo cujas dimensões são h e $M(h)$, pelo que $\int_x^{x+h} M(h)\,dt = M(h) \times h$.

De igual modo, tem-se $\int_x^{x+h} m(h)\,dt = m(h) \times h$.

Portanto, $m(h) \times h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M(h) \times h$.



Ora,

$$m(h)\times h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M(h)\times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(h)\times h \leqslant F_a(x+h)-F_a(x) \leqslant M(h)\times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(h) \leqslant \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \leqslant M(h)$$

Atendendo a que a função f é contínua, pode-se provar que:

$$\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(x)$$

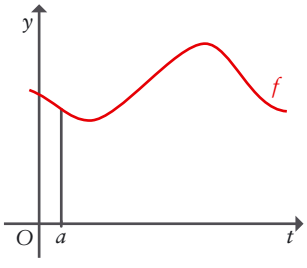
Logo, tendo em consideração o teorema das funções enquadradas, vem:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$$

De modo análogo, se prova que $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$.

Concluímos, assim, que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$, tal como se pretendia demonstrar.

ii) Provemos agora que $F_a(a)=0$.



Como $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, tem-se $F_a(a)=\int_a^a f(t)\,dt$.

Ora, $\int_a^a f(t)\,dt$ é a área da região delimitada pelo eixo Ot , pelo gráfico da função f e pelas retas de equações $t=a$ e $t=a$, ou seja, é a área de um segmento de reta, e um segmento de reta tem área igual a zero.

Portanto, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Exercícios resolvidos

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3x^2$.
Seja F a função, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.
Define a função F por meio de uma expressão algébrica.

Resolução

De acordo com o teorema fundamental do cálculo integral, F é a primitiva de f que se anula para $x=1$.
Como já sabemos, $\int f(x)\,dx$ designa a família de primitivas de f .*
Tem-se $\int f(x)\,dx = \int (3x^2)\,dx = x^3+c$, com $c\in\mathbb{R}$.
Portanto, tem-se $F(x)=x^3+c$ (para um certo valor de c).
Como $F(1)=0$, vem $1^3+c=0 \Leftrightarrow c=-1$.
Portanto, $F(x)=x^3-1$.

continua

NOTA

* Como acabámos de ver, o teorema fundamental do cálculo integral garante que a expressão $\int_a^x f(t)\,dt$ (com a fixo e x variável) define uma primitiva da função f . É este facto que justifica a utilização da notação $\int f(x)\,dx$ para designar a família de primitivas de f .

continuação

2. Determina a derivada de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $a(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt \quad (x > 0)$

b) $b(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}^2(t^3)\, dt$

Resolução

a) De acordo com o teorema fundamental do cálculo integral, tem-se:

$$a'(x) = \left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)' = e^{x^2}$$

b) De acordo com o teorema fundamental do cálculo integral e com a regra de derivação de uma função composta, tem-se:

$$b'(x) = \left[\int_0^{x^2} \operatorname{sen}^2(t^3)\, dt\right]' = \operatorname{sen}^2\left[(x^2)^3\right] \times (x^2)' = \operatorname{sen}^2(x^6) \times 2x$$

NOTA

De um modo geral, tem-se:

- $\left[\int_a^x f(t)\, dt\right]' = f(x)$
- $\left[\int_a^{u(x)} f(t)\, dt\right]' = f\left[u(x)\right] u'(x)$

Propriedade 3 (fórmula de Barrow)

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, com $a < b$, e seja F uma primitiva de f.

Então, $\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.

13 Determina a derivada de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $\int_1^x e^{t^2+1}\, dt \quad (x > 1)$

b) $\int_2^{3x+2} \ln(1 + t^3)\, dt \quad (x > 0)$

Demonstração

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$.

De acordo com o teorema fundamental do cálculo integral, a função F_a, definida em $[a, b]$, por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ é uma primitiva da função f.

Portanto, sendo F uma qualquer primitiva da função f, existe um número real c tal que $\forall x \in [a, b], F(x) = F_a(x) + c$.

Tem-se, então:

$$F(b) - F(a) = F_a(b) + c - \left[F_a(a) + c\right] = F_a(b) + c - F_a(a) - c =$$

$$= F_a(b) - F_a(a) = F_a(b) - 0 =$$

$$= F_a(b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

É de salientar que, sendo F uma primitiva de f, a expressão $F(b) - F(a)$ é habitualmente representada por $[F(x)]_a^b$.

Tem-se, portanto:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

sendo F uma qualquer primitiva de f.

PROFESSOR

Soluções

13. a) e^{x^2+1}

b) $3 \ln\left[1 + (3x+2)^3\right]$

14 Calcula:

a) $\int_1^3 (3x^2+4x+5)\,dx$

b) $\int_0^{\ln(3)} (2e^x)\,dx$

Exercícios resolvidos

1. Calcula o valor de cada um dos seguintes integrais:

a) $\int_1^4 (x^2+3x)\,dx$ **b)** $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

Resolução

a) $\int_1^4 (x^2+3x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^4 =$

$= \left(\frac{4^3}{3}+\frac{3\times 4^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3}+\frac{3\times 1^2}{2}\right) = \frac{87}{2}$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

2. Determina a área da região do plano definida pela condição:

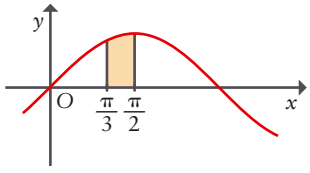
$$\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x$$

Resolução

Na figura ao lado está representada a região referida no enunciado.

A área desta região é:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$



15 Determina a área da região do plano definida pela condição:

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x^3+1$$

Propriedade 4 (linearidade do integral)

Sejam f e g funções contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$.

Então:

i) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

ii) $\int_a^b [kf(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k \in \mathbb{R})$

Demonstração

Vamos provar **i)**. A demonstração de **ii)** é análoga.

Seja F uma primitiva de f e seja G uma primitiva de g.

Então, $F+G$ é uma primitiva de $f+g$.

Vem:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) =$$

$$= F(b)+G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

PROFESSOR

Soluções

14. a) 52 **b)** 4

15. $\frac{19}{4}$

Exercício resolvido

Determina a área da região do plano delimitada pelas parábolas de equações:

$$y=\frac{x^2}{2}+1 \quad \text{e} \quad y=-\frac{x^2}{2}+2x+4$$

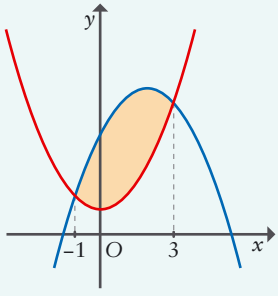
Resolução

Uma das parábolas tem vértice no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e tem a concavidade voltada para cima e a outra tem vértice no ponto de coordenadas $(2, 6)$ e tem a concavidade voltada para baixo.*

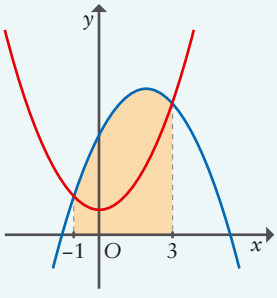
A observação da representação gráfica das duas parábolas, mostra que a parábola de equação $y=-\frac{x^2}{2}+2x+4$ está «acima» da parábola de equação $y=\frac{x^2}{2}+1$ entre os pontos de interseção das duas parábolas.

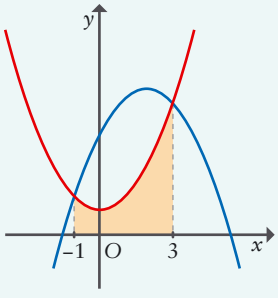
As abcissas dos pontos de interseção das duas parábolas são as soluções da equação $\frac{x^2}{2}+1=-\frac{x^2}{2}+2x+4$.**

A região do plano delimitada pelas duas parábolas é a região colorida na figura ao lado.



A sua área pode ser obtida pela diferença entre as áreas das regiões que se apresentam em baixo.





Portanto, a área pedida é:

$$\int_{-1}^{3}\left(-\frac{x^2}{2}+2x+4\right)dx-\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 182
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 187
TI-Nspire CX ..... pág. 192

NOTAS

* Recorda que as coordenadas do vértice da parábola de equação $y=ax^2+bx+c$ são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta=b^2-4ac$.

As coordenadas do vértice também podem ser obtidas localizando e determinando o extremo da função definida por $f(x)=ax^2+bx+c$.

** $\frac{x^2}{2}+1=-\frac{x^2}{2}+2x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-3)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm4}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$

16 Determina a área da região do plano delimitada pela parábola de equação $y=12-x^2$ e pela reta de equação $y=2x+9$.

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercício 16 (resolução passo a passo)

Relação de Chasles

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo I e sejam a e b dois pontos de I , tais que $a<b$.

Tem-se a seguinte convenção: $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.

Por exemplo, $\int_7^3 x^2\,dx=-\int_3^7 x^2\,dx$.

PROFESSOR

Soluções

16. $\frac{32}{3}$

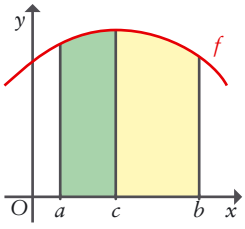
De acordo com esta convenção, tem-se a seguinte propriedade:

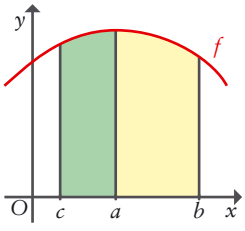
Propriedade (relação de Chasles)

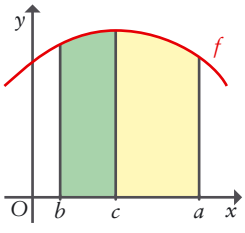
Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo I.

Então, dados quaisquer pontos a, b e c de I, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$







Demonstração

A igualdade é verdadeira no caso em que $a < c < b$, tal como se ilustra na figura ao lado ($\int_a^b f(x)\,dx$ é igual à soma da área da região colorida de verde com a área da região colorida de amarelo).

Mostremos agora a igualdade para os seguintes casos: $c < a < b$ e $b < c < a$ (para os restantes casos, as demonstrações são análogas).

i) $c < a < b$; neste caso, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx =$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ii) $b < c < a$; neste caso, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\left[\int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx\right] =$$
$$= -\int_b^c f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx =$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

17 Calcula:

a) $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$

b) $\int_{-1}^{5} |x-2|\,dx$

18 Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1+\cos x & \text{se } x < 0 \\ 1+e^x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Calcula $\int_{-\pi}^{1} f(x)\,dx$.

RECORDA

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 183
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 187
TI-Nspire CX ..... pág. 192

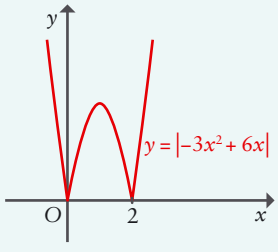
PROFESSOR

Soluções

17. a) 4 **b)** 9 **18.** $\pi + e$

Exercício resolvido

Calcula o valor de $\int_{-3}^{5} |-3x^2+6x|\,dx$.



Resolução

Tem-se:

$$-3x^2+6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Portanto, $-3x^2+6x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0, 2]$.

Assim,

$$\int_{-3}^{5} |-3x^2+6x|\,dx =$$
$$= \int_{-3}^{0} |-3x^2+6x|\,dx + \int_0^2 |-3x^2+6x|\,dx + \int_2^5 |-3x^2+6x|\,dx =$$
$$= \int_{-3}^{0} (3x^2-6x)\,dx + \int_0^2 (-3x^2+6x)\,dx + \int_2^5 (3x^2-6x)\,dx =$$
$$= \left[x^3-3x^2\right]_{-3}^{0} + \left[-x^3+3x^2\right]_0^2 + \left[x^3-3x^2\right]_2^5 = 54+4+54 = 112$$

Extensão do conceito de integral

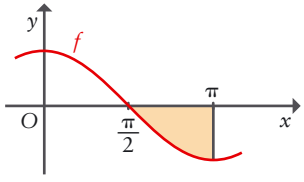
Até agora, o conceito de integral tem sido limitado a funções não negativas. Vamos estender este conceito a outo tipo de funções: primeiro, a funções não positivas e, depois, a funções onde poderão ocorrer mudanças de sinal (um número finito de vezes).

Definição (integral de uma função não positiva)

Dado um referencial cartesiano ortonormado e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, tal que $\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant 0$, dá-se o nome de **integral de f entre a e b** (e representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$) ao simétrico da área da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função.

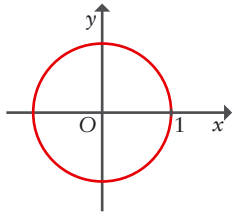
EXEMPLOS

1. Na figura ao lado está representada parte do gráfico da função f definida por $f(x) = \cos x$.



Tem-se que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$ é o simétrico da área da região colorida.

2. Na figura ao lado está representada a circunferência de centro na origem do referencial e raio 1.

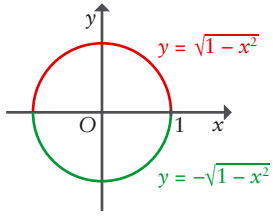


Como se sabe, esta circunferência pode ser definida pela equação:

$$x^2 + y^2 = 1$$

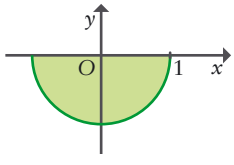
Ora,

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$



Do ponto de vista gráfico, esta equivalência corresponde à decomposição da circunferência em duas semicircunferências, sendo cada uma delas o gráfico de uma função.

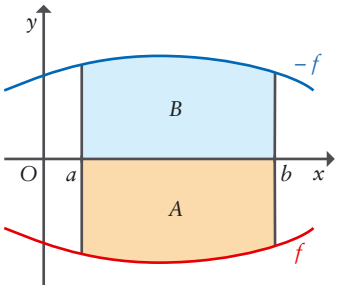
Portanto, o gráfico da função definida por $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ é uma semicircunferência.



Assim, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ é o simétrico da área do semicírculo representado na figura ao lado, pelo que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\frac{\pi \times 1^2}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Propriedade 1

Dada uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, tal que $\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant 0$, tem-se $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b [-f(x)]\,dx$.



A justificação desta propriedade está ilustrada na figura ao lado.

De facto, as regiões A e B são geometricamente iguais, uma vez que uma resulta da outra por meio de uma reflexão axial de eixo Ox.

Portanto, as regiões A e B têm a mesma área.

Vem, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{área da região } A = -\text{área da região } B = -\int_a^b [-f(x)]\,dx$$

19 Tendo em conta a propriedade 1 desta página, calcula $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$.

Definição (integral de uma função onde pode ocorrer um número finito de mudanças de sinal)

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Admitamos que existe uma sequência de números reais $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$ com $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k < c_{k+1} = b$, tal que, em cada intervalo $[c_j, c_{j+1}]$, a função f não muda de sinal.

Define-se então $\int_a^b f(x)\,dx$* como a soma:

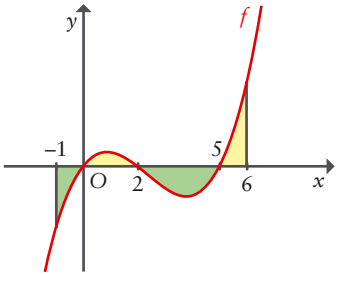
$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)\,dx$$

NOTA

* Pode-se provar que o valor do integral não depende da sequência $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$ considerada.

EXEMPLO

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{8}$ cujo gráfico está representado ao lado.



Tem-se:

$$\int_{-1}^{6} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{6} f(x)\,dx$$

ou seja,

$$\int_{-1}^{6} f(x)\,dx = \text{soma das áreas das regiões coloridas de amarelo} - \\ - \text{soma das áreas das regiões coloridas de verde}$$

Propriedade 2

A propriedade da monotonia do integral, o teorema fundamental do cálculo integral, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles e a linearidade do integral mantêm-se válidas para este tipo de funções.

Não iremos demonstrar esta propriedade.

PROFESSOR

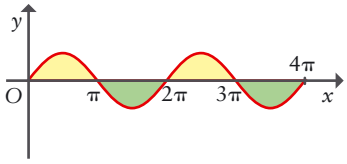
Soluções

19. -1

Exercícios resolvidos

1. Calcula o valor de $\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx$ e interpreta geometricamente o valor obtido.

Resolução



A observação do gráfico ao lado sugere que se considere o integral $\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx$ como a soma de quatro integrais, correspondendo, cada um, a um intervalo onde a função não muda de sinal:

$$\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

Associando os intervalos em que a função é não negativa e os intervalos em que a função é não positiva, escrevemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx &= 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - 2\int_{\pi}^{2\pi} (-\operatorname{sen} x) \, dx = \\ &= 2\,[-\cos x]_0^{\pi} - 2\,[\cos x]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= 2(-\cos\pi + \cos 0) - 2\,[\cos(2\pi) - \cos\pi] = \\ &= 2 \times (1+1) - 2[1-(-1)] = 2 \times 2 - 2 \times 2 = 0\end{aligned}$$

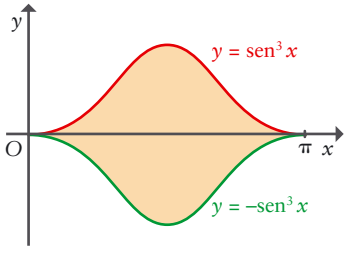
Interpretação geométrica: a soma das áreas das regiões onde a função é positiva (regiões coloridas de amarelo) é igual à soma das áreas das regiões onde a função é negativa (regiões coloridas de verde).

Portanto, $\int_0^{4\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$.

2. Determina a área da região do plano formada pelos pontos $P(x, y)$ tais que $0 \leqslant x \leqslant \pi \wedge -\operatorname{sen}^3 x \leqslant y \leqslant \operatorname{sen}^3 x$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução



Na figura ao lado está representada a região cuja área se pretende determinar. Como esta região é simétrica em relação ao eixo Ox , a área da região que se encontra acima deste eixo é igual à área da região que se encontra abaixo dele.

Portanto, a área a determinar é igual a $2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

Determinemos uma primitiva da função definida por $y = \operatorname{sen}^3 x$.

Tem-se:

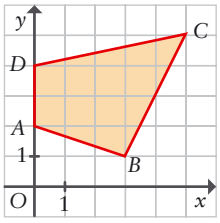
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int (\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \\ &= \int [\operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)] \, dx = \\ &= \int (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx + \int (-\operatorname{sen} x \cos^2 x) \, dx = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c \quad (c \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx = 2\left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = 2\left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

continua ▶

continuação



3. Na figura ao lado está representado um quadrilátero num referencial de tal forma que $A(0, 2)$, $B(3, 1)$, $C(5, 5)$ e $D(0, 4)$.
Determina a área do quadrilátero, utilizando integrais adequados.

in *Caderno de Apoio*, 12.° ano

Resolução

Comecemos por determinar a equação reduzida da reta DC.

Tem-se $\overrightarrow{DC} = C - D = (5, 5) - (0, 4) = (5, 1)$, pelo que o declive da reta DC é igual a $\frac{1}{5}$.

Portanto, a equação reduzida da reta DC é $y = \frac{1}{5}x + 4$.

Determinemos, agora, a equação reduzida da reta AB.

Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1) - (0, 2) = (3, -1)$, pelo que o declive da reta AB é igual a $-\frac{1}{3}$.

Portanto, a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Determinemos, finalmente, a equação reduzida da reta BC.

Tem-se $\overrightarrow{BC} = C - B = (5, 5) - (3, 1) = (2, 4)$, pelo que o declive da reta BC é igual a 2.

Portanto, a equação reduzida da reta BC é da forma $y = 2x + b$.

Como esta reta passa por $B(3, 1)$, vem $1 = 2 \times 3 + b$, ou seja, $b = -5$.

Portanto, a equação reduzida da reta BC é $y = 2x - 5$.

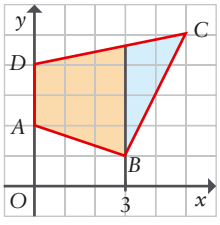
Assim, a área do quadrilátero $[ABCD]$ é igual a:

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{5}x + 4\right) dx - \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) dx + \int_3^5 \left(\frac{1}{5}x + 4\right) dx - \int_3^5 (2x - 5)\, dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{8}{15}x + 2\right) dx + \int_3^5 \left(-\frac{9}{5}x + 9\right) dx =$$

$$= \left[\frac{4x^2}{15} + 2x\right]_0^3 + \left[-\frac{9x^2}{10} + 9x\right]_3^5 = \frac{42}{5} + \frac{18}{5} = 12$$

NOTA



A que área deste quadrilátero também pode ser determinada utilizando métodos elementares (por exemplo, pela soma da área de um trapézio com a área de um triângulo).

4. Determina a área da região do plano delimitada pela parábola de equação $y = -x^2 - 2x + 3$ e pelas tangentes a essa parábola nos pontos de interseção com o eixo das abcissas.

in *Caderno de Apoio*, 12.° ano

Resolução

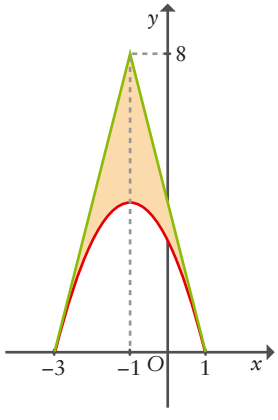
Comecemos por determinar as abcissas dos pontos de interseção da parábola com o eixo Ox.

Tem-se:

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-1) \times 3}}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Determinemos a equação reduzida da reta tangente à parábola no ponto de abcissa -3.

Tem-se $(-x^2 - 2x + 3)' = -2x - 2$, pelo que o declive da reta é $-2 \times (-3) - 2$, ou seja, é igual a 4.



continua

continuação

Tem-se, assim, que a equação reduzida da reta é da forma $y = 4x + b$. Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-3, 0)$, tem-se $0 = 4 \times (-3) + b$, de onde vem $b = 12$.

Portanto, a equação reduzida da reta tangente à parábola, no ponto de abcissa -3, é $y = 4x + 12$.

Determinemos, agora, a equação reduzida da reta tangente à parábola no ponto de abcissa 1.

O declive da reta é $-2 \times 1 - 2$, ou seja, é igual a -4.

Tem-se, assim, que a equação reduzida da reta é da forma $y = -4x + b$.

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(1, 0)$, tem-se $0 = -4 \times 1 + b$, de onde vem $b = 4$.

Portanto, a equação reduzida da reta tangente à parábola, no ponto de abcissa 1, é $y = -4x + 4$.

Tem-se $\begin{cases} y = 4x + 12 \\ y = -4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 8 \end{cases}$ pelo que as retas intersetam-se no ponto de coordenadas $(-1, 8)$.

A área do triângulo de vértices $(-3, 0)$, $(-1, 8)$ e $(1, 0)$ é igual a $\frac{4 \times 8}{2} = 16$.

A área da região delimitada pela parábola e pelo eixo Ox é igual a:

$$\int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}$$

Portanto, a área pedida é $16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}$.

5. Mostra que a primitiva nula em 0 de uma função par definida em 0 é uma função ímpar.

in *Caderno de Apoio*, 12.° ano

Resolução

Seja f uma função par de domínio $\mathbb{R}$.

De acordo com o teorema fundamental do cálculo integral, a primitiva nula em 0 da função f é a função F definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

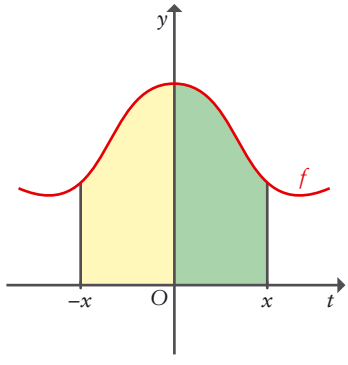
Tem-se, para qualquer x real:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\, dt = -\int_{-x}^{0} f(t)\, dt$$

Como a função f é par, o seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas, pelo que, para qualquer x real, se tem:

$$\int_{-x}^{0} f(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$$

(ilustra-se esta igualdade na figura ao lado, para uma função f positiva e para $x > 0$).



A área colorida de verde é igual à área colorida de amarelo.

continua

continuação

Portanto,

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt=-\int_{-x}^{0} f(t)\,dt=-\int_0^{x} f(t)\,dt=-F(x)$$

Como, para qualquer x real, $F(-x)=-F(x)$, concluímos que F é uma função ímpar.

Outro processo:

Seja F a primitiva nula em 0 de uma função f par, definida em $\mathbb{R}$. Tem-se, para qualquer x real:

$$[F(x)+F(-x)]'=f(x)+(-x)'f(-x)=f(x)-f(-x)=f(x)-f(x)=0$$

Portanto, existe um número real c tal que $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+F(-x)=c$.

Para $x=0$, vem:

$$F(0)+F(-0)=F(0)+F(0)=0+0=0$$

Portanto, $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+F(-x)=0$, pelo que:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(-x)=-F(x)$$

Concluímos, assim, que F é uma função ímpar.

6. Determina a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $\int_{2x}^{0} \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{t}\right)\,dt$

b) $\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt \quad \left(x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$

Adaptado de *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

a) Tem-se:

$$\left[\int_{2x}^{0} \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{t}\right)\,dt\right]'=\left[-\int_0^{2x} \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{t}\right)\,dt\right]'=-\operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{2x}\right)(2x)'=-2\operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{2x}\right)$$

b) Tem-se:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right)'&=\left(\int_{\operatorname{sen} x}^{0} \sqrt{1-t^2}\,dt+\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right)'=\\&=\left(-\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1-t^2}\,dt+\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right)'=\\&=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\,(\operatorname{sen} x)'+\sqrt{1-\cos^2 x}\,(\cos x)'=\\&=-\sqrt{\cos^2 x}\,\cos x+\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}\,(-\operatorname{sen} x)\overset{*}{=}\\&=-|\cos x|\cos x-|\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x\overset{**}{=}\\&=-(-\cos x)\cos x-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x=\\&=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos(2x)\end{aligned}$$

Caderno de exercícios
Noção de integral

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 22 a 31 (págs. 99 a 101).

NOTAS

* Recorda que $\sqrt{a^2}=|a|$.

** Como $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, tem-se $\cos x<0$ e $\operatorname{sen} x>0$, pelo que:

$|\cos x|=-\cos x$ e $|\operatorname{sen} x|=\operatorname{sen} x$

Síntese

p. 80	Conceito de integral	Dado um referencial cartesiano ortonormado e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, dá-se o nome de **integral de f entre a e b** à medida da área, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função. O integral de f entre a e b representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$.
p. 82	Monotonia do integral	Sejam f e g funções contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$. Se, para todo o x pertencente a $[a, b]$, se tem $g(x) \leqslant f(x)$, então: $\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$
p. 83	Teorema fundamental do cálculo integral	Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$, com $a < b$. Seja F_a a função definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Então, F_a é a primitiva de f que se anula para $x = a$.
p. 85	Fórmula de Barrow	$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, sendo F uma primitiva de f.
p. 86	Linearidade do integral	• $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ • $\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx \quad (k \in \mathbb{R})$
p. 87	Convenção	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
p. 88	Relação de Chasles	Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo I. Então, dados quaisquer pontos a, b e c de I, tem-se: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
p. 89	Integral de uma função não positiva	Dado um referencial cartesiano e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$, tal que $\forall x \in [a, b], f(x) \leqslant 0$, dá-se o nome de **integral de f entre a e b** ao simétrico da área da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, pelo eixo Ox e pelo gráfico da função.
p. 90	Integral de uma função onde pode ocorrer um número finito de mudanças de sinal	Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Admitamos que existe uma sequência de números reais $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k < c_{k+1} = b$ tal que, em cada intervalo $[c_j, c_{j+1}]$, a função f não muda de sinal. Define-se então $\int_a^b f(x)\,dx$ como a soma: $\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^b f(x)\,dx$ Tem-se que a propriedade da monotonia do integral, o teorema fundamental do cálculo integral, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles e a linearidade do integral mantêm-se válidas para este tipo de funções.

Teste 2

5+5

Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Qual das expressões seguintes define uma primitiva da função definida, em $\mathbb{R}$, por $y=(x+1)^2 e^x$?

(A) $(x^2+1)e^x$

(B) $\frac{(x+1)^3}{3}e^x$

(C) $(x^2+x)e^x$

(D) $\frac{x^3+1}{3}e^x$

2. Em qual das opções seguintes podem estar definidas duas primitivas da mesma função, em $\mathbb{R}^+$?

(A) $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\operatorname{sen}(x+1)$

(B) $y=\ln(x)$ e $y=\ln(x+1)$

(C) $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\operatorname{sen}(2x)$

(D) $y=\ln(x)$ e $y=\ln(2x)$

3. Qual das expressões seguintes dá a área da região delimitada pelas parábolas definidas por $y=-x^2+3x+8$ e $y=x^2-x+2$?

(A) $\int_{-1}^{3}(2x^2-4x-6)\,dx$

(B) $\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx$

(C) $\int_{-3}^{1}(2x^2-4x-6)\,dx$

(D) $\int_{-3}^{1}(-2x^2+4x+6)\,dx$

4. Uma sala tem 2,5 metros de altura. Uma corda elástica está presa por uma das suas extremidades ao teto dessa sala e tem uma esfera de plástico presa à outra extremidade. A esfera é puxada e, em seguida, é largada, ficando em movimento vertical, para cima e para baixo. Admite que, t segundos após um certo instante inicial, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao chão da sala é dada por $d(t)=116+24\cos(2\pi t)$, $t\in[0,+\infty[$.

Ao longo do seu movimento, para cima e para baixo, qual é a distância mínima do centro da esfera ao teto da sala?

(A) 0,9 m

(B) 1,1 m

(C) 1,3 m

(D) 1,5 m

5. Lançam-se dois dados equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair um número superior a 4 em apenas um dos dados?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{7}{18}$

(C) $\frac{4}{9}$

(D) $\frac{1}{2}$

PROFESSOR

Soluções

1. (A)
2. (D)
3. (B)
4. (B)
5. (C)

Ajuda

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Determina:

a) $\int \left[e^{1+\text{sen}(2x)}(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\right] dx$

b) $\int \frac{(1+2x)^3}{x} dx$, no intervalo $]0, +\infty[$

2. Um praticante de parapente paira sobre o mar. Quando se encontra 80 metros acima do mar, dispara um projétil verticalmente, de baixo para cima, com uma velocidade de 30 m/s. O projétil sobe, atinge uma altura máxima e depois cai verticalmente sobre o mar. Naturalmente, o projétil está permanentemente sujeito à aceleração da gravidade (aproximadamente 10 m/s²). Admite que, relativamente ao movimento do projétil, a resistência do ar é desprezável.

Ao fim de quanto tempo, depois de ter sido disparado, é que o projétil atinge o mar?

3. Determina a área da região do plano xOy definida pela condição:

$$x \geqslant 0 \wedge x^3 \leqslant y \leqslant 2x - x^2$$

4. Seja F a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_3^x \sqrt{t^2+16}\, dt$.
Calcula $F(3) + F'(3) + F''(3)$.

5. As substâncias radioativas vão-se desintegrando e perdendo massa, ao longo do tempo. A massa $m(t)$ de uma substância radioativa, num certo instante t, é dada por uma expressão do tipo $m(t) = m_0 e^{kt}$, em que m_0 é a massa da substância no instante inicial e k é uma constante que depende da substância e das unidades usadas para medir tempo e massa (o tempo e a massa são, naturalmente, medidos em unidades adequadas).

Chama-se semivida de uma substância radioativa ao tempo que a massa dessa substância demora a reduzir-se a metade da massa inicial.

O urânio-235 é uma substância radioativa que tem uma semivida de 270 mil anos.

a) Determina a massa de urânio-235 que permanece numa amostra de 1 grama, após 100 mil anos. Apresenta a resposta em miligramas, arredondada às unidades. Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, seis casas decimais.

b) Quanto tempo demora uma amostra de 1 grama de urânio-235 a decompor-se, até ficar com 100 miligramas de massa? Apresenta a resposta em milhares de anos, arredondada às unidades.

PROFESSOR

Soluções

1. a) $\frac{1}{2}e^{1+\text{sen}(2x)} + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $\ln|x| + 6x + 6x^2 + \frac{8x^3}{3} + c,$ $c \in \mathbb{R}$

2. 8 segundos

3. $\frac{5}{12}$

4. $\frac{28}{5}$

5. a) 774 mg

b) 897 mil anos

Resolução

Exercícios propostos

20 Determina as seguintes primitivas, num intervalo adequado.

a) $P(x^4-1)$

b) $P\dfrac{1}{\sqrt{9x^3}}$

c) $P(x^3+2)^2$

d) $P\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt[3]{x}}$

e) $P\sqrt{x+2}$

f) $P(\operatorname{sen} x\cos x)$

g) $P\operatorname{sen}(8x)$

h) $P\cos(5x)$

i) $P\dfrac{1}{3x-7}$

j) $P\left(x-\sqrt{x}\right)$

k) $P\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^2$

l) $P(x+1)^6$

m) $P(e^x+2x-3)$

n) $P\dfrac{x^2e^x-1}{x^2}$

o) $P(e^{x+3}+2)$

p) $P\dfrac{1}{1-x}$

q) $P\operatorname{tg}(5x-7)$

r) $P\dfrac{\cos x}{\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}}$

s) $P\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$

t) $P\left(x^3\sqrt{x^4+1}\right)$

u) $P\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

v) $P\left(e^{3x-4}\right)$

w) $P(xe^{x^2+1})$

x) $P\left(\sqrt{x}\,e^{2x\sqrt{x}}\right)$

y) $P\dfrac{\ln^2 x}{x}$

z) $P\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$

PROFESSOR

Soluções

20. Sendo $c\in\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x^5}{5}-x+c$

b) $-\dfrac{2}{3\sqrt{x}}+c$

c) $\dfrac{x^7}{7}+x^4+4x+c$

d) $\dfrac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}-\dfrac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+\dfrac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}+c$

e) $\dfrac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3}+c$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+c$

g) $-\dfrac{\cos(8x)}{8}+c$

h) $\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5}+c$

i) $\dfrac{\ln|3x-7|}{3}+c$

j) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$

k) $\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{1}{4x}+c$

l) $\dfrac{(x+1)^7}{7}+c$

m) e^x+x^2-3x+c

n) $e^x+\dfrac{1}{x}+c$

o) $e^{x+3}+2x+c$

p) $-\ln|1-x|+c$

q) $-\dfrac{\ln|\cos(5x-7)|}{5}+c$

r) $\sqrt{2\operatorname{sen} x+1}+c$

s) $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+c$

t) $\dfrac{\sqrt{(x^4+1)^3}}{6}+c$

u) $\dfrac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+c$

v) $\dfrac{e^{3x-4}}{3}+c$

w) $\dfrac{e^{x^2+1}}{2}+c$

x) $\dfrac{e^{2x\sqrt{x}}}{3}+c$

y) $\dfrac{\ln^3(x)}{3}+c$

z) $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+c$

21 Determina as seguintes primitivas, num intervalo adequado.

a) $P\left[\operatorname{sen}(2x)\, e^{\operatorname{sen}^2 x}\right]$

b) $P\left[e^{x^2+4x+3}(x+2)\right]$

c) $P\left[e^{5x}+x(x^2+1)^4\right]$

d) $P\dfrac{e^{2x}}{3+e^{2x}}$

e) $P\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

f) $P\left[\operatorname{sen}(\pi x)+\cos(2\pi x)\right]$

g) $P\left[x\cos(x^2+4)\right]$

h) $P\dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}$

i) $P\dfrac{x^2+3x-5}{x+1}$

22 Calcula os seguintes integrais.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 \left(x\sqrt{x^2+9}\right)dx$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left[x\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \cos^2(\pi x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} e^{2x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos}{3+\operatorname{sen}x}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{-e^{2x}+9}\,dx$

PROFESSOR

Soluções

21. Sendo $c\in\mathbb{R}$:

a) $e^{\operatorname{sen}^2 x}+c$

b) $\dfrac{e^{x^2+4x+3}}{2}+c$

c) $\dfrac{e^{5x}}{5}+\dfrac{(x^2+1)^5}{10}+c$

d) $\dfrac{\ln(3+e^{2x})}{2}+c$

e) $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+c$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi x)-2\cos(\pi x)}{2\pi}+c$

g) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+4)}{2}+c$

h) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+c$

i) $\dfrac{x^2}{2}+2x-7\ln|x+1|+c$

22. a) $\dfrac{5}{72}$

b) $\dfrac{98}{3}$

c) $\cos\dfrac{1}{2}-\cos 8$

d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{4}{3}$

f) 4

g) 1

h) $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

i) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

23 Determina as áreas das regiões delimitadas pelas linhas definidas por:

a) $y=0$ e $y=25-x^2$

b) $y=x^2$ e $y=4$

c) $y=x^2$ e $y=8-x^2$

d) $y=2x^2$ e $y=5x$

e) $y=x+1$ e $y=7-x^2$

f) $y=2x-x^3$, $y=x-x^2$, $x=0$ e $x=1$

g) $y=\frac{x}{2}$ e $y=\sqrt{x}$

h) $y=\cos x$, $y=x-\frac{\pi}{2}$ e $x=-\frac{\pi}{2}$

24 Seja f a função, de domínio $[0,+\infty[$, definida por $f(x)=\int_0^x \left[(t^2+1)\ln(2t+e)\right]\,dt$.
Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0.

20 AULA DIGITAL
- **Resolução**
  Exercício 24 (resolução passo a passo)

25 Seja f a função, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t-2}\,dt$.

a) Estuda a função f quanto à monotonia.

b) Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

26 Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

a) Mostra que f é ímpar.

b) Mostra que f é limitada, começando por justificar que, para $t\geqslant 1$, se tem $e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$.

c) Estuda a monotonia de f e o sentido das concavidades do gráfico de f.

d) Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

e) Mostra que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x)\leqslant x$.

f) Esboça o gráfico de f.

Adaptado de *Caderno de Apoio*, 12.º ano

27 Um ponto material desloca-se na reta numérica. Em cada instante t, a aceleração a que está sujeito é dada, em m/s^2, por $a(t)=A-6t^2$, com $A\in\mathbb{R}^+$. No instante $t=0$, o ponto está a 8 metros da origem no sentido positivo e a velocidade nesse instante é nula. Decorrido um segundo, o ponto desloca-se à velocidade de 30 m/s.

a) Determina os instantes em que a velocidade é nula.

b) Determina a distância percorrida pelo ponto quando decorreram 6 segundos.

PROFESSOR

Soluções

23. a) $\frac{500}{3}$

b) $\frac{32}{3}$

c) $\frac{64}{3}$

d) $\frac{125}{24}$

e) $\frac{125}{6}$

f) $\frac{7}{12}$

g) $\frac{4}{3}$

h) $\frac{\pi^2+4}{2}$

24. $y=x$

25. a) f é crescente em todo o seu domínio, isto é, em $]1,+\infty[$.

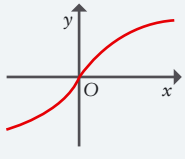
b) O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1,2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2,+\infty[$. O gráfico de f tem um ponto de inflexão, cuja abcissa é 2.

26. c) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,0]$ e tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[0,+\infty[$.

O ponto de abcissa 0 é ponto de inflexão do gráfico de f.

d) $y=x$

f)



27. a) $t=0$ e $t=4$

b) 328 m

28 Se $C(x)$ é o custo de produção, em euros, de x unidades de um certo produto, a função definida por $C'(x)$ designa-se, em economia e finanças, por custo marginal $(CMg(x))$.

Determina a variação do custo de produção quando o número de unidades produzidas aumenta de 1000 para 1100, sabendo que o custo marginal de produção é dado por $CMg(x) = \frac{3500}{x^2}$.

Apresenta o resultado em euros, arredondado às milésimas.

29 Um líquido é colocado a arrefecer numa sala em que a temperatura ambiente se mantém constante. Admite que a temperatura do líquido está a variar, no instante t, à taxa $-e^{-0,16t}$ (°C por minuto).

Determina a temperatura do líquido 2 minutos depois de ser colocado a arrefecer, sabendo que a temperatura inicial era 95 °C.

Apresenta o resultado arredondado às unidades.

30 Determina a área da região delimitada pelos gráficos das funções definidas por:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ e $g(x) = 1 - \operatorname{sen} x$, entre 0 e $\frac{11\pi}{6}$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ e $g(x) = \cos x + 1$, entre 0 e 2π.

31 Sejam f e g as funções definidas por:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \text{ e } g(x) = x^2 - 4x$$

a) Estuda a função f de modo a poderes representá-la graficamente.

b) Representa, no mesmo referencial, as funções f e g, no intervalo $[0, 3]$.

c) Calcula $\int_0^3 [f(x) - g(x)]\, dx$.

d) Justifica que a área da região delimitada pelos gráficos das funções f e g, entre 0 e 3, pode ser dada por:

$$\int_0^2 f(x)\, dx + \int_0^2 [-g(x)]\, dx + \int_2^3 [f(x) - g(x)]\, dx$$

e determina a área dessa região.

e) Compara os valores obtidos em c) e d).

PROFESSOR

Soluções

28. 0,318 €

29. 93 °C

30. a) $3\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{2}$

b) $4 + \pi$

31. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$;

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$;

f é crescente em

$\left]-\infty, \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\right]$ e em

$\left[\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

e é decrescente em

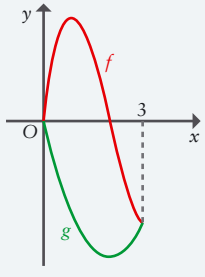
$\left[\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right]$;

$f''(x) = 6x - 12$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$;

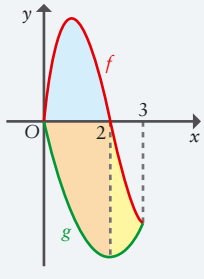
o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(2, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico.

b)



c) $\frac{45}{4}$

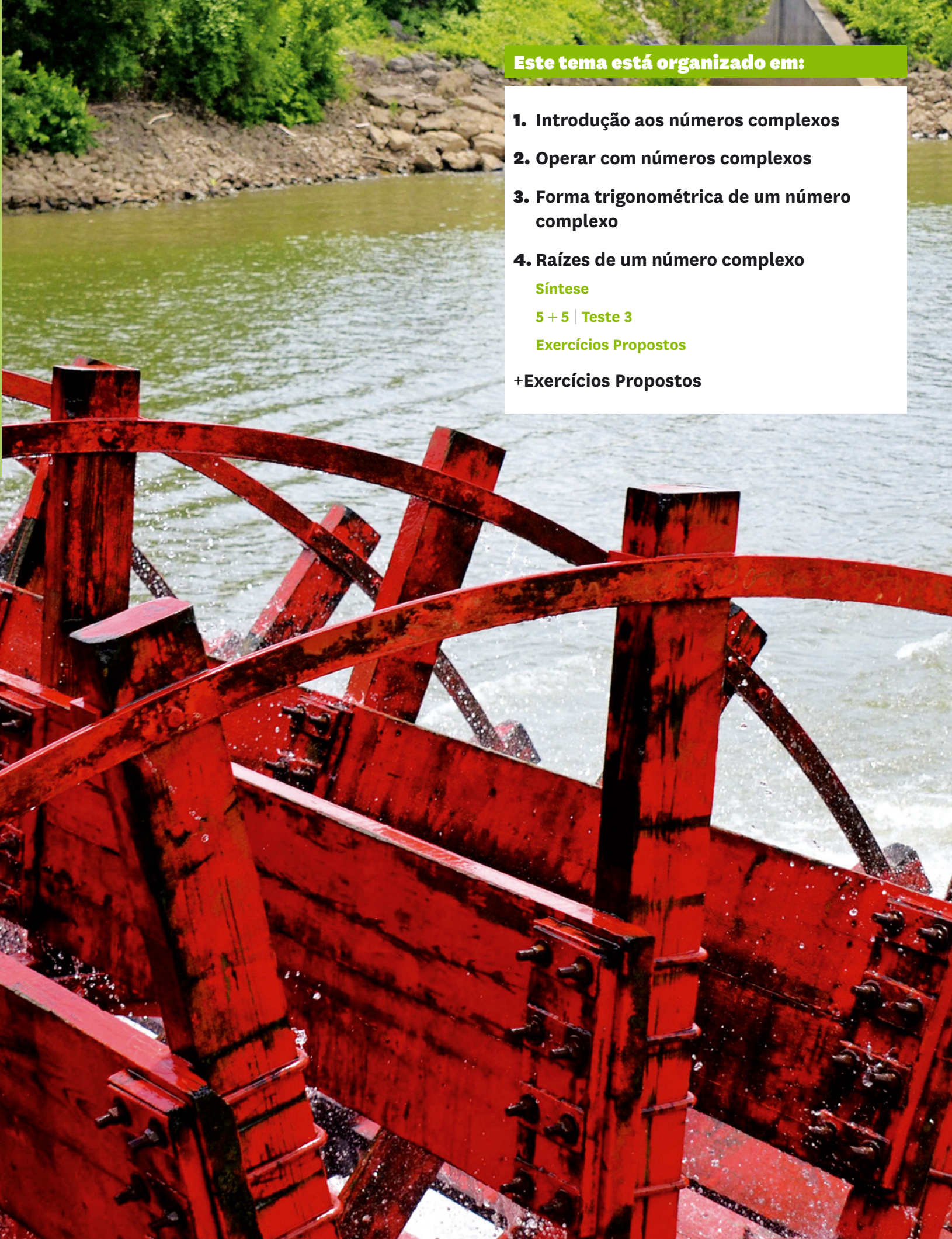
d) $\frac{45}{4}$



e) São iguais.

Tema 7

Números Complexos



Este tema está organizado em:

1. Introdução aos números complexos
2. Operar com números complexos
3. Forma trigonométrica de um número complexo
4. Raízes de um número complexo

   Síntese

   5 + 5 | Teste 3

   Exercícios Propostos

+Exercícios Propostos

1. Introdução aos números complexos

Girolamo Cardano (1501-1576)

Tartaglia (1499-1557)

Introdução histórica

Um dos grandes objetivos da Matemática é a resolução de problemas que surgem naturalmente, quer no dia a dia, quer na aplicação da Matemática a outras ciências, como a Física, a Química, a Biologia e a Economia. Uma vez que muitos problemas podem ser traduzidos por meio de equações, a resolução de equações mereceu, desde sempre, um lugar de destaque na história da Matemática.

Um tipo de equações que sempre atraiu a atenção dos matemáticos foi o das equações polinomiais. Em particular, as equações do primeiro e do segundo grau são trabalhadas desde as primeiras civilizações da história da humanidade. A fórmula resolvente para as equações do segundo grau já é conhecida desde há muito tempo.

Em meados do século XVI, em pleno Renascimento, alguns matemáticos italianos, tais como Cardano, del Ferro, Tartaglia e Bombelli, debruçaram-se sobre o problema de encontrar uma fórmula resolvente para as equações do terceiro grau e descobriram uma fórmula para as equações do terceiro grau do tipo $x^3+px+q=0$. Como, através de uma simples mudança de variável, se pode reduzir qualquer equação do terceiro grau a uma deste tipo, estava encontrado o caminho para a resolução de qualquer equação do terceiro grau.

A fórmula resolvente para uma equação do tipo $x^3+px+q=0$ é a seguinte* (conhecida como fórmula de Cardano):

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Vamos aplicar esta fórmula à equação $x^3-9x-28=0$ para obtermos uma solução.

Tem-se $p=-9$ e $q=-28$.

Portanto, $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\sqrt{(-14)^2+(-3)^3}=13$.

Vem, então, $x=\sqrt[3]{14+13}+\sqrt[3]{14-13}=3+1=4$.

É fácil confirmar que 4 é, efetivamente, solução da equação.

De facto, $4^3-9\times 4-28=64-36-28=0$.

Uma das equações que os matemáticos italianos tentaram resolver através da fórmula de Cardano foi a equação $x^3-15x-4=0$.

Tem-se $p=-15$ e $q=-4$.

NOTA

* Esta fórmula permite obter uma solução da equação $x^3+px+q=0$ se $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\geqslant 0$.

1 Utilizando a fórmula de Cardano, determina uma solução da equação $x^3+6x-2=0$. Apresenta a tua resposta na forma $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$, sendo a e b números naturais, e confirma que o resultado que obtiveste é, efetivamente, solução da equação.

PROFESSOR

Soluções

1. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$

Portanto,

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

2.0 AULA DIGITAL

Resolução
Exercícios de «Introdução aos números complexos»

Ora, $\sqrt{-121}$ é uma expressão sem significado.

Sabemos que, ao aplicar a fórmula resolvente de uma equação do segundo grau, o aparecimento de uma raiz quadrada de um número negativo permite concluir que a equação é impossível em $\mathbb{R}$.

Mas a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ não é impossível, pois, como facilmente se verifica, 4 é solução da equação.

Perante esta situação, os matemáticos italianos tinham duas opções: mandar para o lixo a fórmula que permitia, em muitas situações, obter uma solução, e que tinha sido tão difícil de alcançar, ou ousar trabalhar com expressões sem significado como se fossem números.

Optando por esta última alternativa, eles concluíram que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ é igual a $2+\sqrt{-1}$.

De facto, aplicando a fórmula do binómio de Newton, tem-se:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2^3+3\times2^2\times\sqrt{-1}+3\times2\times\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3=$$

$$=8+12\sqrt{-1}+6\times(-1)+\left(\sqrt{-1}\right)^2\times\sqrt{-1}=$$

$$=8+12\sqrt{-1}-6+(-1)\times\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}=$$

$$=2+\sqrt{11^2\times(-1)}=2+\sqrt{-121}$$

RECORDA
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

De igual modo se conclui que $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$.

Assim, a aplicação da fórmula resolvente conduz a:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

que é, efetivamente, solução da equação.

É portanto possível utilizar a fórmula resolvente (da equação do terceiro grau) para encontrar uma solução da equação $x^3-15x-4=0$, desde que se trabalhe com a expressão $\sqrt{-1}$ como se fosse um número.

Os matemáticos italianos chegaram, assim, a uma situação paradoxal: a fórmula resolvente, por eles descoberta, podia conduzir a uma expressão sem significado, mas isso não impedia que a sua aplicação permitisse obter uma solução.

Foi esta situação que motivou os matemáticos a darem significado à expressão $\sqrt{-1}$, a qual passou a ser designada por i (de imaginário).

Foi, assim, criado um novo número: o número i. Este novo número é tal que $i^2 = -1$. Note-se que i não é um número real, pois o quadrado de um número real nunca é negativo.

Calculadoras gráficas
Casio fx-CG 20 ..... pág. 183
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 187
TI-Nspire CX ..... pág. 192

A expressão $2+\sqrt{-121}$, que aparece na aplicação da fórmula resolvente da equação do terceiro grau apresentada na página anterior, pode ser escrita na forma $2+11i$, pois $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1} = 11i$.

Surgiram, assim, com toda a naturalidade, expressões da forma $a+bi$, com a e b reais, as quais passaram a ser encaradas como números, chamados **números complexos**.

Os matemáticos italianos da época do Renascimento admitiram, assim, a existência de um novo conjunto numérico, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com as seguintes caraterísticas:

- contém o conjunto dos números reais;
- estão definidas em $\mathbb{C}$ duas operações, adição e multiplicação, que são extensões das correspondentes operações em $\mathbb{R}$ e que conservam as propriedades associativa, comutativa e distributiva (da multiplicação relativamente à adição); 0 continua a ser o elemento neutro da adição e o elemento absorvente da multiplicação; 1 continua a ser o elemento neutro da multiplicação;
- existe em $\mathbb{C}$ um elemento i tal que $i \times i = i^2 = -1$.

Deste modo, vão existir, no novo conjunto numérico $\mathbb{C}$, para além dos números reais:

- os números da forma bi, com b real (resultado da multiplicação de b pelo novo número i);
  Exemplos: $7i$, $-4i$, $-\sqrt{5}i$
- os números da forma $a+bi$, com a e b reais (resultado da adição de a com bi);
  Exemplos: $2+3i$, $1-6i$, $3+\sqrt{2}i$

NOTA
Escreve-se $-4i$, $-\sqrt{5}i$ e $1-6i$ onde, em rigor, deveria escrever-se $(-4)i$, $(-\sqrt{5})i$ e $1+(-6)i$.

Note-se ainda que, de acordo com os pressupostos acima admitidos:

- um número real a pode ser escrito na forma $a+0i$;
- podemos escrever bi na forma $0+bi$; em particular, tem-se $i = 0+1i$.

Tem-se, para quaisquer números reais a, b, c e d:

- $a+bi = c+di \overset{*}{\Longleftrightarrow} a=c \wedge b=d$
- $(a+bi)+(c+di) = a+c+bi+di = a+c+(b+d)i$
- $(a+bi)\times(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac-bd+(ad+bc)i$

NOTA
* Se $a=c \wedge b=d$, é imediato que $a+bi=c+di$.
Tem-se também:
$a+bi=c+di \Longrightarrow a-c=(d-b)i \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (a-c)^2 = -(d-b)^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow a-c=0 \wedge d-b=0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow a=c \wedge b=d$

O corpo dos números complexos

Os números complexos como pares ordenados de números reais. Adição e multiplicação de números complexos

Vimos, na introdução histórica, como problemas relacionados com a aplicação da fórmula resolvente das equações do terceiro grau motivaram o aparecimento de um novo conjunto numérico, chamado conjunto dos números complexos.

Vamos agora construir esse conjunto de forma rigorosa. Para isso, comecemos por notar que à expressão $a+bi$ se pode associar o par ordenado (a, b), que é um elemento de $\mathbb{R}^2$. Recordemos que $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y), com x e y números reais.

Vamos definir em $\mathbb{R}^2$ duas operações, $+$ e $\times$, motivadas pelas seguintes igualdades, obtidas atrás:

- $(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$
- $(a+bi)\times(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

Seja $\mathbb{R}^2$ o conjunto dos pares ordenados (x, y), com x e y números reais. Define-se em $\mathbb{R}^2$ uma operação de adição, $+$, e uma operação de multiplicação, $\times$, da seguinte forma:

- $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$
- $(a, b)\times(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$

Ao conjunto $\mathbb{R}^2$, munido destas duas operações, dá-se o nome de **corpo dos números complexos** e representa-se por $\mathbb{C}$.

Estas duas operações têm as seguintes propriedades:

- são comutativas;
- são associativas;
- a multiplicação é distributiva relativamente à adição;
- $(0, 0)$ é elemento neutro da adição;
- $(1, 0)$ é elemento neutro da multiplicação.

Vamos provar que a operação $\times$ é comutativa.

Tem-se, para quaisquer (a, b) e (c, d) pertencentes a $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b)\times(c, d)=(ac-bd, ad+bc)=(ca-db, cb+da)=(c, d)\times(a, b)$$

Vamos agora provar que a operação $\times$ é associativa.

Tem-se, para quaisquer (a, b), (c, d), (e, f) pertencentes a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\left[(a, b)\times(c, d)\right]\times(e, f) &= (ac-bd, ad+bc)\times(e, f)= \\ &= \left((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e\right)= \\ &= \left(ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce\right)\end{aligned}$$

2 Prova que a operação $+$ é comutativa e associativa e que a operação $\times$ é distributiva, relativamente à operação $+$.

$$(a, b) \times [(c, d) \times (e, f)] = (a, b) \times (ce - df, cf + de) =$$
$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) =$$
$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) =$$
$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$

Portanto, $[(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) = (a, b) \times [(c, d) \times (e, f)]$.

Provemos que $(1, 0)$ é elemento neutro da operação $\times$.

Tem-se, para qualquer (a, b) pertencente a $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \times (1, 0) = (a \times 1 - b \times 0,\ a \times 0 + b \times 1) = (a, b)$$

3 Prova que $(0, 0)$ é elemento neutro da operação $+$ em $\mathbb{R}^2$.

E, dado que a operação $\times$ é comutativa, também se tem $(1, 0) \times (a, b) = (a, b)$.

Na introdução histórica, referimos que, de acordo com os pressupostos então admitidos, um número real a poderia ser escrito na forma $a + 0i$. Na construção que estamos a fazer, tal corresponde a identificar o número real a com o par ordenado $(a, 0)$.

Confirmemos que esta identificação é coerente com a forma como se definiu a adição e a multiplicação neste novo conjunto.

Tem-se, dados números reais a e b , quaisquer:

$a + b \longrightarrow (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \longrightarrow a + b$

$ab \longrightarrow (a, 0) \times (b, 0) = (ab - 0 \times 0, a \times 0 + 0 \times b) = (ab, 0) \longrightarrow ab$

Portanto, faz sentido identificar o número complexo $(x, 0)$ com o número real x . Escrevemos: $(x, 0) = x$.

Na introdução histórica também referimos que, de acordo com os pressupostos então admitidos, o novo número, i , poderia ser escrito na forma $0 + 1i$. Na construção que estamos a fazer, tal corresponde a identificar i com o par ordenado $(0, 1)$.

Confirmemos que, de acordo com a forma como se definiu a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, se tem $i^2 = -1$*.

De facto, $i^2 = i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -1$.

Ao número complexo i dá-se o nome de **unidade imaginária**.

Seja agora $z = (a, b)$ um número complexo qualquer.

Tem-se:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \times (0, 1) = a + bi$$

Tem-se também:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Portanto, dado um número complexo z , existe um único número real a e um único número real b , tais que $z = a + bi$. A a dá-se o nome de **parte real** de z e representa-se por $\mathbf{Re}(z)$ e a b dá-se o nome de **parte imaginária** de z e representa-se por $\mathbf{Im}(z)$.

NOTA

* Tal como em $\mathbb{R}$, define-se z^n , com $z \in \mathbb{C}$ e n natural, da seguinte forma:

- $z^1 = z$
- $z^n = \underbrace{z \times \ldots \times z}_{n \text{ fatores}}$, se $n > 1$

Prova-se que as regras das potências se mantêm válidas:

- $z^n \times z^m = z^{n+m}$
- $z^n \times w^n = (zw)^n$
- $\dfrac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$, $n > m$, $z \neq 0$
- $\dfrac{z^n}{w^n} = \left(\dfrac{z}{w}\right)^n$, $w \neq 0$
- $(z^n)^m = z^{nm}$

Uma vez que os números reais são os complexos da forma $(a, 0)$, tem-se que um número complexo é real se e só se $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Dá-se o nome de **imaginário** a um número complexo não real, ou seja, um número complexo é imaginário se e só se $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Por exemplo, $2 + 3i$ e $5i$ são exemplos de números imaginários.

Dá-se o nome de **imaginário puro** a um número imaginário tal que $\operatorname{Re}(z) = 0$. Portanto, um número imaginário puro é um número da forma bi, com $b \neq 0$.

Tem-se ainda que:

- $(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = a + c + (b + d)i$
- $(a + bi) \times (c + di) = (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = ac - bd + (ad + bc)i$
- o simétrico de $a + bi$ é $-(a + bi) = -a + (-b)i = -a - bi$
- $(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + \left(-c + (-d)i\right) = (a - c) + (b - d)i$

Nota que, tendo em conta as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação em $\mathbb{C}$ e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos também escrever:

- $(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di =$

  $= a + c + (b + d)\,i$

- $(a + bi) \times (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$

  $= ac + adi + bci + bd \times (-1) =$

  $= ac - bd + (ad + bc)\,i$

Concluímos, assim, que podemos adicionar e multiplicar números complexos como se fossem polinómios em i e ter em consideração que $i^2 = -1$.

Em resumo:

- i é a unidade imaginária, tendo-se $i^2 = -1$.
- Podemos representar o número complexo (a, b) por $a + bi$ *.
- A a dá-se o nome de **parte real** de z e representa-se por $\mathbf{Re}(z)$.
- A b dá-se o nome de **parte imaginária** de z e representa-se por $\mathbf{Im}(z)$.
- Tem-se:

$$\text{Números complexos} \begin{cases} \text{Números reais} \\ \text{Números imaginários} \begin{cases} \text{Puros} \\ \text{Não puros} \end{cases} \end{cases}$$

NOTA

* Quando representamos um número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que o estamos a representar na **forma algébrica**.

continua ▶

continuação

- Dado um número complexo $z = a + bi$, tem-se:
  - z é real $\Leftrightarrow z = a$
  - z é imaginário $\Leftrightarrow z = a + bi \ (b \neq 0)$
  - z é imaginário puro $\Leftrightarrow z = bi \ (b \neq 0)$

  ou seja,
  - z é real $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$
  - z é imaginário $\Leftrightarrow \text{Im}(z) \neq 0$
  - z é imaginário puro $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0$
- $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$
- Podemos adicionar e multiplicar números complexos como se fossem polinómios em i, tendo em consideração que $i^2 = -1$.
- Define-se z^n, com $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, da seguinte forma:

$$z^1 = z \text{ e, se } n > 1, \ z^n = \underbrace{z \times \ldots \times z}_{n \text{ fatores}}$$

- As regras das potências mantêm-se válidas em $\mathbb{C}$.

4 Indica:

a) $\text{Re}(-2 + 7i)$ **b)** $\text{Im}(-2 + 7i)$
c) $\text{Re}(3 + i)$ **d)** $\text{Im}(3 + i)$
e) $\text{Re}(-6)$ **f)** $\text{Im}(-6)$
g) $\text{Re}(5i)$ **h)** $\text{Im}(5i)$

5 De um certo número complexo z sabe-se que $\text{Re}(z) = -7$ e $\text{Im}(z) = 8$.

Escreve z na forma $a + bi$.

6 Dos números complexos a seguir apresentados, indica quais são os números reais, quais são os números imaginários e, de entre estes, quais são os imaginários puros.

$z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = 7i$
$z_3 = -12i$ $z_4 = -1 - 5i$
$z_5 = -6$ $z_6 = 17i$
$z_7 = -9 - 5i$ $z_8 = 13$

Calculadoras gráficas
Casio fx-CG 20 ..... pág. 183
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 188
TI-Nspire CX..... pág. 193

Exercícios resolvidos

1. Preenche a tabela:

z	$3 + 4i$	$2 - i$	$-5i$	-7
$\text{Re}(z)$				
$\text{Im}(z)$				

Resolução

z	$3 + 4i$	$2 - i$	$-5i$	-7
$\text{Re}(z)$	3	2	0	-7
$\text{Im}(z)$	4	-1	-5	0

2. Seja $z = 2x - 8 + (y + 2)i \ (x, y \in \mathbb{R})$.

Determina x e y, de modo que z seja:

a) real;

b) imaginário puro.

Resolução

a) z é real $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$

b) z é imaginário puro $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \wedge y \neq -2 \Leftrightarrow x = 4 \wedge y \neq -2$

continua

PROFESSOR

Soluções

4. a) -2 **b)** 7 **c)** 3 **d)** 1
e) -6 **f)** 0 **g)** 0 **h)** 5

5. $-7 + 8i$

6. Números reais: z_5 e z_8

Números imaginários: z_1, z_2, z_3, z_4, z_6 e z_7

Números imaginários puros: z_2, z_3 e z_6

continuação

3. Seja $z = 7 - 12i$ e $w = x - 2y + (3x + 5y)i$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Determina x e y de modo que $z = w$.

Resolução

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 5y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2y \\ 3(7 + 2y) + 5y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2y \\ 21 + 6y + 5y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2y \\ 11y = -33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

4. Determina:

a) i^3 **b)** i^4 **c)** i^{51}

Resolução

a) $i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$

b) $i^4 = i^3 \times i = (-i) \times i = -i^2 = -(-1) = 1$

c) $i^{51} = i^{4\times 12+3} = i^{4\times 12} \times i^3 = (i^4)^{12} \times (-i) = 1^{12} \times (-i) = -i$

5. Determina:

$$(1 + 2i)^3 + (4 + i)(3 - 5i)$$

Resolução

Atendendo às propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, a fórmula do binómio de Newton também é válida para números complexos. Assim:

$(1 + 2i)^3 + (4 + i)(3 - 5i) =$

$= 1^3 + 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 + (2i)^3 + 12 - 20i + 3i - 5i^2 =$

$= 1 + 6i + 3 \times 4i^2 + 8i^3 + 12 - 17i + 5 =$

$= 1 + 6i - 12 - 8i + 12 - 17i + 5 = 6 - 19i$

7 Seja $z = 2x + (3y - 5)i$ e seja $w = y + xi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Determina x e y de tal modo que $z = w$.

De um modo geral, tem-se:
$i^{4n+k} = i^k$, com $n, k \in \mathbb{N}$

8 Determina:

$$2i^{76} + 3i^{103} - i^{265}$$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 184
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 188
TI-Nspire CX ..... pág. 193

9 Determina:

$$(-1 + 4i)(5 - 2i) - (2 - 3i)^2$$

Representação de um número complexo num referencial ortonormado

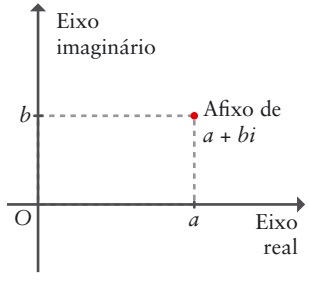
Uma vez que um número complexo é um par ordenado (a, b), faz sentido representá-lo num plano munido de um referencial ortonormado.

Dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e sendo a e b números reais, ao ponto M de coordenadas (a, b) dá-se o nome de **afixo** do número complexo $z = a + bi$.

Neste contexto, esse plano é designado por **plano complexo** ou **plano de Argand**.

Ao eixo das abcissas dá-se o nome de **eixo real**.

Ao eixo das ordenadas dá-se o nome de **eixo imaginário**.



PROFESSOR

Soluções

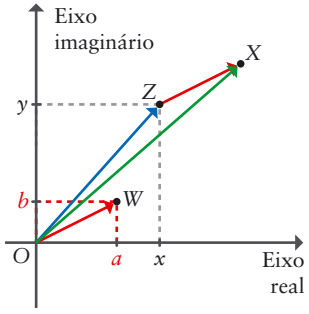
7. $x = 1$ e $y = 2$

8. $2 - 4i$

9. $8 + 34i$

NOTA

Frequentemente vamos cometer o abuso de usar a designação do número complexo para identificar o seu afixo, desde que desta simplificação não resulte ambiguidade.



Vejamos a que corresponde, do ponto de vista geométrico, a soma de dois números complexos.

Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$.

Tem-se, então: $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$, pelo que $z + w = (x + a, y + b)$.

Portanto:

Sendo Z o afixo de z e W o afixo de w, adicionar z com w corresponde a aplicar a Z a translação associada ao vetor $\overrightarrow{OW}$.

Sendo X o afixo de $z + w$ tem-se $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OW}$.

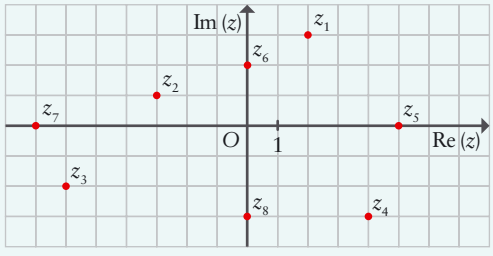
Exercícios resolvidos

1. Representa os seguintes números complexos no plano de Argand.

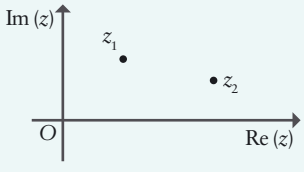
$z_1 = 2 + 3i$ $\quad z_2 = -3 + i$ $\quad z_3 = -6 - 2i$ $\quad z_4 = 4 - 3i$

$z_5 = 5$ $\quad z_6 = 2i$ $\quad z_7 = -7$ $\quad z_8 = -3i$

Resolução



2. Na figura estão representados, no plano de Argand, dois números complexos, z_1 e z_2.

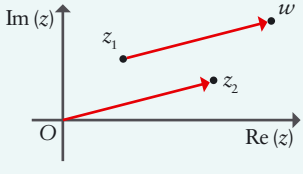


Seja $w = z_1 + z_2$.

Representa o número complexo w.

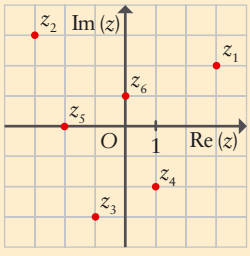
Resolução

O afixo de w é a imagem do afixo de z_1 pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OZ_2}$.



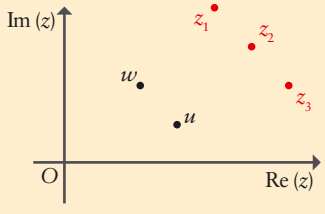
continua

10 Na figura estão representados, no plano de Argand, seis números complexos.



Representa estes seis números complexos na forma $a + bi$.

11 Na figura estão representados, no plano de Argand, cinco números complexos.



Um dos complexos z_1, z_2 ou z_3 é igual a $u + w$. Identifica-o.

PROFESSOR

Soluções

10. $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -3 + 3i$; $z_3 = -1 - 3i$; $z_4 = 1 - 2i$; $z_5 = -2$; $z_6 = i$.

11. z_2

continuação

3. Em cada uma das alíneas seguintes está definida uma condição em $\mathbb{C}$. Para cada condição, representa, no plano de Argand, o conjunto dos números complexos que a verificam.

a) $\text{Re}(z) = 2$

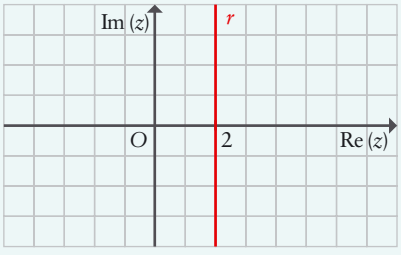
b) $\text{Im}(z) > -1$

Resolução

a) Os números complexos que verificam a condição $\text{Re}(z) = 2$ são os números complexos cuja parte real é igual a 2, ou seja, são os números complexos da forma $2 + yi$, com $y \in \mathbb{R}$.

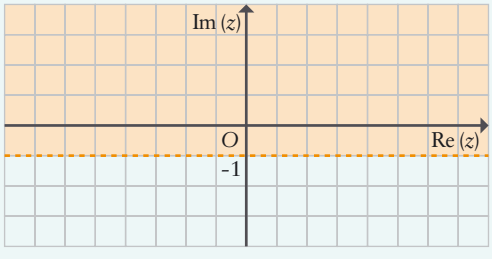
Assim, o conjunto dos números complexos que verificam a condição $\text{Re}(z) = 2$ é o conjunto dos números complexos da forma $(2, y)$, com $y \in \mathbb{R}$.

A representação geométrica deste conjunto de números complexos é a reta r representada na figura.



b) Os números complexos que verificam a condição $\text{Im}(z) > -1$ são os números complexos cuja parte imaginária é superior a -1.

Assim, o conjunto dos números complexos que verificam a condição $\text{Im}(z) > -1$ é o conjunto dos números complexos (x, y), em que x é um número real qualquer e y é um número real maior do que -1. A representação geométrica deste conjunto de números complexos é o semiplano aberto representado na figura.

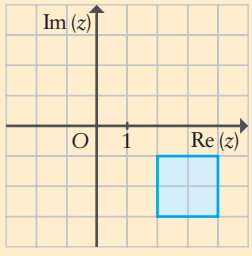


12 Em cada uma das alíneas seguintes está definida uma condição em $\mathbb{C}$. Para cada condição, representa, no plano de Argand, o conjunto dos números complexos que a verificam.

a) $\text{Im}(z) = 2$

b) $-2 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 4 \wedge$
$\wedge\ 1 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant 3$

13 Na figura está representado, no plano de Argand, um quadrado que é a imagem geométrica de um conjunto de números complexos. Escreve uma condição em $\mathbb{C}$ que defina esse conjunto.

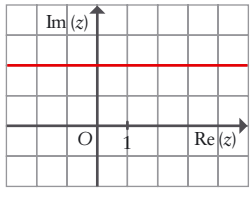


Caderno de exercícios
Introdução aos números complexos

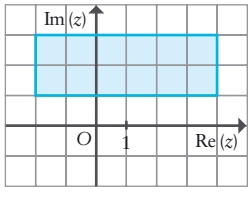
PROFESSOR

Soluções

12. a)



b)



13. $2 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 4 \wedge -3 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant -1$

2. Operar com números complexos

Conjugado de um número complexo

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Operar com números complexos»

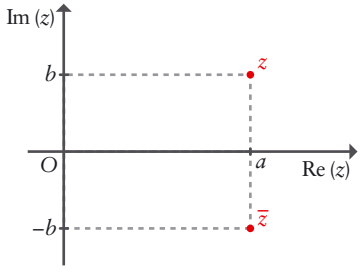
Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 184
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 188
TI-Nspire CX..... pág. 193

Seja $z = a + bi$ um número complexo. Dá-se o nome de **conjugado de z** ao número complexo $a - bi$. O conjugado de z designa-se por $\overline{z}$.

EXEMPLOS

- $\overline{2+3i} = 2 - 3i$
- $\overline{4-5i} = 4 + 5i$
- $\overline{3i} = -3i$
- $\overline{-\frac{1}{2}i} = \frac{1}{2}i$
- $\overline{3} = 3$
- $\overline{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$



Vejamos a que corresponde, do ponto de vista geométrico, a passagem de um número complexo ao seu conjugado.

Seja $z = a + bi = (a, b)$.

Tem-se $\overline{z} = a - bi = (a, -b)$.

Portanto, o afixo de $\overline{z}$ é a imagem do afixo de z pela reflexão de eixo real.

14 Indica o conjugado de cada um dos seguintes números complexos:

a) $1 + 5i$ **b)** $2 - 3i$
c) $-1 + i$ **d)** $-4 - 3i$
e) 6 **f)** $-5i$

Propriedade 1

Sejam w e z números complexos.

Tem-se:

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (o conjugado da soma é a soma dos conjugados)
- $\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$ (o conjugado do produto é o produto dos conjugados)
- $\overline{\overline{z}} = z$ (o conjugado do conjugado de z é o próprio z)

Demonstração

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$.

Tem-se:

- $\overline{z+w} = \overline{a + c + (b+d)i} = a + c - (b+d)i =$
  $= a + c - bi - di = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \times w} = \overline{ac - bd + (ad+bc)i} = ac - bd - (ad+bc)i =$
  $= ac - bd + (-ad - bc)i = (a - bi) \times (c - di) = \overline{z} \times \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

PROFESSOR

Soluções

14. a) $1 - 5i$ **b)** $2 + 3i$
c) $-1 - i$ **d)** $-4 + 3i$
e) 6 **f)** $5i$

Propriedade 2

Seja z um número complexo.

Tem-se: $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ e $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

Demonstração

Seja $z=a+bi$.

Tem-se:

- $z+\overline{z}=a+bi+\overline{a+bi}=a+bi+a-bi=2a=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=a+bi-\overline{a+bi}=a+bi-(a-bi)=2bi=2i\,\mathrm{Im}(z)$

Propriedade 3

Seja z um número complexo diferente de 0.

Tem-se:

- z é um número real se e só se $z=\overline{z}$.
- z é um número imaginário puro se e só se $z=-\overline{z}$.

Demonstração

Seja $z=a+bi$ um número complexo diferente de 0.

Tem-se:

- $z=\overline{z}\Leftrightarrow a+bi=a-bi\Leftrightarrow b=-b\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow z$ é real
- $z=-\overline{z}\Leftrightarrow a+bi=-(a-bi)\Leftrightarrow a+bi=-a+bi\Leftrightarrow a=-a\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow z$ é imaginário puro

Exercícios resolvidos

1. Seja $z=3-2i$ e seja $w=3i\overline{z}+2(z\overline{z}+z)$.

Determina w.

Resolução

$$w=3i(3+2i)+2\left[(3-2i)(3+2i)+(3-2i)\right]=$$
$$=9i+6i^2+2(9-6i+6i-4i^2+3-2i)=$$
$$=9i-6+2(9+4+3-2i)=$$
$$=9i-6+2(16-2i)=$$
$$=9i-6+32-4i=$$
$$=26+5i$$

continua ▶

15 Determina o valor de:

$\overline{(2+i)}(3-i)^2+\overline{3i}-2i(5+i)$

PROFESSOR

Soluções

15. $12-33i$

continuação

2. Seja P o afixo, no plano de Argand, de um número complexo z.

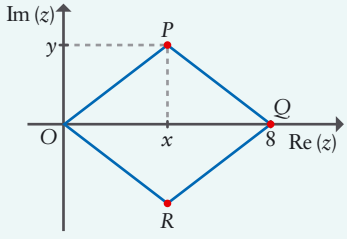
P é um ponto do primeiro quadrante.

Seja R o afixo de $\overline{z}$, seja O a origem do referencial e seja Q o afixo do número complexo 8.

Sabendo que o quadrilátero $[OPQR]$ é um losango de perímetro 20, determina z.

Resolução

A figura abaixo esquematiza a situação. O ponto R é a imagem do ponto P, pela reflexão de eixo real.



Como o quadrilátero $[OPQR]$ é um losango de perímetro 20, tem-se $\overline{OP} = 5$.

Seja $z = x + yi$.

Como $x = \frac{8}{2} = 4$, tem-se, pelo teorema de Pitágoras, $4^2 + y^2 = 5^2$, donde vem $y = 3$.

Portanto, $z = 4 + 3i$.

16 No plano complexo, seja A um ponto do terceiro quadrante. O ponto A é o afixo de um número complexo z. Seja B o afixo de $\overline{z}$ e seja O a origem do referencial. Sabe-se que o triângulo $[OAB]$ é equilátero e que tem área $4\sqrt{3}$.

Determina z.

3. Seja z um número complexo não nulo tal que:

$$\overline{3(z+2i)+3\overline{z}} = -6i$$

Prova que z é um número imaginário puro.

Resolução

Tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{3(z+2i)+3\overline{z}} &= \overline{3(z+2i)} + \overline{3\overline{z}} = \\ &= \overline{3} \times \overline{z+2i} + \overline{3} \times \overline{\overline{z}} = \\ &= 3\left(\overline{z} + \overline{2i}\right) + 3z = \\ &= 3(\overline{z} - 2i) + 3z = \\ &= 3\overline{z} - 6i + 3z = \\ &= 3(z + \overline{z}) - 6i\end{aligned}$$

Uma vez que $3(z+\overline{z}) - 6i = -6i$, tem-se $3(\overline{z}+z) = 0$, donde vem $\overline{z}+z = 0$, ou seja, $z = -\overline{z}$, pelo que z é um número imaginário puro.

PROFESSOR

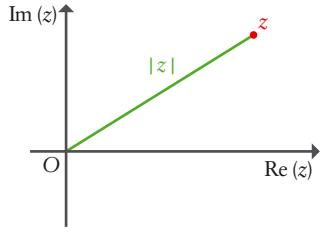
Soluções

16. $-2\sqrt{3} - 2i$

Módulo de um número complexo

Recorda que o módulo de um número real a, que se representa por $|a|$, é a medida da distância, na reta real, entre a origem e o ponto de abcissa a.

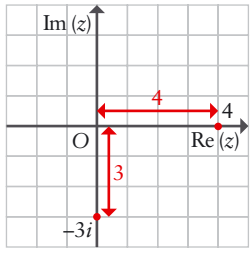
É então natural definir módulo de um número complexo da forma que a seguir se apresenta.



Seja z um número complexo. Dá-se o nome de **módulo de z**, e representa-se por $|z|$, à medida da distância, no plano complexo, entre a origem do referencial e o afixo de z.

EXEMPLOS

- Tem-se $|4| = 4$, pois a distância do afixo de 4 à origem é igual a 4.
- Tem-se $|-3i| = 3$, pois a distância do afixo de $-3i$ à origem é igual a 3.



Propriedade 1

Seja $z = a + bi$ um número complexo. Tem-se $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Demonstração

Se $z = a + bi$, então o afixo de z tem coordenadas (a, b), pelo que a medida da distância entre a origem e o afixo de z é $\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$.

Portanto, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

EXEMPLO

$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

17 Indica o valor de:

a) $|-7|$ **b)** $|i|$ **c)** $|-2i|$

18 Determina:

a) $|-5 - 12i|$

b) $|1 + \sqrt{3}i|$

c) $|2 - 5i|$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 184
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 188
TI-Nspire CX ..... pág. 193

Propriedade 2

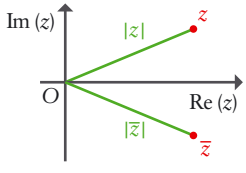
Seja $z = a + bi$ um número complexo. Tem-se $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Demonstração

Tem-se: $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Propriedade 3

Seja $z = a + bi$ um número complexo. Tem-se $|z| = |\bar{z}|$.



Demonstração

Tem-se: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |a - bi| = |\bar{z}|$

Nota: do ponto de vista geométrico, esta propriedade significa que um número complexo e o seu conjugado estão à mesma distância da origem.

PROFESSOR

Soluções

17. a) 7 **b)** 1 **c)** 2

18. a) 13 **b)** 2 **c)** $\sqrt{29}$

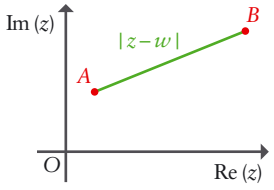
Propriedade 4

Seja $z = a + bi$ um número complexo. Tem-se $|z|^2 = z\bar{z}$.

Demonstração

Tem-se:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 =$$
$$= a^2 - b^2 \times (-1) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$$



Propriedade 5

Seja A o afixo de um número complexo z e seja B o afixo de um número complexo w. Tem-se $\overline{AB} = |z - w|$.

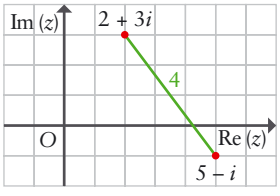
Demonstração

Seja $z = a + bi$ e seja $w = c + di$.

Tem-se:

- $z - w = a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i$
- A tem coordenadas (a, b) e B tem coordenadas (c, d).

Vem, então: $\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |z - w|$



EXEMPLO

A distância, no plano de Argand, entre os afixos dos números complexos $2 + 3i$ e $5 - i$ é $|2 + 3i - (5 - i)| = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Propriedade 6

Sejam z e w números complexos.

Tem-se:

- $|zw| = |z||w|$ (o módulo do produto é igual ao produto dos módulos)
- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (o módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos)

Demonstração

Tem-se:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (zw)(\bar{z}\,\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2\,|w|^2$$

Portanto, $|zw|^2 = |z|^2\,|w|^2$, de onde se conclui que:

$$|zw| = \sqrt{|z|^2|w|^2} = \sqrt{|z|^2}\,\sqrt{|w|^2} = |z||w|$$

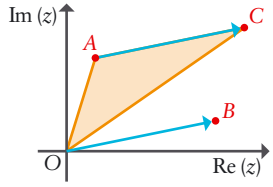
Provemos agora que $|z+w| \leqslant |z|+|w|$.

Seja A o afixo de z , seja B o afixo de w e seja C o afixo de $z+w$.

O ponto C é a imagem do ponto A pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OB}$.

Tem-se $\overline{OC} \leqslant \overline{OA}+\overline{AC}$, pelo que $\overline{OC} \leqslant \overline{OA}+\overline{OB}$, ou seja, $|z+w| \leqslant |z|+|w|$.

Nota: A desigualdade $|z+w| \leqslant |z|+|w|$ é conhecida como **desigualdade triangular**.



Exercícios resolvidos

1. Seja $z=-3+4i$.

Determina $\left(|z|+2\overline{z}\right)^2$.

Resolução

Tem-se $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$.

Portanto, $\left(|z|+2\overline{z}\right)^2=\left[5+2(-3-4i)\right]^2=(-1-8i)^2=$

$=(1+8i)^2=1+16i+64i^2=1+16i-64=-63+16i$

2. Sejam z e w dois números complexos não nulos. No plano de Argand, sejam A e B os afixos de z e w , respetivamente. Seja O a origem do referencial.

Sabe-se que B pertence à mediatriz de $[OA]$.

Prova que $|z|^2=z\overline{w}+w\overline{z}$.

Resolução

Como B pertence à mediatriz de $[OA]$, tem-se $\overline{OB}=\overline{AB}$, ou seja, $|w|=|z-w|$.

Tem-se:

$$|w|=|z-w| \Longrightarrow |w|^2=|z-w|^2 \Longrightarrow w\overline{w}=(z-w)\overline{(z-w)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow w\overline{w}=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right) \Longrightarrow w\overline{w}=z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z\overline{z}=z\overline{w}+w\overline{z} \Longrightarrow |z|^2=z\overline{w}+w\overline{z}$$

3. Seja z um número complexo tal que $|z+1|^2+|z-1|^2=20$.

Mostra que $|z|=3$.

Resolução

Tem-se:

$$|z+1|^2+|z-1|^2=(z+1)\overline{(z+1)}+(z-1)\overline{(z-1)}=$$
$$=(z+1)\left(\overline{z}+\overline{1}\right)+(z-1)\left(\overline{z}-\overline{1}\right)=(z+1)\left(\overline{z}+1\right)+(z-1)\left(\overline{z}-1\right)=$$
$$=z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}-z-\overline{z}+1=2z\overline{z}+2$$

Ora, $2z\overline{z}+2=20 \Longrightarrow 2z\overline{z}=18 \Longrightarrow z\overline{z}=9 \Longrightarrow |z|^2=9 \Longrightarrow |z|=3$.

continua

19 Seja z um número complexo. Sabe-se que $|z|=5$, que $z+\overline{z}=8$ e que o afixo de z pertence ao quarto quadrante. Determina z .

20 Mostra que, para qualquer número complexo z , se tem:

$$(z+i)\left(\overline{z}-i\right)=|z+i|^2$$

PROFESSOR

Soluções

19. $4-3i$

continuação

21 Seja z um número complexo cujo afixo, no plano de Argand, é um ponto A situado no primeiro quadrante. Seja B o afixo de $\bar{z}$.

Sabe-se que $|z| = 6$ e que o triângulo $[OAB]$ é equilátero.

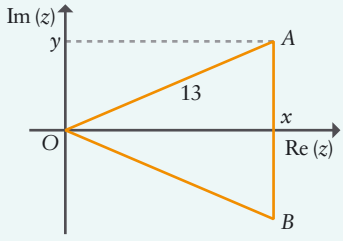
Determina z.

4. Seja z um número complexo tal que $|z| = 13$. No plano de Argand, seja A o afixo de z e seja B o afixo de $\bar{z}$.

Sabendo que o ponto A está no primeiro quadrante e que o triângulo $[AOB]$ tem perímetro 36, determina z.

Resolução

A figura ao lado esquematiza a situação.



Sendo $z = x + yi$, tem-se:

$$x^2 + y^2 = 13^2 \wedge 2y + 13 + 13 = 36$$

Tem-se:

$$x^2 + y^2 = 13^2 \wedge 2y + 13 + 13 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13^2 \wedge y = 5 \Leftrightarrow x = 12 \wedge y = 5$$

Portanto, $z = 12 + 5i$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes está definida uma condição em $\mathbb{C}$. Para cada condição, representa, no plano de Argand, o conjunto dos números complexos que a verificam.

a) $|z| = 2$

b) $|z - (3 + 2i)| = 1$

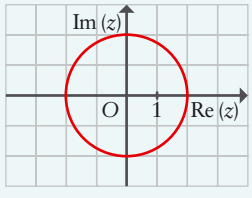
c) $|2i + z| > 1 \wedge |z - 1 + i| < 3$

d) $|z - (3 + 2i)| = |z - (1 - 2i)|$

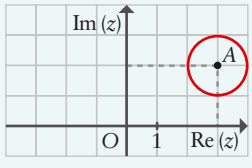
e) $|z - 1| = 2 \wedge |i - z| \geqslant |z - 2 - i|$

Resolução

a) $|z| = 2$ se e só se a distância do afixo de z à origem do referencial é 2, ou seja, se e só se o afixo de z pertence à circunferência de centro na origem e raio 2.



b) $|z - (3 + 2i)| = 1$ se e só se a distância do afixo de z ao afixo de $3 + 2i$ é 1, ou seja, se e só se o afixo de z pertence à circunferência de centro em $A(3, 2)$ e raio 1.



PROFESSOR

Soluções

21. $3\sqrt{3} + 3i$

continua

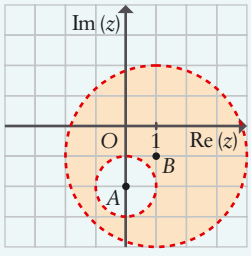
continuação

c) $|2i+z|>1 \wedge |z-1+i|<3 \Leftrightarrow$

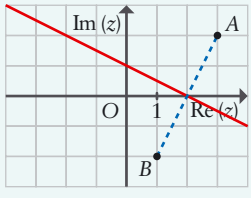
$\Leftrightarrow |z+2i|>1 \wedge |z-1+i|<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(-2i)|>1 \wedge |z-(1-i)|<3$

Esta condição traduz que a distância do afixo de z ao afixo de $-2i$ é maior do que 1 e a distância do afixo de z ao afixo de $1-i$ é menor do que 3, ou seja, o afixo de z pertence à interseção do exterior do círculo de centro em $A(0,-2)$ e raio 1 com o interior do círculo de centro em $B(1,-1)$ e raio 3.



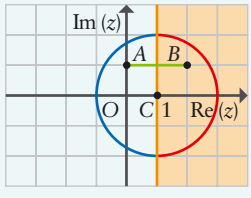
d) $|z-(3+2i)|=|z-(1-2i)|$ se e só se a distância do afixo de z ao afixo de $3+2i$ é igual à distância do afixo de z ao afixo de $1-2i$. Esta condição é equivalente a dizer que o afixo de z é equidistante dos pontos $A(3,2)$ e $B(1,-2)$, ou seja, o afixo de z pertence à mediatriz do segmento $[AB]$.



e) $|z-1|=2 \wedge |i-z| \geqslant |z-2-i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-1|=2 \wedge |z-i| \geqslant |z-(2+i)|$

Então, o afixo de z pertence à interseção da circunferência de centro em $C(1,0)$ e raio 2 com o semiplano determinado pela mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos $A(0,1)$ e $B(2,1)$ e que contém o ponto B, ou seja, o afixo de z pertence à semicircunferência representada a vermelho na figura.



22 Em cada uma das alíneas seguintes está definida uma condição em $\mathbb{C}$.

Para cada uma delas, representa, no plano de Argand, o conjunto de pontos correspondente.

a) $|z+1|=4$

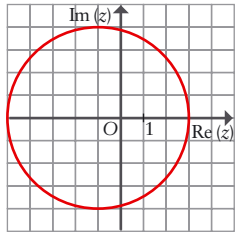
b) $1 \leqslant |z| \leqslant 3$

c) $|z+i| \geqslant |z-1| \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 3 \wedge$
$\wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 2$

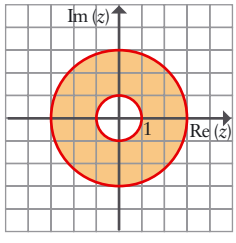
PROFESSOR

Soluções

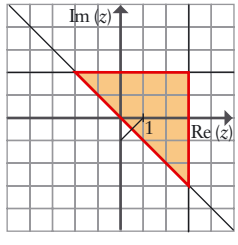
22. a)



b)



c)



Inverso de um número complexo

Recorda que o inverso de um número real a diferente de zero é o número real a' tal que $a\,a'=1$.

É então natural definir o inverso de um número complexo diferente de zero da forma que a seguir se apresenta.

Seja z um número complexo diferente de zero. Dá-se o nome de **inverso de z** ao número complexo z' tal que $z\,z'=1$.

Para esta definição fazer sentido, é preciso garantir a existência, para cada número complexo z diferente de zero, de um único número complexo z' tal que $z\,z'=1$. Ora,

$$z\,z'=1 \Longrightarrow \bar{z}(z\,z')=\bar{z}\times 1 \Longrightarrow (\bar{z}\,z)z'=\bar{z} \Longrightarrow |z|^2 z'=\bar{z} \Longrightarrow z'=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$

$$\text{e } z\frac{1}{|z|^2}\bar{z}=z\bar{z}\frac{1}{|z|^2}=|z|^2\times\frac{1}{|z|^2}=1$$

Concluímos assim a seguinte propriedade:

Propriedade

Seja z um número complexo diferente de zero. O inverso de z existe e é único, sendo igual a $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Nota: O inverso de z representa-se por $\frac{1}{z}$. Tem-se, assim, $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

23 Determina o inverso de cada um dos seguintes números complexos:

a) i

b) $3i$

c) $-2i$

d) $2+3i$

e) $1-i$

EXEMPLO

$$\frac{1}{2-i}=\frac{1}{|2-i|^2}(2+i)=\frac{1}{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^2}(2+i)=\frac{1}{5}(2+i)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 184
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 189
TI-Nspire CX ..... pág. 193

Exercício resolvido

Seja z um número complexo cujo afixo, no plano de Argand, é um ponto A do segundo quadrante que pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio 1.

Seja B o afixo de $\frac{1}{z}$. Sabe-se que $\overline{AB}=1$. Determina z.

Resolução

Como o afixo de z pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio 1, tal significa que a distância do afixo de z à origem do referencial é igual a 1, pelo que $|z|=1$. Portanto, $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}=\bar{z}$.

continua

PROFESSOR

Soluções

23. a) $-i$ **b)** $-\frac{1}{3}i$

c) $\frac{1}{2}i$ **d)** $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$

e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

continuação

Vem, então:

$$\overline{AB}=1 \Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{z}\right|=1 \Leftrightarrow |z-\bar{z}|=1 \Leftrightarrow |2i\,\mathrm{Im}(z)|=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2i|\times|\mathrm{Im}(z)|=1 \Leftrightarrow 2|\mathrm{Im}(z)|=1 \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z)|=\frac{1}{2}$$

Como o afixo de z pertence ao segundo quadrante, tem-se $\mathrm{Im}(z)>0$, pelo que $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$, de onde vem $z=a+\frac{1}{2}i$, com $a<0$.

Tem-se, então:

$$|z|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+\frac{1}{4}}=1 \Leftrightarrow a^2+\frac{1}{4}=1 \Leftrightarrow a=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{pois } a<0)$$

Portanto, $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

24 Seja A o afixo, no plano de Argand, de um número complexo z. Sabe-se que o ponto A pertence à bissetriz do primeiro quadrante. Seja B o afixo de $\frac{1}{z}$.
Determina a área do triângulo $[AOB]$.

Divisão de números complexos

O conceito de quociente de números complexos, que se apresenta a seguir, generaliza o conceito de quociente de números reais.

Sejam z_1 e z_2 números complexos, com z_2 diferente de zero. Dá-se o nome de **quociente de z_1 por z_2** ao número complexo w tal que $z_2 w = z_1$.

Para esta definição fazer sentido, é preciso garantir a existência, para cada par de números complexos z_1 e z_2, com z_2 diferente de zero, de um único número complexo w tal que $z_2 w = z_1$.

Ora,

$$z_2 w = z_1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2}(z_2 w)=\frac{1}{z_2}z_1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z_2}z_2\right)w=z_1\frac{1}{z_2} \Leftrightarrow 1w=z_1\frac{1}{z_2} \Leftrightarrow w=z_1\frac{1}{z_2}$$

Concluímos assim a seguinte propriedade:

Propriedade

Sejam z_1 e z_2 números complexos, com z_2 diferente de zero. O quociente de z_1 por z_2 existe e é único, sendo igual a $z_1\frac{1}{z_2}$.

Nota: O quociente de z_1 por z_2 representa-se por $\frac{z_1}{z_2}$.

Tem-se: $\frac{z_1}{z_2}=z_1\frac{1}{z_2}=z_1\frac{1}{|z_2|^2}\overline{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$

Concluímos, assim, que a forma algébrica do quociente de z_1 por z_2 pode ser obtida multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador.

EXEMPLO

$$\frac{4+2i}{1+3i}=\frac{(4+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{4-12i+2i+6}{1+9}=\frac{10-10i}{10}=1-i$$

PROFESSOR

Soluções

24. $\frac{1}{2}$

Exercícios resolvidos

1. Considera os números complexos:

$$z = -12 + 2i \quad \text{e} \quad w = -5 + 12i$$

Determina $\dfrac{z - w - 3}{z + |w|} + (z + 12)(\overline{w} + 13i)$.

Resolução

$$\frac{z - w - 3}{z + |w|} + (z + 12)(\overline{w} + 13i) = \qquad |w| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

$$= \frac{-12 + 2i - (-5 + 12i) - 3}{-12 + 2i + 13} + (-12 + 2i + 12)(-5 - 12i + 13i) =$$

$$= \frac{-10 - 10i}{1 + 2i} + 2i(-5 + i) = \frac{(-10 - 10i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} - 10i - 2 =$$

$$= \frac{-10 + 20i - 10i - 20}{5} - 10i - 2 = -6 + 2i - 10i - 2 = -8 - 8i$$

2. Representa, no plano de Argand, o conjunto dos afixos dos números complexos z tais que $\dfrac{2z - i}{2 + zi}$ é um número real.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

Seja $z = x + yi$.

Tem-se:

$$\frac{2z - i}{2 + iz} = \frac{2(x + yi) - i}{2 + i(x + yi)} = \frac{2x + 2yi - i}{2 + ix + yi^2} = \frac{2x + (2y - 1)i}{2 - y + xi} =$$

$$= \frac{(2x + (2y - 1)i)(2 - y - xi)}{(2 - y + xi)(2 - y - xi)} =$$

$$= \frac{2x(2 - y) - 2x^2 i + (2y - 1)(2 - y)i - (2y - 1)xi^2}{(2 - y)^2 + x^2} =$$

$$= \frac{2x(2 - y) + (2y - 1)x + \left[(2y - 1)(2 - y) - 2x^2\right]i}{x^2 + (2 - y)^2}$$

Portanto, $\dfrac{2z - i}{2 + iz}$ é um número real se e só se

$$(2y - 1)(2 - y) - 2x^2 = 0 \wedge x^2 + (2 - y)^2 \neq 0$$

Ora, $(2y - 1)(2 - y) - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 4y - 2y^2 - 2 + y - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5y = -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} = -1 + \frac{25}{16} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

A esta condição corresponde a circunferência de centro $\left(0, \dfrac{5}{4}\right)$ e raio $\dfrac{3}{4}$.

continua ▶

25 Determina:

a) $\dfrac{3 + 2i}{2 + 5i}$

b) $\dfrac{13}{5 - 12i}$

c) $\dfrac{12i}{3 + 4i}$

d) $\dfrac{(7 + 8i)(2 - 5i)}{5 - 12i}$

e) $\dfrac{3}{3 - 4i} + \dfrac{1}{3 + 4i}$

26 Representa, no plano de Argand, o conjunto dos afixos dos números complexos z tais que $\dfrac{z - 1 - i}{z + 1 + i}$ é um número imaginário puro.

20 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercício 26 (resolução passo a passo)

PROFESSOR

Soluções

25. a) $\dfrac{16}{29} - \dfrac{11}{29}i$

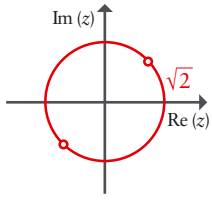
b) $\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$

c) $\dfrac{48}{25} + \dfrac{36}{25}i$

d) $\dfrac{498}{169} + \dfrac{553}{169}i$

e) $\dfrac{12}{25} + \dfrac{8}{25}i$

26.



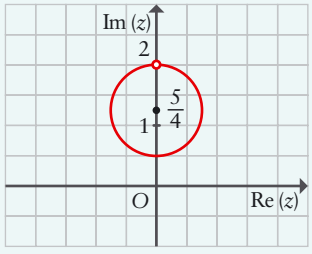
continuação

Por outro lado, tem-se:

$$x^2 + (2-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 2 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 2)$$

Portanto, $x^2 + (2-y)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 2)$.

Assim, o conjunto dos afixos dos números complexos z tais que $\frac{2z-i}{2+iz}$ é um número real é o conjunto de pontos da circunferência de centro $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ e raio $\frac{3}{4}$, à exceção do ponto $(0, 2)$.



Propriedade

Dados números complexos w e z, com $z \neq 0$, tem-se:

- $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ (o módulo do quociente é igual ao quociente dos módulos)
- $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ (o conjugado do quociente é igual ao quociente dos conjugados)

Demonstração

Tem-se:

- $|w| = \left|\frac{w}{z} \times z\right| = \left|\frac{w}{z}\right| \times |z|$, pelo que $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$.
- $\overline{w} = \overline{\left(\frac{w}{z} \times z\right)} = \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} \times \overline{z}$, pelo que $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$.

Exercício resolvido

Representa, no plano de Argand, o conjunto dos afixos dos números complexos z tais que $\left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right| = 1$.

in *Caderno de Apoio*, 12.° ano

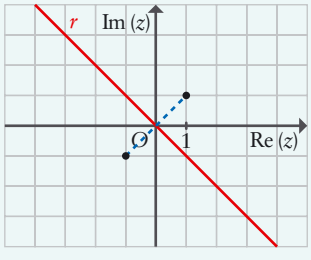
Resolução

Para $z \neq -1-i$, tem-se:

$$\left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1-i| = |z+1+i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z-(1+i)| = |z-(-1-i)|$$

A esta condição corresponde à reta r , mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de $1+i$ e de $-1-i$.



Caderno de exercícios
Operar com números complexos

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 52 a 55 (pág. 158).

3. Forma trigonométrica de um número complexo

Argumento de um número complexo

20 AULA DIGITAL
- **Resolução**
  Exercícios de «Forma trigonométrica de um número complexo»

Seja $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

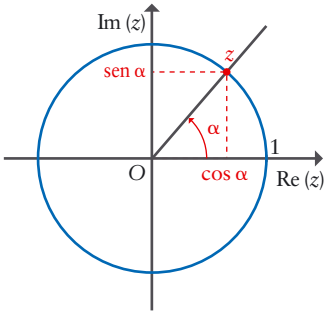
Tem-se $|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$.

Como $|z|=1$, diz-se que z é unitário.

De um modo geral, tem-se:

> Um número complexo diz-se **unitário** se o seu módulo for igual a 1.

Seja z um número complexo unitário. O seu afixo, no plano de Argand, está à distância 1 da origem do referencial, ou seja, o afixo de z pertence à circunferência centrada na origem do referencial e raio 1 (circunferência trigonométrica).



Portanto,

z é um número complexo unitário $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ o afixo de z pertence à circunferência trigonométrica $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}:$ o afixo de z tem coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: z=(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: z=\cos\alpha+(\operatorname{sen}\alpha)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$

Concluímos, assim, que:

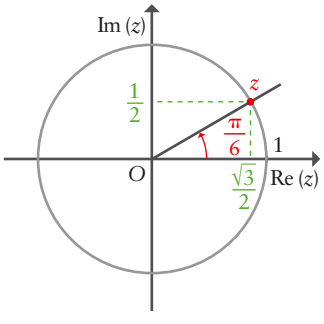
z é um número complexo unitário $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$*

NOTA

* A expressão $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$ pode ser abreviada escrevendo simplesmente **cis α**.

Tem-se a seguinte definição:

> Seja z um número complexo unitário.
> A um número real α tal que $z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$ dá-se o nome de **argumento de z**.



Note-se que α é um argumento de um número complexo unitário z se e só se α for a medida da amplitude, em radianos, de um ângulo generalizado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta que tem origem no ponto O e que passa no afixo de z.

Por exemplo, se $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, então os argumentos de z são os números reais da forma $\frac{\pi}{6}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

De um modo geral, tem-se:

Propriedade

Dados dois argumentos de um mesmo número complexo unitário, eles diferem de $2k\pi$, para um certo número inteiro k.

27 Indica:

a) três argumentos (dois positivos e um negativo) do número complexo i;

b) três argumentos (um positivo e dois negativos) do número complexo -1;

c) a expressão geral dos argumentos do número complexo $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Exponencial complexa

O nosso objetivo será atribuir significado a uma expressão do tipo $e^{i\alpha}$ (exponencial cujo expoente é um número imaginário puro).

Sabemos que, quaisquer que sejam x e y reais, se tem:

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad \text{e} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

Vamos definir $e^{i\alpha}$ de tal forma que estas propriedades se mantenham válidas.

Comecemos por apresentar uma propriedade.

Propriedade

Dados números complexos unitários $z_1 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e $z_2 = \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$, tem-se:

- $z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)$

Demonstração

Tem-se:

$$z_1 z_2 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + i\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta + i^2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + i(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha) =$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{|z_2|^2} \times \overline{z_2} = z_1 \times \frac{1}{1} \times \overline{z_2} =$$

$$= z_1 \times \overline{z_2} = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + i\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta - i^2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + i(\text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha) =$$

$$= \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)$$

PROFESSOR

Soluções

27. a) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ (por exemplo)

b) π, $-\pi$ e -3π (por exemplo)

c) $\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Vamos agora definir $e^{i\alpha}$.

NOTA

* $e^{i\alpha} = \text{cis}\,\alpha$

Seja α um número real.

Define-se $e^{i\alpha}$ da seguinte forma: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$*.

A expressão $e^{i\alpha}$ designa-se por **exponencial complexa de $i\alpha$**.

EXEMPLOS

- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1 + 0i = -1$**
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + 1i = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

NOTA

** Tem-se, portanto, $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Esta igualdade é considerada uma das mais belas da Matemática, pois relaciona cinco números fundamentais: 0, 1, e, π e i.

28 Determina na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $e^{2\pi i}$

b) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Vamos ver agora que, de acordo com a definição de exponencial complexa de $i\alpha$, se mantêm válidas as propriedades do produto e do quociente de exponenciais.

Propriedades

Tem-se:

1. $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta}$

2. $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha - i\beta}$

29 Prova que $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha - i\beta}$.

Demonstração 1

Tem-se:

$$e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) =$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha + \beta) = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha + i\beta}$$

20 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Forma trigonométrica de números complexos

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 184
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 189
TI-Nspire CX ..... pág. 194

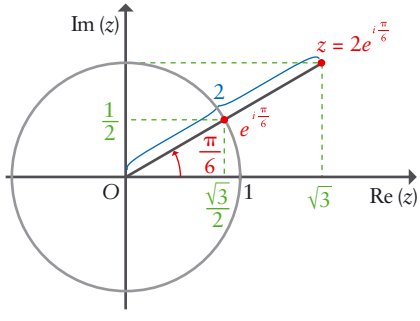
Forma trigonométrica de um número complexo

Consideremos o número complexo $\sqrt{3} + i$.

Tem-se $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Podemos escrever $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.



PROFESSOR

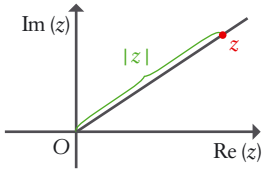
Soluções

28. a) 1

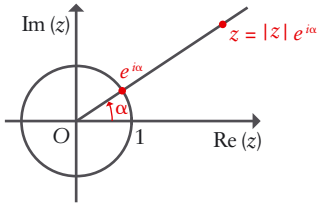
b) $-i$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

De um modo geral, dado um complexo $z \neq 0$, podemos escrever $z = |z| \times \frac{z}{|z|}$.



Como $\frac{z}{|z|}$ é um número complexo unitário $\left(\text{pois } \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1\right)$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{z}{|z|} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$. Portanto, $z = |z| \times \frac{z}{|z|} = |z|\, e^{i\alpha}$, ou seja, qualquer número complexo $z \neq 0$ pode ser escrito na forma $z = rw$, sendo $r \in \mathbb{R}^+$ e $|w| = 1$. Provemos que esta decomposição é única. De facto, se $z = rw$, com $r \in \mathbb{R}^+$, e sendo w um complexo unitário, tem-se $|z| = |rw| = |r||w| = r \times 1 = r$. Portanto, $z = |z|w$ e, dado que $z = |z| \times \frac{z}{|z|}$, resulta que $w = \frac{z}{|z|} = e^{i\alpha}$.



Concluímos, assim, que podemos escrever qualquer número complexo $z \neq 0$ na forma $|z|\, e^{i\alpha}$ em que:

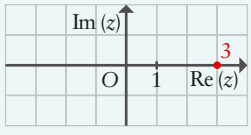
- $|z|$ é a medida da distância entre a origem e o afixo de z;
- α é a medida da amplitude (em radianos) de um ângulo generalizado cujo lado origem é o semieixo positivo das abcissas e cujo lado extremidade é a semirreta que tem origem no ponto O e que passa no afixo de z.

Quando escrevemos um número complexo z na forma $|z|\, e^{i\alpha}$, diz-se que o estamos a escrever na **forma trigonométrica** ou **forma polar**, e diz-se que α é um **argumento** de z.

EXEMPLOS

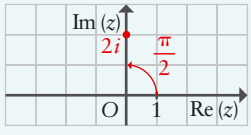
- $3 = 3\, e^{0i}$

  A distância do afixo do número complexo 3 à origem do referencial é igual a 3, pelo que o módulo deste complexo é 3. O referido afixo pertence à parte positiva do eixo real, pelo que 0 é um argumento deste complexo.



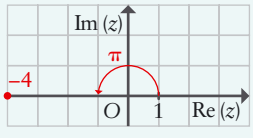
- $2i = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

  A distância do afixo do número complexo $2i$ à origem do referencial é igual a 2, pelo que o módulo deste complexo é 2. O referido afixo pertence à parte positiva do eixo imaginário, pelo que $\frac{\pi}{2}$ é um argumento deste complexo.



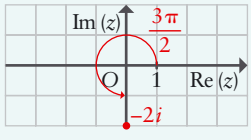
- $-4 = 4\, e^{i\pi}$

  A distância do afixo do número complexo -4 à origem do referencial é igual a 4, pelo que o módulo deste complexo é 4. O referido afixo pertence à parte negativa do eixo real, pelo que π é um argumento deste complexo.



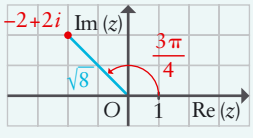
- $-2i = 2\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$

  A distância do afixo do número complexo $-2i$ à origem do referencial é igual a 2, pelo que o módulo deste complexo é 2. O referido afixo pertence à parte negativa do eixo imaginário, pelo que $\frac{3\pi}{2}$ é um argumento deste complexo.



- $-2 + 2i = \sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

  O módulo de $-2 + 2i$ é $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. O afixo do número complexo $-2 + 2i$ pertence à bissetriz do segundo quadrante, pelo que $\frac{3\pi}{4}$ é um argumento deste complexo.



30 Escreve na forma trigonométrica:

a) $-6i$

b) 7

c) $9i$

d) -12

e) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

f) $5-5i$

31 Escreve na forma $a+bi$:

a) $10\,e^{2\pi i}$

b) $5\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

c) $\sqrt{12}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Reciprocamente, vejamos alguns exemplos de como obter na forma $x+yi$ um número complexo escrito na forma trigonométrica.

EXEMPLOS

- $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i$
- $4\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$
- $3\,e^{i\pi}=3\,(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)=3\,(-1+0i)=-3$

  Neste último caso, também poderíamos ter raciocinado da seguinte forma: como π é um argumento do complexo, o afixo está na parte negativa do eixo real. Como a distância deste afixo à origem é 3, trata-se do número -3.

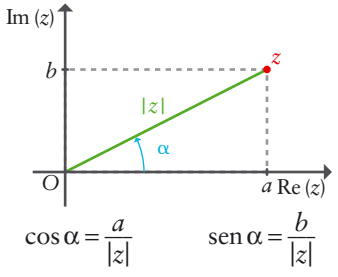
Propriedade

Seja $z=a+bi$ um número complexo não nulo.

Tem-se que α é um argumento de z se e só se:

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\wedge\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nesse caso, se $a\neq 0$, tem-se $\text{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}$.



Demonstração

Seja $z=a+bi$ um número complexo e seja $|z|\,e^{i\alpha}$ a forma trigonométrica de z.

Tem-se:

$$a+bi=|z|\,e^{i\alpha}\Leftrightarrow a+bi=|z|\,(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+bi=|z|\cos\alpha+i\,|z|\,\text{sen}\,\alpha\Leftrightarrow a=|z|\cos\alpha\wedge b=|z|\,\text{sen}\,\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{a}{|z|}\wedge\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{|z|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\wedge\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Portanto, α é um argumento de $z=a+bi$ se e só se:

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\wedge\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nesse caso, se $a\neq 0$, tem-se:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{b}{a}$$

PROFESSOR

Soluções

30. a) $6\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$ **b)** $7\,e^{i0}$

c) $9\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ **d)** $12\,e^{i\pi}$

e) $2\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$ **f)** $\sqrt{50}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$

31. a) 10 **b)** $5i$

c) $-3-\sqrt{3}\,i$

Exercício resolvido

Escreve os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

a) $-2+\sqrt{12}\,i$ **b)** $-\sqrt{3}-i$

c) $4-\sqrt{48}\,i$ **d)** $3+7i$

Resolução

a) Tem-se $\left|-2+\sqrt{12}\,i\right|=\sqrt{4+12}=4$.

Seja α um argumento de $-2+\sqrt{12}\,i$.

Tem-se $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{12}}{-2}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.

Como o afixo de $-2+\sqrt{12}\,i$ está no segundo quadrante, um valor para α é $\pi-\dfrac{\pi}{3}$, ou seja, $\dfrac{2\pi}{3}$.

Portanto, $-2+\sqrt{12}\,i=4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Tem-se $\left|-\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2$.

Seja α um argumento de $-\sqrt{3}-i$.

Tem-se $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Como o afixo de $-\sqrt{3}-i$ está no terceiro quadrante, um valor para α é $\pi+\dfrac{\pi}{6}$, ou seja, $\dfrac{7\pi}{6}$.

Portanto, $-\sqrt{3}-i=2\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

c) Tem-se $\left|4-\sqrt{48}\,i\right|=\sqrt{16+48}=8$.

Seja α um argumento de $4-\sqrt{48}\,i$.

Tem-se $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-\sqrt{48}}{4}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=-\sqrt{3}$.

Como o afixo de $4-\sqrt{48}\,i$ está no quarto quadrante, um valor para α é $-\dfrac{\pi}{3}$.

Portanto, $4-\sqrt{48}\,i=8\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

d) Tem-se $|3+7i|=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$.

Seja α um argumento de $3+7i$.

Tem-se $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{7}{3}$.

Como o afixo de $3+7i$ está no primeiro quadrante, um valor para α é $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{3}$.

Portanto, $3+7i=\sqrt{58}\,e^{i\operatorname{arctg}\frac{7}{3}}$.

32 Escreve na forma trigonométrica:

a) $1+\sqrt{3}\,i$

b) $-\sqrt{12}-2i$

c) $-\sqrt{18}+\sqrt{6}\,i$

d) $-2+5i$

PROFESSOR

Soluções

32. a) $2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $4\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$

c) $\sqrt{24}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

d) $\sqrt{29}\,e^{i\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right)+\pi\right]}$

Igualdade de números complexos na forma trigonométrica

Se dois números complexos não nulos são iguais, então têm necessariamente o mesmo módulo. Já os seus argumentos podem diferir de um múltiplo inteiro de 2π.

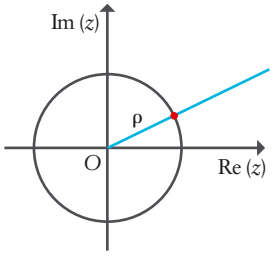
Reciprocamente, dados dois números complexos não nulos, se têm o mesmo módulo e os seus argumentos diferem de um múltiplo inteiro de 2π, então são necessariamente iguais.

Vejamos porquê.

NOTA

ρ é uma letra grega, que se lê «ró».

Se dois números complexos não nulos têm o mesmo módulo ρ, os afixos de ambos pertencem à circunferência de centro na origem do referencial e raio ρ.



Se os argumentos desses complexos diferem de um múltiplo inteiro de 2π, os afixos de ambos pertencem a uma mesma semirreta com origem na origem do referencial.

Portanto, os afixos dos dois números complexos coincidem com o ponto de interseção da semirreta com a circunferência.

Como os dois números complexos têm o mesmo afixo, são necessariamente iguais.

Portanto, sendo $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ e $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \text{ (para um certo inteiro } k)$$

ou seja,

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

EXEMPLO

$3e^{i\frac{17\pi}{4}} = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$, pois $\frac{17\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi = 2 \times 2\pi$

Exercícios resolvidos

Determina $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [2\pi, 4\pi]$ tais que $re^{i\theta} = -2 - 2i$.

Resolução

Tem-se $-2 - 2i = \sqrt{8}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$. De facto, $|-2-2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ e, no plano de Argand, o afixo de $-2-2i$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante, pelo que $\frac{5\pi}{4}$ é um argumento deste número complexo.

Vem, então:

$$re^{i\theta} = \sqrt{8}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow r = \sqrt{8} \wedge \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [2\pi, 4\pi]$, vem $\theta = \frac{13\pi}{4}$ (valor que se obtém para $k = 1$).

Portanto, $r = \sqrt{8}$ e $\theta = \frac{13\pi}{4}$.

33 Determina $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in [6\pi, 8\pi]$ tais que:

$$\rho e^{i\alpha} = 1 - \sqrt{3}\, i$$

PROFESSOR

Soluções

33. $\rho = 2$ e $\alpha = \frac{23\pi}{3}$

Argumento principal de um número complexo

Dado um número complexo não nulo e dado um intervalo da forma $]a, a+2\pi]$, existe apenas um argumento desse complexo que pertence a esse intervalo, uma vez que dois argumentos diferentes de um mesmo número complexo diferem de um múltiplo inteiro de 2π.

Por exemplo, existe um só argumento de $1-i$ que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$, argumento esse que é $-\frac{\pi}{4}$.

Tem-se a seguinte definição:

Dado um número complexo $z \neq 0$, chama-se **argumento principal de z** ao argumento de z que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$.

Designa-se por $\mathbf{Arg}(z)$ o argumento principal de z.

EXEMPLOS

- $\text{Arg}(3+3i) = \frac{\pi}{4}$
- $\text{Arg}(2i) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$
- $\text{Arg}(5) = 0$
- $\text{Arg}(-6) = \pi$
- $\text{Arg}(-2-2i) = -\frac{3\pi}{4}$
- $\text{Arg}(-4i) = -\frac{\pi}{2}$
- $\text{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$

34 Indica o valor de:

a) $\text{Arg}(3+\sqrt{3}\,i)$

b) $\text{Arg}(-i)$

c) $\text{Arg}(-1)$

d) $\text{Arg}(-2-\sqrt{12}\,i)$

Calculadoras gráficas
Casio fx-CG 20 ..... pág. 185
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 189
TI-Nspire CX ..... pág. 194

Exercícios resolvidos

1. Representa, no plano de Argand, a região do plano definida pela condição:

$$1 \leqslant z\bar{z} \leqslant 9 \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{6}$$

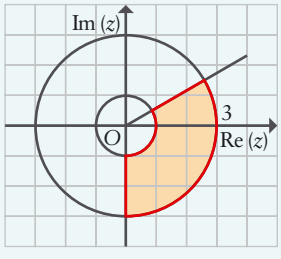
Resolução

Tem-se $1 \leqslant z\bar{z} \leqslant 9 \Leftrightarrow 1 \leqslant |z|^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow 1 \leqslant |z| \leqslant 3$.

Assim, esta condição é satisfeita por todos os números complexos cujo módulo está entre 1 e 3.

Tem-se que a condição $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{6}$ é satisfeita por todos os números complexos cujo argumento principal está entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$.

Portanto, à condição $1 \leqslant z\bar{z} \leqslant 9 \wedge -\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{6}$ corresponde a região colorida representada na figura seguinte.



continua

35 A condição

$$2 \leqslant z+\bar{z} \leqslant 6 \wedge 0 \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$$

define um quadrilátero, no plano de Argand.

Qual é a área desse quadrilátero?

PROFESSOR

Soluções

34. a) $\frac{\pi}{6}$ **b)** $-\frac{\pi}{2}$

c) π **d)** $-\frac{2\pi}{3}$

35. 4

continuação

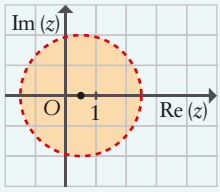
2. Representa, no plano de Argand, a região do plano definida pela condição:

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|<2 \wedge 0 \leqslant \operatorname{Arg}(z-1)<\frac{\pi}{4}$$

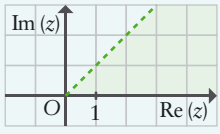
in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

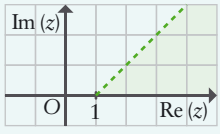
À condição $\left|z-\frac{1}{2}\right|<2$ corresponde o interior do círculo de centro em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio 2.



A condição $0 \leqslant \operatorname{Arg}(z)<\frac{\pi}{4}$ é satisfeita por todos os números complexos cujo argumento principal é maior ou igual a 0 e é inferior a $\frac{\pi}{4}$. Portanto, a esta condição corresponde a região representada na figura ao lado.



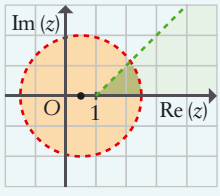
Assim, à condição $0 \leqslant \operatorname{Arg}(z-1)<\frac{\pi}{4}$ corresponde a região que resulta da anterior pela translação associada ao vetor de coordenadas $(1, 0)$.



Portanto, à condição

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|<2 \wedge 0 \leqslant \operatorname{Arg}(z-1)<\frac{\pi}{4}$$

corresponde a região representada na figura ao lado, com cor mais escura.



3. A condição $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4} \wedge 2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$ define um segmento de reta, no plano de Argand. Qual é o seu comprimento?

Resolução

A condição $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$ é satisfeita por todos os números complexos cujo argumento principal é igual a $\frac{3\pi}{4}$. Os afixos destes números complexos definem a bissetriz do segundo quadrante.

A condição $2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$ é satisfeita por todos os números complexos cuja parte imaginária está compreendida entre 2 e 4. Os afixos destes números complexos definem a região do plano compreendida entre as retas de equações $y=2$ e $y=4$.

Assim, a condição $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4} \wedge 2 \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$ define o segmento de reta cujos extremos são os pontos $A(-2, 2)$ e $B(-4, 4)$.

O seu comprimento é $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

2.0 AULA DIGITAL

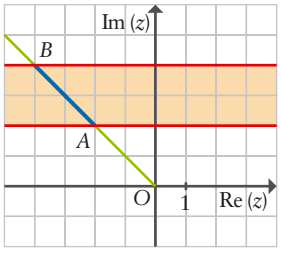
- **Simulador**
  Geogebra: Circunferências e círculos
  Geogebra: Mediatrizes e semiplanos
  Geogebra: Ângulos e semirretas

36 A condição

$0 \leqslant \operatorname{Arg}(z-1-i) \leqslant \frac{\pi}{3} \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 3$

define uma região, no plano de Argand.

Qual é a área dessa região?



PROFESSOR

Soluções

36. $2\sqrt{3}$

Operações com números complexos na forma trigonométrica

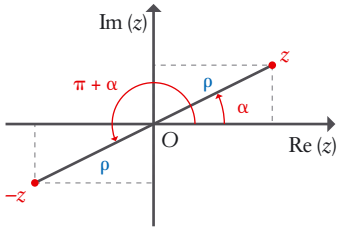
Simétrico de um número complexo

Comecemos por observar que, dado um número complexo z, o seu simétrico, $-z$, tem o mesmo módulo, isto é, tem-se que $|-z| = |z|$.

De facto, sendo $z = a + bi$, tem-se $-z = -a - bi$, pelo que:

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Tal como se ilustra na figura ao lado, se α é um argumento de z, então $\pi + \alpha$ é um argumento de $-z$.



Tem-se, portanto,

$$-\rho\, e^{i\alpha} = \rho\, e^{i(\pi+\alpha)}$$

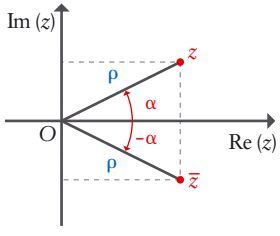
EXEMPLOS

- $-2\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\,e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$
- $-\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{4}\,e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}e^{i\frac{8\pi}{3}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $-2\sqrt{7}\,e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2\sqrt{7}\,e^{i\left(\pi+\frac{6\pi}{5}\right)} = 2\sqrt{7}\,e^{i\frac{11\pi}{5}} = 2\sqrt{7}\,e^{i\frac{\pi}{5}}$

Conjugado de um número complexo

Já vimos que, dado um número complexo z, o seu conjugado, $\bar{z}$, tem o mesmo módulo, isto é, tem-se que $|z| = |\bar{z}|$.

Tal como se ilustra na figura ao lado, se α é um argumento de z, então $-\alpha$ é um argumento de $\bar{z}$.



Tem-se, portanto,

$$\overline{\rho\, e^{i\alpha}} = \rho\, e^{i(-\alpha)}$$

EXEMPLOS

- $\overline{3\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 3\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$
- $\overline{\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}} = \sqrt{3}\,e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $\overline{\frac{6}{5}e^{i\frac{11\pi}{10}}} = \frac{6}{5}e^{i\left(-\frac{11\pi}{10}\right)} = \frac{6}{5}e^{i\frac{9\pi}{10}}$

37 Escreve na forma $\rho\, e^{i\theta}$, com $\rho > 0$ e $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$, os seguintes números complexos:

a) $-2\,e^{i\frac{\pi}{5}}$

b) $-e^{i\frac{10\pi}{7}}$

c) $\overline{2\,e^{i\frac{\pi}{5}}}$

d) $\overline{e^{i\frac{10\pi}{7}}}$

PROFESSOR

Soluções

37. a) $2\,e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$ **b)** $e^{i\frac{3\pi}{7}}$

c) $2\,e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ **d)** $e^{i\frac{4\pi}{7}}$

Multiplicação de números complexos

20 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Multiplicação de complexos na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ números complexos.

Tem-se $z_1 z_2 = \left(\rho_1 e^{i\theta_1}\right)\left(\rho_2 e^{i\theta_2}\right) = \rho_1 \rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \left(\rho_1 \rho_2\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Portanto,

$$\left(\rho_1 e^{i\theta_1}\right)\left(\rho_2 e^{i\theta_2}\right) = \left(\rho_1 \rho_2\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

EXEMPLO

$$2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{3}} = (2\times 3)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

38 Efetua as operações indicadas e apresenta o resultado na forma $a+bi$.

a) $4e^{i\frac{\pi}{5}} \times 6e^{i\frac{4\pi}{5}}$

b) $-3e^{i\frac{\pi}{8}} \times \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}}$

Vejamos a que corresponde, do ponto de vista geométrico, a multiplicação de números complexos.

Seja z um número complexo não nulo. Como vimos, multiplicamos $e^{i\theta}$ por z adicionando θ ao argumento de z . Portanto, o afixo de $e^{i\theta}z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem e amplitude θ .

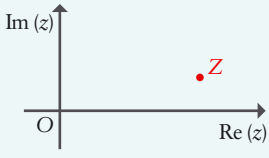
Por outro lado, ao multiplicarmos um número complexo z por um número real positivo ρ , estamos a multiplicar por ρ o seu módulo, mantendo o seu argumento.

Tem-se, assim, que:

O afixo de $\rho e^{i\theta} z$ $(\rho > 0)$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem e amplitude θ , composta com a homotetia de centro na origem e razão ρ .

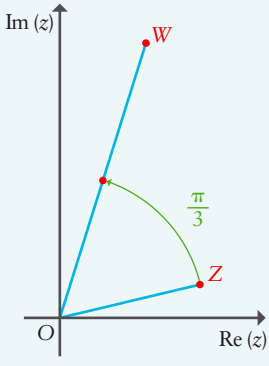
EXEMPLO

Seja z o complexo cujo afixo Z está representado na figura ao lado.



Seja $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}} z$ e seja W o afixo de w .

W é a imagem de Z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{3}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão 2.



Como caso particular importante, destaque-se o facto de o produto de um número complexo por i corresponder a uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{pois } i = e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$.

PROFESSOR

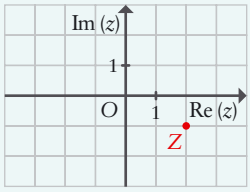
Soluções

38. a) $-24+0i$

b) $-3+3i$

Exercícios resolvidos

1. Seja z o número complexo cujo afixo Z está representado na figura.



Determina geometricamente o afixo Z' de cada um dos números complexos seguintes:

a) $z+1+2i$

b) iz

c) $-\overline{z}$

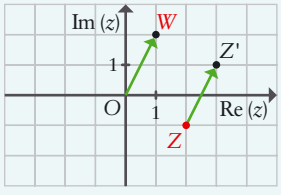
d) $3z$

e) $iz+5$

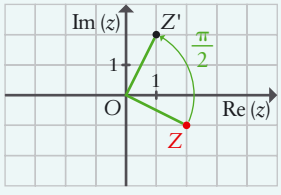
f) $i\overline{z}$

Resolução

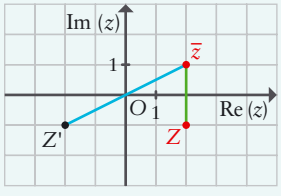
a) Translação associada ao vetor $\overrightarrow{OW}$ (sendo W o afixo de $1+2i$).



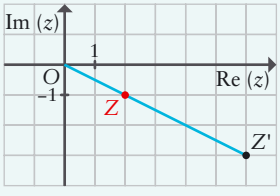
b) Rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$.



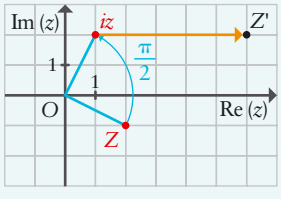
c) Reflexão em relação ao eixo real, composta com reflexão em relação à origem.



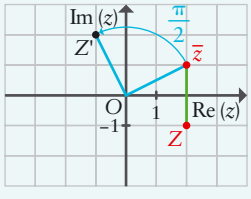
d) Homotetia de centro na origem e razão 3.



e) Rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta com translação.



f) Reflexão em relação ao eixo real, composta com rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$.



continua

2.0 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Rotações, translações e homotetias

NOTA

Tal como já referimos, optamos, por vezes, por utilizar a designação do número complexo para designar o seu afixo.

continuação

2. Seja $z = 3 + i$.

Efetua geometricamente o produto de $1 + 2i$ por z.

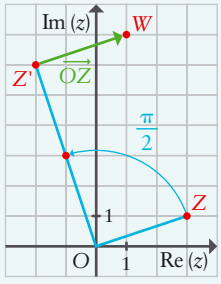
Resolução

Seja Z o afixo de z.

Tem-se $(1 + 2i)z = z + 2iz$.

O afixo de $2iz$, Z', é a imagem de Z pela rotação de centro na origem e amplitude $\frac{\pi}{2}$, composta com a homotetia de centro na origem e razão 2.

O afixo de $z + 2iz$, W, é a imagem do afixo de $2iz$ pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OZ}$.



Da figura, parece poder concluir-se que $(1 + 2i)z = 1 + 7i$.

De facto, $(1 + 2i)(3 + i) = 3 + i + 6i + 2i^2 = 1 + 7i$.

39 Efetua geometricamente o produto $(4 + 3i)(2 - 5i)$ e confirma analiticamente o resultado obtido.

Divisão de números complexos

Sejam $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ números complexos.

Tem-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Portanto,

$$\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

40 Efetua as operações indicadas e apresenta o resultado na forma $a + bi$.

a) $4e^{i\frac{7\pi}{8}} : e^{i\frac{3\pi}{8}}$

b) $\dfrac{8e^{i\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 185
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 189
TI-Nspire CX ..... pág. 194

EXEMPLO

$$\frac{6e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{6}{3} \times e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

PROFESSOR

Soluções

39. $23 - 14i$

40. a) $0 + 4i$

b) $2 + 2\sqrt{3}i$

Exercícios resolvidos

1. Seja $z=\dfrac{12\,e^{i\alpha}}{-1+\sqrt{3}\,i}$ e seja $w=e^{2i\alpha}$.

Determina o valor de α pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ de tal modo que $\bar{z}w$ seja imaginário puro.

Resolução

Tem-se $z=\dfrac{12\,e^{i\alpha}}{-1+\sqrt{3}\,i}=\dfrac{12\,e^{i\alpha}}{2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}=6\,e^{i\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}$, pelo que $\bar{z}=6\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}$,

de onde vem que $\bar{z}w=6\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}e^{2i\alpha}=6\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}$.

Para que $\bar{z}w$ seja imaginário puro, tem de se ter:

$$\frac{2\pi}{3}+\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ora, $\dfrac{2\pi}{3}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

Como se pretende $\alpha\in]0,\pi[$, vem $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{5\pi}{6}$.

2. Seja $z=\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\,\theta}{1-i\,\mathrm{tg}\,\theta}$, com $\theta\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Determina θ de tal modo que $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resolução

Tem-se:

$$\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\theta}{1-i\,\mathrm{tg}\,\theta}=\frac{1+i\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{1-i\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}}=\frac{\dfrac{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}}=$$

$$=\frac{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\theta)}=$$

$$=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$

Por outro lado, tem-se que $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Vem, então:

$$e^{2i\theta}=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $\theta\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$, tem-se $\theta=\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{7\pi}{6}$.

41 Determina

$$\rho>0 \text{ e } \theta\in]-\pi,\pi]$$

de tal forma que $\dfrac{1+i}{\rho\,e^{i\theta}}=2i$.

42 Determina

$$\rho\in\mathbb{R}^+\wedge\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

de tal forma que

$$(\rho\,e^{i\theta})\left(-\sqrt{3}+i\right)=-2$$

PROFESSOR

Soluções

41. $\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

42. $\rho=1$; $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

Potenciação

20 AULA DIGITAL

- **Simulador**
  Geogebra: Potências em $\mathbb{C}$

Tem-se a seguinte propriedade:

Propriedade

Tem-se, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Demonstração

Provaremos esta propriedade por indução.

Para $n = 1$, vem $\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^1 = \rho^1 e^{i\times 1\times\theta}$, o que é verdade, pois:

$$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^1 = \rho\, e^{i\theta} = \rho^1 e^{i\times 1\times\theta}$$

Vejamos agora a hereditariedade.

Hipótese de indução: $\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

Tese de indução: $\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^{n+1} = \rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$

Demonstração:

$$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n \left(\rho\, e^{i\theta}\right) \underset{\text{por hipótese}}{=} \left(\rho^n e^{in\theta}\right)\left(\rho\, e^{i\theta}\right) = \left(\rho^n \rho\right)\left(e^{in\theta} e^{i\theta}\right) = \rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$$

Note-se que, em particular, se tem $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, ou seja:

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta) \quad (\textbf{fórmula de De Moivre})$$

Exercícios resolvidos

1. Apresenta na forma $x + yi$ o número complexo $\dfrac{i\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^4}{(-1+i)^{10}}$.

Resolução

Tem-se:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},\quad 1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{e} \quad -1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Portanto,

$$\frac{i\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^4}{(-1+i)^{10}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{10}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times 16\,e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{2^{10}}\,e^{i\frac{30\pi}{4}}} = \frac{16\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}}{2^5\,e^{i\frac{15\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{16\,e^{i\frac{11\pi}{6}}}{2^5\,e^{i\frac{15\pi}{2}}} = \frac{16}{32}e^{i\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{15\pi}{2}\right)} = \frac{16}{32}e^{i\left(-\frac{17\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{17\pi}{3}+6\pi\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

continua ▶

43 Determina

$$\frac{8\sqrt{2}\,i\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^5}{(1+i)^3}$$

apresentando a resposta na forma $x + yi$.

PROFESSOR

Soluções

43. $2\sqrt{3} + 2i$

continuação

2. Apresenta na forma trigonométrica o número complexo:

$$\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{13}}\right)^{13}+(2+i)^3-10i}{-\sqrt{2}\,i}$$

Resolução

$$\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{13}}\right)^{13}+(2+i)^3-10i}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{e^{i\pi}+2^3+3\times 2^2\times i+3\times 2\times i^2+i^3-10i}{-\sqrt{2}\,i}=$$

$$=\frac{-1+8+12i-6-i-10i}{-\sqrt{2}\,i}=\frac{1+i}{-\sqrt{2}\,i}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

3. Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, considera um número complexo z, não nulo, tal que $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$.

Mostra que $\forall n\in\mathbb{N}, z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

Como $z\neq 0$, tem-se:

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha \Leftrightarrow z^2+1=2z\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2-2z\cos\alpha=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2-2z\cos\alpha+\cos^2\alpha=-1+\cos^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-\cos\alpha)^2=-\operatorname{sen}^2\alpha \Leftrightarrow (z-\cos\alpha)^2=i^2\operatorname{sen}^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-\cos\alpha)^2-(i\operatorname{sen}\alpha)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)(z-\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha=0 \vee z-\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha \vee z=\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha \vee z=\cos(-\alpha)+i\operatorname{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\alpha} \vee z=e^{-i\alpha}$$

Para $z=e^{i\alpha}$, tem-se:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=\left(e^{i\alpha}\right)^n+\frac{1}{\left(e^{i\alpha}\right)^n}=e^{in\alpha}+\frac{1}{e^{in\alpha}}=e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}=$$

$$=\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)+\cos(-n\alpha)+i\operatorname{sen}(-n\alpha)=$$

$$=\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)+\cos(n\alpha)-i\operatorname{sen}(n\alpha)=2\cos(n\alpha)$$

De modo análogo, se verifica que, para $z=e^{-i\alpha}$, também se tem:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)$$

44 Determina

$$\rho\in\mathbb{R}^+\wedge\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

de tal forma que:

$$(\rho e^{i\theta})^2\left(1+\sqrt{3}\,i\right)=$$
$$=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 185
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 190
TI-Nspire CX ..... pág. 194

NOTA

Atendendo às propriedades das operações em $\mathbb{C}$, também se tem, em $\mathbb{C}$:

- $(z+w)^2=z^2+2zw+w^2$
- $z^2-w^2=(z-w)(z+w)$

45 Verifica que, se $z=e^{-i\alpha}$, então:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)$$

PROFESSOR

Soluções

44. $\rho=2$; $\theta=\frac{11\pi}{24}$

Caderno de exercícios

Forma trigonométrica de um número complexo

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 56 a 84 (págs. 158 a 161).

4. Raízes de um número complexo

Raízes de um número complexo

Recorda que, em $\mathbb{R}$, se diz que 3 é a raiz quadrada de 9 e que -2 é a raiz cúbica de -8.

De facto,

- 3 é a raiz quadrada de 9, pois $3>0$ e $3^2=9$;
- -2 é a raiz cúbica de -8, pois $(-2)^3=-8$.

Em $\mathbb{C}$, tem-se $(1+2i)^3=-11-2i$*.

Cálculos auxiliares

* $(1+2i)^3=$
$=1^3+3\times1^2\times2i+$
$+3\times1\times(2i)^2+(2i)^3=$
$=1+6i-12-8i=-11-2i$

Vamos dizer que $1+2i$ é uma raiz cúbica de $-11-2i$. Mais à frente vais perceber o porquê da utilização do artigo «uma».

De um modo geral, tem-se:

Dados complexos z e w, diz-se que z é uma **raiz de ordem n de w** se $z^n=w$.

2D AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercícios de «Raízes de um número complexo»
- **Simulador**
  Geogebra: Soma das raízes de um número complexo
  Geogebra: Radiciação em $\mathbb{C}$

Tentemos determinar as raízes quartas de -4, ou seja, tentemos determinar os números complexos que elevados à quarta dão -4.

Trata-se, portanto, de resolver a equação $z^4=-4$.

Seja $z=\rho e^{i\theta}$ $(\rho>0$ e $\theta\in\mathbb{R})$.

Vem:

$$z^4=-4 \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^4=4e^{i\pi} \Leftrightarrow \rho^4 e^{4i\theta}=4e^{i\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^4=4 \wedge 4\theta=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho=\sqrt[4]{4} \wedge \theta=\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho=\sqrt{2} \wedge \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, as raízes quartas de -4 são os números complexos z tais que $z=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, com $k\in\mathbb{Z}$.

Tem-se, assim, que todas as raízes quartas de -4:

- têm módulo $\sqrt{2}$ (os seus afixos estão à distância $\sqrt{2}$ da origem);
- os seus argumentos são: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}+2\times\frac{\pi}{2}$, etc.

Portanto, os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$.

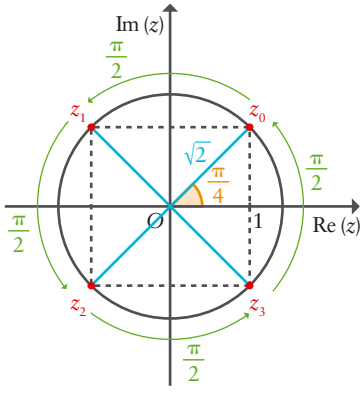
Para $k=0$, vem $z_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$.

Para $k=1$, vem $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}=-1+i$.

Para $k=2$, vem $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}=-1-i$.

Para $k=3$, vem $z_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}=1-i$.

Para $k=4$, vem $z_4=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=z_0$.



De igual modo:

Para $k=5$, vem $z_5=z_1$.

Para $k=6$, vem $z_6=z_2$.

etc.*

NOTA

* Repara que, se $k\in\mathbb{Z}$, então k pode escrever-se na forma $4q+r$, com $q\in\mathbb{Z}$ e $r\in\{0,1,2,3\}$.

Então:

$$\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(4q+r)\pi}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2q\pi+\frac{r\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{r\pi}{2}\right)}$$

com $r\in\{0,1,2,3\}$.

Portanto, o número complexo -4 tem quatro raízes de ordem 4 distintas:

$$1+i,\ -1+i,\ -1-i \text{ e } 1-i$$

Confirmemos, por exemplo, que $1+i$ é uma raiz quarta de -4.

Tem-se:

$$(1+i)^4=\left[(1+i)^2\right]^2=\left(1+2i+i^2\right)^2=(2i)^2=4i^2=-4$$

Está confirmado.

Seja agora, mais geralmente, $w=\rho\,e^{i\theta}$ um número complexo não nulo ($\rho>0$ e $\theta\in\mathbb{R}$) e seja n um número natural tal que $n\geqslant 2$.

As raízes de índice n de w são os números complexos z tais que $z^n=w$.

Seja $z=r\,e^{i\alpha}$ ($r>0$ e $\alpha\in\mathbb{R}$).

Vem:

$$z^n=w \Leftrightarrow (r\,e^{i\alpha})^n=\rho\,e^{i\theta} \Leftrightarrow r^n\,e^{in\alpha}=\rho\,e^{i\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^n=\rho \wedge n\alpha=\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r=\sqrt[n]{\rho} \wedge \alpha=\frac{\theta+2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}$$

Portanto:

As raízes de índice n de $\rho\,e^{i\theta}$ são os números complexos z tais que:

$$z=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},\ \text{com } k\in\mathbb{Z}$$

NOTA

As raízes de índice n de um número complexo também se designam por raízes de ordem n.

Tem-se, assim, que todas as raízes de índice n de $\rho\,e^{i\theta}$:

- têm módulo $\sqrt[n]{\rho}$ (os seus afixos estão à distância $\sqrt[n]{\rho}$ da origem);
- os seus argumentos são: $\frac{\theta}{n}$, $\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}$, $\frac{\theta}{2}+2\times\frac{2\pi}{n}$, etc.

Portanto, os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Para $k=0$, vem $z_0=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{n}}$.

Para $k=1$, vem $z_1=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$.

Para $k=2$, vem $z_2=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\times\frac{2\pi}{n}\right)}$.

...

Para $k=n-1$, vem $z_{n-1}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}$.

Para $k=n$, vem $z_n=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+n\frac{2\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{n}}=z_0$.

Para $k=n+1$, vem $z_{n+1}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n+1)\frac{2\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}=z_1$.

etc.

Em geral, se $k\in\mathbb{Z}$, então k pode escrever-se na forma $qn+r$, onde $0\leqslant r<n$ e $q\in\mathbb{Z}$. Então:

$\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2(qn+r)\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+r\frac{2\pi}{n}+2q\pi\right)}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+r\frac{2\pi}{n}\right)}$ e, para valores distintos de $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ todas estas raízes são distintas pois não diferem de um múltiplo de 2π.

Portanto, o número complexo $w=\rho e^{i\theta}$ tem as n raízes de índice n distintas seguintes:

$$\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{n}},\ \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)},\ \ldots,\ \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Conclusão:

Dado um número complexo $w=\rho e^{i\theta}$ ($\rho>0$ e $\theta\in\mathbb{R}$) e um número natural $n\geqslant 2$, existem n raízes de índice n de w, as quais são dadas por:

$$z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k=0,1,\ldots,n-1$$

Como as raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ têm todas o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e os seus argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$, tem-se:

Os afixos das raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ ($\rho>0$ e $\theta\in\mathbb{R}$) dispõem-se ao longo de uma circunferência de centro na origem e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$.

Se $n>2$, esses afixos são vértices de um polígono regular de n lados.

Assim, dado um número complexo não nulo:

- os afixos das suas raízes cúbicas são vértices de um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência centrada na origem;
- os afixos das suas raízes quartas são vértices de um quadrado, inscrito numa circunferência centrada na origem;
- os afixos das suas raízes quintas são vértices de um pentágono regular, inscrito numa circunferência centrada na origem;
- etc.

Tem-se ainda que os afixos das duas raízes quadradas de um número complexo não nulo são simétricos relativamente à origem.

Exercícios resolvidos

1. Considera o número complexo $z = -8i$.

a) Determina, na forma trigonométrica, as raízes sextas de z.

b) Representa, no plano de Argand, o polígono cujos vértices são os afixos das raízes sextas de z e determina o seu perímetro.

c) Uma das raízes sextas de z tem o seu afixo no primeiro quadrante. Determina-a na forma $x + yi$.

d) Utiliza a fórmula do binómio de Newton para elevar à sexta o número obtido na alínea anterior e confirma que se obtém z.

Resolução

a) Tem-se $-8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

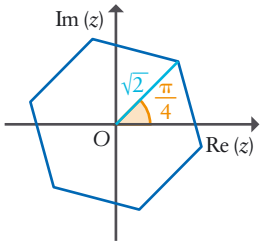
Portanto, as raízes sextas de $-8i$ são dadas por $\sqrt[6]{8}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}}$, ou seja, $\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi+4k\pi}{12}}$, com $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$k = 0 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad k = 1 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $\quad k = 2 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$k = 3 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{15\pi}{12}}$ $\quad k = 4 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}}$ $\quad k = 5 \longrightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{23\pi}{12}}$

b) Os afixos das seis raízes de índice 6 de $-8i$ são vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{2}$.

Ora, num hexágono regular, cada lado tem comprimento igual ao raio da circunferência circunscrita. Por isso, o perímetro do hexágono é $6\sqrt{2}$.



c) $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$

d) Como $1 + i$ é uma das raízes sextas de $-8i$, $(1+i)^6$ terá de ser igual a $-8i$. Confirmemos que assim é:

$$(1+i)^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6 =$$
$$= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i$$

2. **a)** Mostra que as raízes de índice n de um número complexo estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

b) Uma das raízes cúbicas de um número complexo w é $1 + \sqrt{3}i$.

Utiliza a propriedade da alínea a) para calcular as outras duas raízes cúbicas de w.

c) Calcula a soma das três raízes cúbicas referidas na alínea b).

d) Utiliza a propriedade da alínea a) para mostrar que a soma das n raízes de índice n de um número complexo é igual a zero.

e) Utiliza a propriedade da alínea d) para mostrar que:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

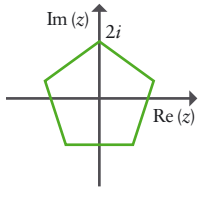
continua ▶

46 Determina, na forma trigonométrica, os números complexos que são as raízes quintas de $32i$ e representa, no plano de Argand, o polígono cujos vértices são os afixos desses números complexos.

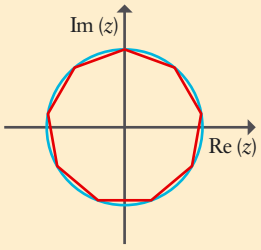
PROFESSOR

Soluções

46. $2e^{i\frac{\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{10}}$



47 Na figura está representado um polígono regular com nove lados, inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.



Tal como a figura sugere, um dos vértices pertence ao eixo imaginário.

a) O polígono tem um lado paralelo ao eixo real. Um dos extremos desse lado é um vértice do polígono que pertence ao quarto quadrante. Determina, na forma trigonométrica, o número complexo cujo afixo é esse vértice (na tua resposta, apresenta o argumento que pertence a $[0, 2\pi[$).

b) Os vértices do polígono são os afixos das raízes de índice 9 de um certo número complexo. Escreve esse número complexo na forma $x + yi$.

continuação

Resolução

a) As raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ são dadas por $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ de onde vem $\dfrac{z_{k+1}}{z_k} = \dfrac{\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n}}}{\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}} = e^{i\left(\frac{\theta+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, pelo que as raízes de índice n de um número complexo estão efetivamente em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

b) Como as raízes de índice 3 de um número complexo w estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, podemos, a partir do conhecimento de uma delas, obter as restantes multiplicando sucessivamente por $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Tem-se $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Vem, então:

- $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = -2$
- $2e^{i\pi} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - \sqrt{3}i$

Portanto, as outras duas raízes cúbicas de w são -2 e $1 - \sqrt{3}i$.

c) Tem-se $1 + \sqrt{3}i + (-2) + 1 - \sqrt{3}i = 0$.

d) Tem-se:

- uma das raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ é $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$;
- as n raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Recordemos que a fórmula que dá a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica de números reais é $a \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$ (a é a primeira parcela e r é a razão da progressão). Como a validade desta fórmula apenas depende de propriedades aritméticas que se mantêm nos números complexos, também se aplica a progressões geométricas em $\mathbb{C}$.

Aplicando esta fórmula, vem que a soma das n raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ é:

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \times \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \times \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \times 0 = 0$$

continua

PROFESSOR

Soluções

47. a) $\sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$ **b)** $16\sqrt{2}i$

continuação

e) Os números $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ e $\cos\frac{6\pi}{7}$ são as partes reais de $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$ e $e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

Tem-se que $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$ e $e^{i\frac{6\pi}{7}}$ são três raízes de índice 7 de 1.

As restantes quatro são $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$ e $e^{2\pi i}$.

Tem-se $e^{i\frac{2\pi}{7}}+e^{i\frac{4\pi}{7}}+e^{i\frac{6\pi}{7}}+e^{i\frac{8\pi}{7}}+e^{i\frac{10\pi}{7}}+e^{i\frac{12\pi}{7}}+e^{2\pi i}=0$, pelo que é nula a soma das partes reais destes números complexos:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+\cos(2\pi)=0$$

Portanto,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\left(2\pi-\frac{6\pi}{7}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{7}\right)+$$

$$+\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+1=0,$$

pelo que $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=-1$.

Então, $2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=-1$, pelo que:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

3. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4+8iz=0$.

Apresenta as soluções na forma $x+yi$.

Resolução

$z^4+8iz=0 \Leftrightarrow z(z^3+8i)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^3+8i=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^3=-8i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^3=8e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z=2e^{i\frac{7\pi}{6}} \vee z=2e^{i\frac{11\pi}{6}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=2i \vee z=-\sqrt{3}-i \vee z=\sqrt{3}-i$

continua

48 Resolve, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes.

a) $z^4+2=-\sqrt{12}i$

b) $z^5=z$ (apresenta as soluções na forma $x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$)

c) $z^2+\frac{8i}{z}=0$ (apresenta as soluções na forma $x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$)

PROFESSOR

Soluções

48. a) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

b) 0, 1, i, -1, $-i$

c) $2i$, $-\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}-i$

continuação

4. Determina as raízes quadradas de $-8+6i$.

Resolução

As raízes quadradas de $-8+6i$ são os números complexos z tais que $z^2=-8+6i$.

Vamos, neste caso, trabalhar na forma que designámos por forma algébrica.

Seja $z=x+yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Note-se que z não é real, nem imaginário puro, pelo que $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Tem-se:

$$(x+yi)^2=-8+6i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-8+6i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2=-8 \wedge 2xy=6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-y^2=-8 \wedge y=\frac{3}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{9}{x^2}=-8 \wedge y=\frac{3}{x}$$

Ora,

$$x^2-\frac{9}{x^2}=-8 \Leftrightarrow x^4-9=-8x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2)^2+8x^2-9=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{-8\pm 10}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=-9 \vee x^2=1$$

Como $x \in \mathbb{R}$, terá de ser $x^2=1$, donde vem $x=1 \vee x=-1$.

Para $x=1$, vem $y=\frac{3}{1}=3$ e, para $x=-1$, vem $y=\frac{3}{-1}=-3$.

Assim, as raízes quadradas de $-8+6i$ são $1+3i$ e $-1-3i$.

49 Determina as raízes quadradas de $-5-12i$.

Apresenta essas raízes quadradas na forma $x+yi$.

Nota

Cada número complexo tem duas raízes quadradas, que são simétricas uma da outra. Em particular, os números reais negativos, que, em $\mathbb{R}$, não têm raiz quadrada, têm raiz quadrada em $\mathbb{C}$.

As raízes quadradas de -1 são i e $-i$, pois $i^2=(-i)^2=-1$.

As raízes quadradas de -4 são $2i$ e $-2i$, pois $(2i)^2=(-2i)^2=-4$.

As raízes quadradas de -9 são $3i$ e $-3i$.

As raízes quadradas de -5 são $\sqrt{5}\,i$ e $-\sqrt{5}\,i$.

etc.

De um modo geral, tem-se: se a é um número real negativo, as suas raízes quadradas em $\mathbb{C}$ são $\sqrt{|a|}\,i$ e $-\sqrt{|a|}\,i$.

PROFESSOR

Soluções

49. $-2+3i$, $2-3i$

Mais sugestões de trabalho

Exercícios propostos n.os 85 a 97 (págs. 162 e 163).

Equações do segundo grau

Dada uma equação do segundo grau, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, a sua fórmula resolvente em $\mathbb{R}$ é, como sabemos, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Consideremos, por exemplo, a equação $x^2-2x+2=0$.

Esta equação não tem solução em $\mathbb{R}$, pois $b^2-4ac=-4$, que é um número negativo.

No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, tem-se:

$$x^2-2x+2=0 \overset{*}{\Longleftrightarrow} (x-1)^2=-1 \Longleftrightarrow x-1=-i \vee x-1=i \Longleftrightarrow x=1-i \vee x=1+i$$

Repara que, se aplicassemos a fórmula resolvente, convencionando que a expressão $\sqrt{-4}$ representa os números $-2i$ e $2i$, também iríamos obter estas soluções:

$$x^2-2x+2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{-4}}{2} \Longleftrightarrow x=\frac{2\pm 2i}{2} \Longleftrightarrow x=1\pm i$$

De um modo geral, tem-se:

Dada uma equação do segundo grau, $ax^2+bx+c=0$, com $a, b, c\in\mathbb{R}$, se o binómio discriminante b^2-4ac for negativo, a equação tem duas soluções em $\mathbb{C}$**, que são dadas por:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a} \quad \text{e} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}$$

Note-se que z_1 e z_2 são números complexos conjugados.

Exercícios resolvidos

1. Considera a equação $x^3-3x^2+6x-4=0$.

Resolve-a em $\mathbb{C}$, sabendo que uma das soluções é 1.

Resolução

Como 1 é solução da equação $x^3-3x^2+6x-4=0$, o polinómio x^3-3x^2+6x-4 é divisível por $x-1$.

Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini.

	1	−3	6	−4
1		1	−2	4
	1	−2	4	0

Portanto, $x^3-3x^2+6x-4=0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2-2x+4)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x-1=0 \vee x^2-2x+4=0$

Dado que $(-2)^2-4\times 1\times 4=4-16=-12$, tem-se:

$$x-1=0 \vee x^2-2x+4=0 \Longleftrightarrow x=1 \vee x=\frac{2\pm i\sqrt{|-12|}}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x=1 \vee x=\frac{2\pm i\sqrt{12}}{2} \Longleftrightarrow x=1 \vee x=1\pm\sqrt{3}i$$

As soluções da equação são, portanto, 1, $1-\sqrt{3}i$ e $1+\sqrt{3}i$.

continua ▶

NOTAS

* Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, tem-se:

$ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

** Já vimos que, sendo $a, b, c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, $ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Se $b^2-4ac<0$, as soluções são dadas por $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|}\,i$.

50 Resolve, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes.

a) $z^2+17=2z$

b) $z^3-6z^2+13z=0$

c) $z^4-5z^2=36$

Calculadoras gráficas

Casio fx-CG 20 ..... pág. 185
TI-84 C SE / CE-T .... pág. 190
TI-Nspire CX ..... pág. 195

PROFESSOR

Soluções

50. a) $1-4i$, $1+4i$

b) 0, $3-2i$, $3+2i$

c) $-2i$, $2i$, -3, 3

continuação

2. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$.

Resolução

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x^2 = 5 \vee x^2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{3}i \vee x = \sqrt{3}i$$

3. **a)** Mostra que, para qualquer número natural n e para qualquer número complexo z, se tem $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.

b) Seja $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

Considera, em $\mathbb{C}$, a equação $P(x) = 0$.

b₁) Mostra que, se z é solução da equação, então $\overline{z}$ também é.

b₂) Resolve a equação, sabendo que uma das soluções é da forma bi, com $b \in \mathbb{R}^+$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

a) Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

Tem-se: $(\overline{z})^n = \left(\overline{\rho e^{i\theta}}\right)^n = \left(\rho e^{-i\theta}\right)^n = \rho^n e^{-in\theta} = \overline{\left(\rho^n e^{in\theta}\right)} = \overline{z^n}$

b₁) Suponhamos, então, que z é uma solução da equação $P(x) = 0$.

Tem-se, assim, que $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$.

Vem:

$$(\overline{z})^4 + 2(\overline{z})^3 + 3(\overline{z})^2 + 2\overline{z} + 2 = \overline{z^4} + \overline{2} \times \overline{z^3} + \overline{3} \times \overline{z^2} + \overline{2} \times \overline{z} + \overline{2} =$$

$$= \overline{z^4} + \overline{2z^3} + \overline{3z^2} + \overline{2z} + \overline{2} = \overline{z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2} = \overline{0} = 0,$$

o que comprova que $\overline{z}$ é também uma solução da equação $P(x) = 0$.

b₂) Sabemos que uma das soluções é da forma bi.

Então:

$$(bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 2(bi) + 2 = 0$$

$$(bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 2(bi) + 2 = 0 \Leftrightarrow b^4 - 2b^3 i - 3b^2 + 2bi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 3b^2 + 2 = 0 \\ -2b^3 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 3b^2 + 2 = 0 \\ 2b\left(-b^2 + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 3b^2 + 2 = 0 \\ b = 0 \vee b^2 = 1 \end{cases}$$

Dado que $b \in \mathbb{R}^+$, tem-se $b = 0 \vee b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

E esse valor é a solução do sistema, pois $1^4 - 3 \times 1^2 + 2 = 0$.

Se $b = 1$, então $bi = i$.

Tendo em consideração a alínea anterior, se uma das soluções da equação $P(x) = 0$ é da forma bi, existe outra da forma $-bi$.

continua

continuação

Como i é solução da equação $P(x) = 0$, $\bar{i}$ (igual a $-i$) também é solução, pelo que sabemos que existe um polinómio $Q(x)$ tal que:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 1)\, Q(x)^*$$

Façamos a divisão de $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ por $x^2 + 1$, para determinarmos $Q(x)$.

Tem-se:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & +3x^2 & +2x & +2 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -x^2 & & & x^2+2x+2 \\ \cline{1-5}
0 & 2x^3 & +2x^2 & +2x & +2 & \\
 & -2x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & 2x^2 & 0 & +2 & \\
 & & -2x^2 & & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Portanto,

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = i \vee x = -i \vee x = \frac{-2 \pm i\sqrt{|4-8|}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = i \vee x = -i \vee x = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = i \vee x = -i \vee x = -1 + i \vee x = -1 - i$$

4. Determina números complexos z e w, tais que $z + w = 2$ e $zw = 10$.

in *Caderno de Apoio*, 12.º ano

Resolução

$$\begin{cases} z + w = 2 \\ zw = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 - z \\ z(2-z) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 - z \\ 2z - z^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 - z \\ -z^2 + 2z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 - z \\ z^2 - 2z + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 - z \\ z = 1 + 3i \vee z = 1 - 3i \end{cases}$$

Para $z = 1 + 3i$, vem $w = 2 - (1 + 3i) = 1 - 3i$.

Para $z = 1 - 3i$, vem $w = 2 - (1 - 3i) = 1 + 3i$.

Portanto, os números complexos cuja soma é 2 e cujo produto é 10 são $1 - 3i$ e $1 + 3i$.

NOTA

* Seja $P(x)$ um polinómio cujos coeficientes são números reais.

Vimos que, se w é uma solução imaginária da equação $P(x) = 0$, então $\bar{w}$ também é solução.

Sabemos (do 10.º ano) que, se a e b são soluções reais da equação $P(x) = 0$, então existe um polinómio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-a)(x-b)\,Q(x)$.

De modo análogo, se w é uma solução imaginária da equação $P(x) = 0$, vai existir um polinómio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-w)(x-\bar{w})\,Q(x)$.

No nosso caso, como i é solução da equação $P(x) = 0$, vai existir $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-i)(x+i)\,Q(x)$, ou seja, $P(x) = (x^2+1)\,Q(x)$.

51 Determina dois números complexos cuja soma seja igual a 6 e cujo produto seja igual a 13.

NOTA

De um modo geral, os números complexos cuja soma é S e cujo produto é P são as soluções da equação $x^2 - Sx + P = 0$.

PROFESSOR

Soluções

51. $3 - 2i$ e $3 + 2i$

Caça aos erros!

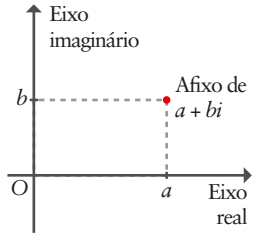
Caderno de exercícios

Raízes de um número complexo

Mais sugestões de trabalho

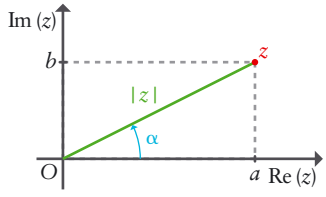
Exercícios propostos n.os 98 a 100 (pág. 163).
+Exercícios propostos (págs. 164 a 181).

Síntese

pp. 108 a 110	**Números complexos na forma $a+bi$. Parte real e parte imaginária de um número complexo**	Podemos representar um número complexo z na forma $a+bi$. A a dá-se o nome de **parte real** de z e representa-se por $\mathbf{Re}(z)$. A b dá-se o nome de **parte imaginária** de z e representa-se por $\mathbf{Im}(z)$. Ao número complexo i dá-se o nome de **unidade imaginária** e tem-se $i^2=-1$. Tem-se: $\text{Números complexos}\begin{cases}\text{Números reais}\\ \text{Números imaginários}\begin{cases}\text{Puros}\\ \text{Não puros}\end{cases}\end{cases}$ Dado um número complexo $z=a+bi$, tem-se: • z é real $\Leftrightarrow \text{Im}(z)=0$ • z é imaginário $\Leftrightarrow \text{Im}(z)\neq 0$ • z é imaginário puro $\Leftrightarrow \text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq 0$
p. 108	**Igualdade de números complexos**	$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$
p. 109	**Adição e multiplicação de números complexos**	Podemos adicionar e multiplicar números complexos como se fossem polinómios em i, tendo em consideração que $i^2=-1$.
pp. 108 e 111	**Potência de expoente natural de um número complexo**	Define-se z^n, com $z\in\mathbb{C}$ e $n\in\mathbb{N}$, da seguinte forma: $z^1=z$ e, se $n>1$, $z^n=\underbrace{z\times\ldots\times z}_{n \text{ fatores}}$ As regras das potências mantêm-se válidas em $\mathbb{C}$. Tem-se: • $i^1=i$ • $i^2=-1$ • $i^3=-i$ • $i^4=1$ • $i^{4n+p}=i^p$, com n e p naturais (exemplo: $i^{55}=i^{4\times 13+3}=i^3=-i$)
p. 111	**Representação de um número complexo num referencial ortonormado**	Dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e sendo a e b números reais, ao ponto de coordenadas (a, b) dá-se o nome de **afixo** do número complexo $z=a+bi$.  Neste contexto, esse plano é designado por **plano complexo** ou **plano de Argand**. Ao eixo das abcissas dá-se o nome de **eixo real**. Ao eixo das ordenadas dá-se o nome de **eixo imaginário**.

pp. 114, 115, 123 e 125	**Conjugado de um número complexo. Divisão de números complexos**	Dado um número complexo $z = a + bi$, dá-se o nome de **conjugado de z** ao número complexo $\overline{z} = a - bi$.
		
		O quociente de z por w $(w \neq 0)$ é o número complexo que multiplicado por w é igual a z e representa-se por $\frac{z}{w}$. Pode ser obtido multiplicando ambos os termos da fração $\frac{z}{w}$ pelo conjugado do denominador $\left(\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}\right)$.
		
		Propriedades
		Sejam z e w números complexos. Tem-se:
		• $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ • $\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$
		• $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $(w \neq 0)$ • $\overline{\overline{z}} = z$
		• $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ e $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
		• se $z \neq 0$, então:
		  • z é um número real se e só se $z = \overline{z}$;
		  • z é um número imaginário puro se e só se $z = -\overline{z}$.

pp. 117 a 119, 125 e 126	**Módulo de um número complexo**	Dado um número complexo $z = a + bi$, dá-se o nome de **módulo de z**, e representa-se por $\lvert z \rvert$, à medida da distância, no plano de Argand, entre a origem do referencial e o afixo de z. Tem-se $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$. Um número complexo diz-se **unitário** se o seu módulo for igual a 1. **Propriedades** Sejam z e w números complexos. Tem-se: • $\lvert zw \rvert = \lvert z \rvert \lvert w \rvert$ • $\left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert}$, $w \neq 0$ • $\lvert z + w \rvert \leqslant \lvert z \rvert + \lvert w \rvert$ (desigualdade triangular) • se A é o afixo de z e B é o afixo de w, então $\overline{AB} = \lvert z - w \rvert$; • $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\lvert z \rvert = \lvert \overline{z} \rvert$ • $\lvert z \rvert^2 = z\overline{z}$
pp. 126, 127 e 133	**Argumento de um número complexo. Argumento principal de um número complexo**	**Argumento** de um número complexo não nulo é a medida da amplitude (em radianos) de um ângulo generalizado cujo lado origem é o semieixo positivo das abcissas e cujo lado extremidade é a semirreta que tem origem no ponto O e que passa no afixo de z. Dados dois argumentos de um mesmo número complexo, eles diferem de $2k\pi$, para um certo número inteiro k. Chama-se **argumento principal** de um número complexo não nulo ao argumento que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$. O argumento principal de z designa-se por $\mathrm{Arg}(z)$.

p. 128	Exponencial complexa	Seja α um número real. Define-se $e^{i\alpha}$ da seguinte forma: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$. A expressão $e^{i\alpha}$ designa-se por **exponencial complexa de $i\alpha$** . **Propriedades** • $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta}$ • $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i\alpha - i\beta}$
pp. 129 a 140	Forma trigonométrica de um número complexo	Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo. Seja α um argumento de z . Tem-se $\cos\alpha = \dfrac{a}{\lvert z\rvert}$ e $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{\lvert z\rvert}$, de onde vem: $z = \lvert z\rvert(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = \lvert z\rvert e^{i\alpha}$  A esta forma de escrever um número complexo não nulo dá-se o nome de **forma trigonométrica**. Se $a \neq 0$, tem-se $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$. **Propriedades** Para $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ e para $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, tem-se: • $\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ • $-\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\pi+\theta)}$ • $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{i(-\theta)}$ • $(\rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2}) = (\rho_1 \rho_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ • $\dfrac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ • $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$, pelo que $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
pp. 142 a 144	Raízes de um número complexo	Dado um número natural $n \geqslant 2$ e um número complexo w , diz-se que z é uma **raiz de índice n de w** se $z^n = w$. Se $w = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$), existem n raízes de índice n de w , as quais são dadas por: $z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ **Propriedade** Os afixos das raízes de índice n de $\rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$) dispõem-se ao longo de uma circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a $\sqrt[n]{\rho}$. Se $n > 2$, esses afixos são vértices de um polígono regular de n lados.
p. 149	Equações do segundo grau	Dada uma equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), se o binómio discriminante $b^2 - 4ac$ for negativo, a equação tem duas soluções em $\mathbb{C}$, que são dadas por: $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{\lvert b^2 - 4ac\rvert}}{2a}$ e $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{\lvert b^2 - 4ac\rvert}}{2a}$ Note-se que z_1 e z_2 são números complexos conjugados.

pp. 112, 114 e 134 a 137	Operações com números complexos e transformações geométricas	**Adição** Sendo Z o afixo de z e W o afixo de w, adicionar z com w corresponde a aplicar a Z a translação associada ao vetor $\overrightarrow{OW}$, sendo O a origem do referencial. **Conjugado** O afixo de $\bar{z}$ pode ser obtido aplicando ao afixo de z uma reflexão em relação ao eixo real. **Simétrico** O afixo de $-z$ pode ser obtido aplicando ao afixo de z uma reflexão em relação à origem do referencial. **Produto por um número real positivo** Sendo r um número real positivo, o afixo de rz pode ser obtido aplicando ao afixo de z uma homotetia de centro na origem do referencial e razão r. **Produto por $e^{i\theta}$** O afixo de $e^{i\theta}z$ pode ser obtido aplicando ao afixo de z uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude θ. Em particular, o afixo de iz pode ser obtido aplicando ao afixo de z uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$.
pp. 113, 120, 121, 133 e 134	Condições em $\mathbb{C}$ e sua representação no plano complexo	• $\text{Re}(z) = a$ Reta paralela ao eixo imaginário que interseta o eixo real no ponto de abcissa a. • $\text{Im}(z) = b$ Reta paralela ao eixo real que interseta o eixo imaginário no ponto de ordenada b. • $\lvert z - z_1 \rvert = r \quad (r > 0)$ Circunferência de centro no afixo de z_1 e raio r. • $\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$ Mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de z_1 e de z_2. • $\text{Arg}(z) = \alpha \quad (\alpha \in]-\pi, \pi])$ Semirreta de origem na origem do referencial e que é o lado extremidade do ângulo generalizado de amplitude α cujo lado origem é o semieixo positivo real. • $\text{Arg}(z - z_1) = \alpha \quad (\alpha \in]-\pi, \pi])$ Semirreta que é imagem da semirreta definida por $\text{Arg}(z) = \alpha$ pela translação associada ao vetor $\overrightarrow{OZ_1}$ (sendo Z_1 o afixo de z_1).

Teste 3

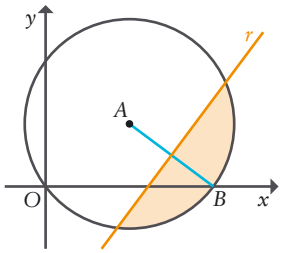
Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Seja z um número complexo cujo argumento principal é $\frac{3\pi}{5}$ e seja $w = 1 - i$.
Qual é o valor de $\operatorname{Arg}\left(\frac{iz}{w}\right)$?

(A) $-\frac{13\pi}{20}$ **(B)** $-\frac{7\pi}{20}$ **(C)** $\frac{7\pi}{20}$ **(D)** $\frac{13\pi}{20}$

2. Na figura está representada, no plano de Argand, uma circunferência de centro no ponto $A(4, 3)$ e que passa na origem do referencial.
O ponto B pertence a esta circunferência e ao eixo das abcissas.
A reta r é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.



Qual das condições seguintes define, em $\mathbb{C}$, a região colorida, incluindo a fronteira?

(A) $|z-4+3i| \leqslant 5 \wedge |z-8| \leqslant |z-4+3i|$
(B) $|z-4-3i| \leqslant 5 \wedge |z-8| \leqslant |z-4-3i|$
(C) $|z-4+3i| \leqslant 6 \wedge |z-6| \leqslant |z-4+3i|$
(D) $|z-4-3i| \leqslant 6 \wedge |z-6| \leqslant |z-4-3i|$

3. Indica quantos são os números naturais que cumprem as três condições seguintes:
- são pares;
- escrevem-se com três algarismos;
- os algarismos são todos diferentes.

(A) 328 **(B)** 346 **(C)** 362 **(D)** 384

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).
Sabe-se que:
- a probabilidade de pelo menos um destes acontecimentos não se realizar é 0,8;
- a probabilidade de A se realizar, sabendo que B se realizou, é 0,4.

Qual é a probabilidade de B se realizar?

(A) 0,45 **(B)** 0,5 **(C)** 0,55 **(D)** 0,6

5. Seja a um número real superior a 1 e seja b tal que $\log_a(b) = \frac{5}{2}$.
Qual é o valor de $\log_a\left(\frac{a^6 b}{\sqrt{a}}\right)$?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9

PROFESSOR

Soluções

1. (A)
2. (B)
3. (A)
4. (B)
5. (C)

Ajuda

Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Seja f a função definida em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ por $f(x)=\frac{2-\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

a) Estuda a função f quanto às assíntotas ao seu gráfico.

b) Verifica que $f'(x)=\frac{2\operatorname{sen} x-1}{\cos^2 x}$.

c) Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

d) Estuda a função f quanto à monotonia e extremos.

e) Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

2. A massa, medida em gramas, de uma substância radioativa varia de acordo com uma função do tipo $m(t)=a\,e^{bt},\ t\geqslant 0$, onde:

- t designa o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial;
- a é a massa da substância nesse instante inicial;
- b é uma constante que depende da substância.

Chama-se semivida de uma substância radioativa ao tempo que a sua massa demora a reduzir-se a metade da existente no instante inicial.

O carbono-14 é uma substância radioativa utilizada na datação de fósseis em que esteja presente. O carbono-14 tem uma semivida de 5730 anos.

Admite que a massa de carbono-14 hoje presente num fóssil é 3,76 g. Qual será a massa de carbono-14 presente nesse fóssil daqui a 500 anos? Apresenta o resultado em gramas, arredondado às centésimas.

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera:

$$z=-2+\sqrt{12}\,i \quad \text{e} \quad w=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

a) Determina $\frac{7+i}{w^6-zw-1}$. Apresenta o resultado na forma $x+yi\ \ (x, y\in\mathbb{R})$.

b) Determina $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\alpha\in[-2\pi, 0]$ tal que $\rho\,e^{i\alpha}=-\overline{w}$.

4. Considera, no plano de Argand, o polígono cujos vértices são as raízes cúbicas de um certo número complexo z. Sabe-se que um dos vértices do polígono é o ponto $A(3, 2)$.

a) Determina a área desse polígono.

b) Determina z. Apresenta o resultado na forma $x+yi\ \ (x, y\in\mathbb{R})$.

5. Seja $ax^2+bx+c=0\ \ (a, b, c\in\mathbb{R})$ uma equação do segundo grau cujas soluções são dois números imaginários, z e w. Mostra que $\frac{z}{w}$ é um número complexo unitário.

PROFESSOR

Soluções

1. a) Como D_f é limitado, só podem existir assíntotas verticais. As retas de equações $x=-\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f.

c) $y=-x+2$

d) f é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

A função tem mínimo absoluto para $x=\frac{\pi}{6}$ e tem-se $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

e) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

2. $\approx 3{,}54$ gramas

3. a) $1-i$

b) $\rho=\sqrt{2}$ e $\alpha=-\frac{13\pi}{12}$

4. a) $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

b) $-9+46i$

Resolução

Exercícios propostos

52 Determina, apresentado as respostas na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) $1 + i + \dfrac{i}{1+i}$

b) $i^{11}(1+3i)^2$

c) $\dfrac{-6+3i+i^{31}}{1-2i}$

d) $2i + \dfrac{(4-3i)^2}{i}$

e) $i^{23} + \dfrac{2+i}{1-i}$

f) $\dfrac{(2+i)^2 + i^{40} + 6i^{27}}{1+2i}$

g) $\dfrac{3-2i+(3-2i)^2+2i^{43}}{-8i}$

h) $\dfrac{(1+2i)(3+i)+i^8+i^{15}}{3i}$

53 Determina os números reais p e q tais que $2(p+qi) = q - pi - 2(1-i)$.

54 Determina os números reais a e b tais que $(a+i)\,(2-bi) = 7 - i$.

55 Seja $z = 1 + i$.

Determina os números reais a e b para os quais $z^2 + az + b = 0$.

56 Determina, apresentado as respostas na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

a) $\dfrac{(-3+2i)^2 + 3 + 4i^{35}}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

b) $\left(3 - 4i - \dfrac{1}{i}\right)^5$

c) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{9}\right)^9 + (2+i)^3}{i}$

57 Determina, apresentado as respostas na forma trigonométrica.

a) $\dfrac{-2ie^{i\frac{\pi}{6}}}{1+\sqrt{3}i}$

b) $\dfrac{4i\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 + 8}{3+i}$

c) $\dfrac{-2\sqrt{3} + 4e^{i\frac{11\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{5}}}$

58 Seja $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Determina $z_1 + \dfrac{z_2}{z_3}$.

Apresenta a resposta na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

59 Seja $z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $w = -3 + 3\sqrt{3}i$.

Determina $\dfrac{zw}{z+w}$.

Apresenta a resposta na forma trigonométrica.

PROFESSOR

Soluções

52.a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

b) $6 + 8i$

c) $-2 - 2i$

d) $-24 - 5i$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

f) $-2i$

g) $2 + i$

h) $2 - \frac{2}{3}i$

53. $p = -\frac{2}{5}$; $q = \frac{6}{5}$

54. $a = 3$ e $b = 1$

55. $a = -2$ e $b = 2$

56. a) $4 + 2i$

b) $-972 + 972i$

c) $11 - i$

57. a) $e^{i\frac{4\pi}{3}}$

b) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c) $e^{i\frac{13\pi}{10}}$

58. $-1 - i$

59. $3e^{i\frac{\pi}{3}}$

60 Seja $w=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ e seja z um número complexo tal que $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{\pi}{2}$.
Determina o menor valor de n $(n\in\mathbb{N})$ tal que z^n é um número real.

61 Seja $z=1+i$ e seja $w=e^{i\alpha}$, com $\alpha\in[0,2\pi]$.
Sabe-se que $\overline{w}\times z$ é um número real negativo.
Determina o valor de α.

62 Determina o número real a para o qual $\dfrac{a+(1+2i)\,i^{83}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ é um número imaginário puro.

63 Seja z um número complexo tal que $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$.
Existe um número real a tal que $(a+i)^2=z$.
Determina esse valor de a.

64 Determina $a\in\left]0,\pi\right[$ e $b\in\mathbb{R}$ tais que:

$$\operatorname{sen}a-\cos a+bi=\frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

65 Determina $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ tal que $\dfrac{(e^{i\alpha})^5}{3i}$ seja um número real.

66 Determina $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ de tal modo que o afixo de $(3\,e^{i\alpha})^2\times\left(2+\sqrt{12}\,i\right)$ pertença à bissetriz do terceiro quadrante.

67 Seja z um número complexo cujo afixo pertence à circunferência de centro na origem e raio 2.
Qual é valor de $|z+1|^2+|z-1|^2$?

68 Seja z um número complexo tal que:

$$|z+16|=4\,|z+1|$$

Determina $|z|$.

69 Seja $z=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i}{2}$ e seja $w=1-i$.

a) Escreve z e w na forma trigonométrica.

b) Escreve $\frac{z}{w}$ na forma trigonométrica e na forma $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

c) Tendo em consideração a alínea anterior, escreve os valores exatos de $\cos\frac{\pi}{12}$ e de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

70 Seja $z=e^{2i\alpha}$, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Mostra que $|z-1|=2\operatorname{sen}\alpha$.

71 Seja $z=e^{2i\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.
Mostra que $\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{2}(1-i\operatorname{tg}\alpha)$.

72 De um número complexo z, sabe-se que $|z|=|z-3i|$.

a) Mostra que $\operatorname{Im}(z)=\frac{3}{2}$.

b) Mostra que $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{6}$, sabendo que $|z|=3$ e que o afixo de z está no primeiro quadrante.

73 Mostra que $|z|^2+|w|^2-|z-w|^2=z\overline{w}+\overline{z}w$.

74 Seja $z=e^{i\alpha}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.
Mostra que $\overline{z}^3+z=2\cos(2\alpha)\,e^{-i\alpha}$.

PROFESSOR

Soluções

60. 4

61. $\frac{5\pi}{4}$

62. -1

63. $\sqrt{3}$

64. $a=\frac{\pi}{2}$ e $b=-1$

65. $\frac{\pi}{10}$

66. $\frac{11\pi}{24}$

67. 10

68. 4

69. a) $z=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $w=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

c) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2.0 AULA DIGITAL

- **Resolução**
  Exercício 69 (resolução passo a passo)

75 Seja $z = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Mostra que α é argumento de $1 + z + z^2$.

76 Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Sejam z e w dois números complexos unitários tais que $\operatorname{Arg}(z) = \alpha$ e $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Mostra que $\operatorname{Arg}(z + w) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

77 Sejam A e B os afixos dos números complexos $1 + 6i$ e $\sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Determina $\overline{AB}$.

78 Seja α um argumento de um certo número complexo z. Sabe-se que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Seja $w = -3i\bar{z}$. Exprime $\operatorname{Arg}(w)$ em função de α.

79 Seja z um número complexo cujo afixo é um ponto A pertencente ao primeiro quadrante.

Sejam B e C os afixos de $\bar{z}$ e de $-z$, respetivamente. Sabe-se que $\overline{AB} = 8$ e que a área do triângulo $[ABC]$ é 24.

Determina z.

Apresenta a resposta na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

80 De dois números complexos z e w sabe-se que $|z| = 2$ e que $\operatorname{Arg}(w) = -\frac{\pi}{6}$.

a) Determina $z\bar{z} + \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^6$.

b) Seja Z o afixo de z, seja W o afixo de w e seja O a origem do referencial.

Sabe-se que:

- Z está no primeiro quadrante;
- o triângulo $[OZW]$ é retângulo em O e tem área 6.

Determina z e w na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

81 Considera o número complexo

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$$

e o número complexo $w = z^5$.

No plano de Argand, sejam Z e W os afixos de z e w, respetivamente, e seja O a origem do referencial.

a) Justifica que o ângulo ZOW é reto.

b) Determina a área do triângulo $[ZOW]$.

PROFESSOR

Soluções

77. 5

78. $-\frac{\pi}{2} - \alpha$

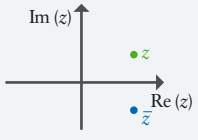
79. $3 + 4i$

80. a) 5

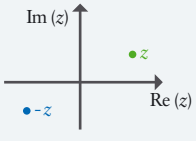
b) $z = 1 + \sqrt{3}i$; $w = 3\sqrt{3} - 3i$

81. b) 4

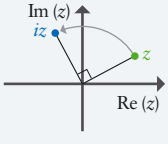
82. a)



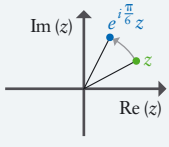
b)



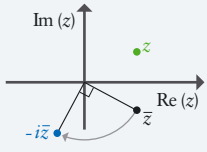
c)



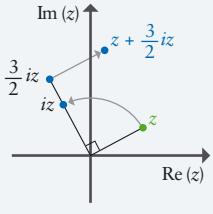
d)



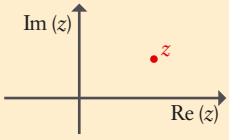
e)



f) $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)z = z + \frac{3}{2}iz$



82 Seja z um número complexo, cujo afixo, no plano de Argand, está representado na figura.



Determina geometricamente os afixos dos seguintes números complexos:

a) $\bar{z}$

b) $-z$

c) iz

d) $e^{i\frac{\pi}{6}}z$

e) $-i\bar{z}$

f) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)z$

83 Para cada uma das condições a seguir indicadas, representa, no plano de Argand, o conjunto dos afixos dos números complexos que a verificam.

a) $z\bar{z} \leqslant 9 \wedge z+\bar{z} < -2$

b) $|z-3i| \leqslant |z+2+i| \wedge \operatorname{Re}(z) \leqslant 4 \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant 0$

c) $|z-3-2i| \leqslant 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = 2$

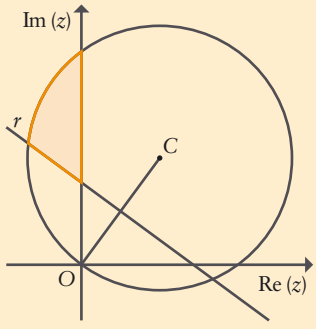
d) $2 \leqslant |z| \leqslant 4 \wedge \frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6}$

e) $|iz| \leqslant 4 \wedge |z| \geqslant |z+2-2i|$

f) $|-z-2-i| \leqslant \sqrt{5} \wedge \left(0 \leqslant \operatorname{Arg}(z+1+i) \leqslant \frac{\pi}{2} \vee \right.$
$\left. \vee (\operatorname{Re}(z) \leqslant -1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leqslant -1)\right)$

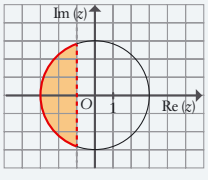
84 Na figura seguinte estão representados, no plano de Argand:

- o ponto $C(3, 4)$;
- o ponto O, origem do referencial;
- o segmento de reta $[OC]$;
- a reta r, que é a mediatriz do segmento de reta $[OC]$;
- a circunferência de centro no ponto C e que passa no ponto O.

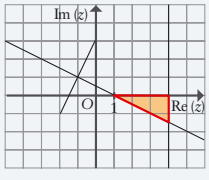


Escreve uma condição em $\mathbb{C}$ que defina a região colorida (incluindo a fronteira).

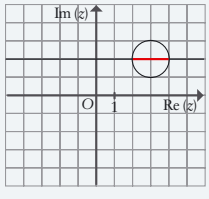
83. a)



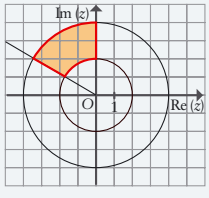
b)



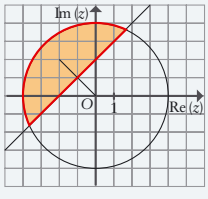
c)



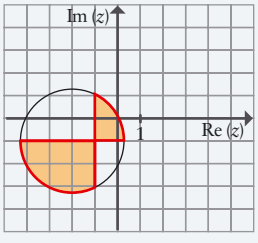
d)



e)



f)



84. $|z-(3+4i)| \leqslant 5 \wedge$
$\wedge\ |z| \geqslant |z-(3+4i)| \wedge$
$\wedge\ \operatorname{Re}(z) \leqslant 0$

85 Seja $z = 64i$.

a) Determina as raízes sextas de $64i$. Apresenta-as na forma trigonométrica.

b) Desenha o polígono cujos vértices são os afixos das raízes sextas de z.

c) Determina o perímetro e a área do polígono referido na alínea b).

20 AULA DIGITAL
- **Resolução**
Exercício 85 (resolução passo a passo)

86 Seja z um número complexo tal que $|z| = 36$.
Qual é a área do polígono cujos vértices são os afixos das raízes quartas de z?

87 Seja $z = 1 + i$ e seja $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{21\pi}{20}}$.
Mostra que z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo.

88 Uma das raízes cúbicas de um certo número complexo z é $3 - i$.
Determina z.

89 Uma das raízes quartas de um certo número complexo z é $2 + 3i$.
Determina as restantes raízes quartas de z.

90 Determina as raízes quadradas de $7 + 24i$, apresentando-as na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

91 Resolve a equação $z^5 + \frac{32}{i} = 0$.
Apresenta as soluções na forma trigonométrica.

92 Seja $z_1 = (2 - i)^3$ e seja $z_2 = \frac{7 + 39i}{3 + i}$.
Resolve a equação $z^3 - z_1 = z_2$.
Apresenta as soluções na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

93 Uma das soluções da equação $iz^3 - i = \sqrt{3}$ tem o seu afixo no segundo quadrante do plano de Argand. Determina essa solução, apresentando-a na forma trigonométrica.

94 Resolve a equação $z^2 + 2\bar{z} = 0$.
Apresenta as soluções na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

95 Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 + z = 0$.
Apresenta as soluções na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

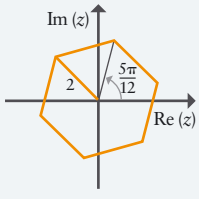
96 Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 - \bar{z} = 0$.
Apresenta as soluções não reais na forma trigonométrica.

PROFESSOR

Soluções

85. a) $2e^{i\frac{\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

b)



c) Perímetro: 12
Área: $6\sqrt{3}$

86. 12

88. $18 - 26i$

89. $-3 + 2i$, $-2 - 3i$, $3 - 2i$

90. $-4 - 3i$ e $4 + 3i$

91. $2e^{i\frac{\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{10}}$

92. -2, $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$

93. $\sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{9}}$

94. 0, -2, $1 - \sqrt{3}i$, $1 + \sqrt{3}i$

95. -1, 0, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

96. 0, 1, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$

97 Determina, na forma trigonométrica, os números complexos z não nulos tais que $(1-i)\overline{z}=z^2$.

98 Resolve, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações.

a) $x^2=-4$

b) $x^2+9=0$

c) $x^2+13=6x$

d) $x^3+25x=0$

e) $x^3-3x^2+4x=2$ (sabendo que 1 é solução)

f) $x^4+21x^2=100$

99 Sejam z e w as soluções da equação $x^2-4x+8=0$.

Sabe-se que o afixo de z está no primeiro quadrante.

a) Determina $\frac{z^4}{w^2}$, apresentando a resposta na forma trigonométrica.

b) Determina $\frac{z}{w}+\frac{w}{z}$.

c) Determina o menor valor natural de n tal que z^n é um número real.

100 Determina dois números complexos cuja soma seja igual a 8 e cujo produto seja igual a 25.

PROFESSOR

Soluções

97. $\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

98. a) $-2i$ e $2i$

b) $-3i$ e $3i$

c) $3-2i$ e $3+2i$

d) 0, $-5i$ e $5i$

e) 1, $1-i$ e $1+i$

f) -2, 2, $-5i$ e $5i$

99. a) $8\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

b) 0

c) 4

100. $4-3i$ e $4+3i$

+ Exercícios propostos

Itens de escolha múltipla

Números complexos

101 A igualdade $\text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}(z_1)\,\text{Re}(z_2)$:

(A) nunca é verdadeira.

(B) é verdadeira para todos os complexos.

(C) só é verdadeira se z_1 e z_2 forem reais.

(D) só é verdadeira se z_1 ou z_2 forem reais.

102 A igualdade $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$:

(A) nunca é verdadeira.

(B) é verdadeira para qualquer complexo z .

(C) é verdadeira se e só se z é um imaginário puro.

(D) só é falsa se z é real.

103 $(1-i)^2$ é igual a:

(A) 2

(B) 0

(C) $-2i$

(D) $(1+i)^2$

104 Seja z um número imaginário. O conjugado de $z+1$ é:

(A) $z-1$

(B) $1-z$

(C) $\bar{z}+1$

(D) $\bar{z}-1$

105 O inverso do número $2+2i$ é:

(A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

(B) $-2-2i$

(C) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

(D) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

106 Se $z = x+yi$ e $w = 1+i$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então:

(A) $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = x$

(B) $\text{Re}(z^2) = x^2$

(C) $\text{Im}(zw) = x+y$

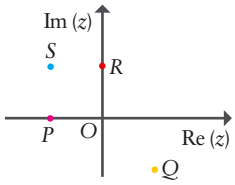
(D) $\text{Im}(z-w) = y$

PROFESSOR

Soluções

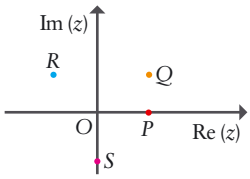
101. (D)
102. (B)
103. (C)
104. (C)
105. (D)
106. (C)

107 Seja w um qualquer número complexo. Qual dos pontos P, Q, R ou S pode ser o afixo de um número complexo da forma $w+\overline{w}$?



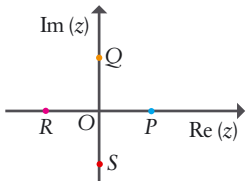
(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

108 Seja w um qualquer número complexo. Qual dos pontos P, Q, R ou S pode ser o afixo de um número complexo da forma $w-\overline{w}$?



(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

109 Seja w um qualquer número complexo. Qual dos pontos P, Q, R ou S pode ser o afixo de um número complexo da forma $w\overline{w}$?



(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

110 No conjunto dos números complexos, seja w um número real negativo. Os afixos das raízes quadradas de w pertencem:

(A) ao eixo real.

(B) às bissetrizes dos quadrantes ímpares.

(C) ao eixo imaginário.

(D) às bissetrizes dos quadrantes pares.

PROFESSOR

Soluções

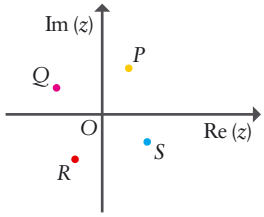
107. (A)

108. (D)

109. (A)

110. (C)

111 O ponto P é o afixo de $i^5 z$. Qual pode ser o afixo de z?



(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

112 Se $\text{Re}(iz) > 0$, então o afixo de z pertence:

(A) ao primeiro ou ao quarto quadrante.

(B) ao primeiro ou ao segundo quadrante.

(C) ao terceiro ou ao quarto quadrante.

(D) ao segundo ou ao terceiro quadrante.

113 O número $z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$ é um número real negativo se α é:

(A) 2π **(B)** $-\frac{\pi}{3}$ **(C)** π **(D)** $\frac{2\pi}{3}$

114 Qual dos números seguintes não é um imaginário puro?

(A) i^3 **(B)** $\frac{e^{i\pi}}{2}$ **(C)** $2\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$ **(D)** $\frac{2}{i}$

115 Se θ é argumento de z, então um dos argumentos de $3z$ é necessariamente:

(A) 3θ **(B)** $\frac{\theta}{3}$ **(C)** θ **(D)** θ^3

116 Seja z um número complexo de argumento $\frac{3\pi}{5}$.

Qual dos seguintes é um argumento do conjugado de z?

(A) $\frac{7\pi}{5}$ **(B)** $\frac{8\pi}{5}$ **(C)** $\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{2\pi}{5}$

117 Se $\text{Arg}(-z) = -\frac{\pi}{7}$, então:

(A) $\text{Arg}(\bar{z}) = \frac{13\pi}{7}$ **(B)** $-\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$

(C) $\text{Arg}(z) = \frac{6\pi}{7}$ **(D)** $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{7}{\pi}$

PROFESSOR

Soluções

111. (D)
112. (C)
113. (D)
114. (B)
115. (C)
116. (A)
117. (C)

118 Considera as afirmações relativas a números complexos z e w, quaisquer.

I. Se α é argumento de z, então $-\alpha$ é argumento de $-z$.

II. Se $w = a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Arg}(w) = -\frac{\pi}{4}$.

Pode dizer-se que:

(A) as duas afirmações são verdadeiras.

(B) as duas afirmações são falsas.

(C) a afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.

(D) a afirmação II é verdadeira e a afirmação I é falsa.

119 Se α é argumento de $z = 5 - 2i$, então um argumento de $w = 2 + 5i$ pode ser:

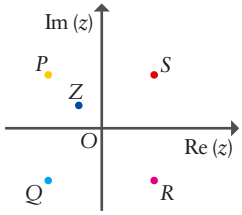
(A) $\frac{\pi}{2}\alpha$ **(B)** $\alpha + \frac{\pi}{2}$

(C) $\alpha - \frac{\pi}{2}$ **(D)** $\frac{\pi}{2} - \alpha$

120 Se o afixo do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante, a que quadrante pertence o afixo do número $w = 3z$?

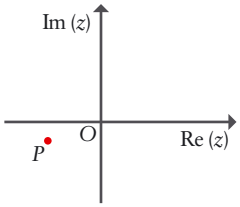
(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

121 Se Z é o afixo no plano complexo do número z, qual dos pontos P, Q, R ou S pode ser o afixo de $z2i^9$?



(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

122 Seja P o afixo do número complexo z e seja $w = e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$, um outro número complexo.



A que quadrante pertence o afixo do número zw?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

PROFESSOR

Soluções

118. (B)

119. (B)

120. (A)

121. (B)

122. (D)

123 Sejam z e w dois números complexos.

Se $\text{Arg}(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ e $\text{Arg}(w) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, a qual dos intervalos seguintes podes garantir que pertence o argumento principal de zw ?

(A) $\left[0, \frac{3\pi^2}{16}\right]$ **(B)** $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **(D)** $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

124 Sejam z e w dois números complexos, com $w \neq 0$.

Se $\text{Arg}(z) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\text{Arg}(w) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, a qual dos intervalos seguintes podes garantir que pertence um argumento de $\frac{z}{w}$?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ **(B)** $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

(C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **(D)** $\left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right]$

125 Seja $z = |z|\, e^{i\theta}$ um número complexo e sejam A e B os afixos de z e z^2 num referencial de origem O . Uma medida da amplitude do ângulo AOB é:

(A) θ **(B)** 2θ

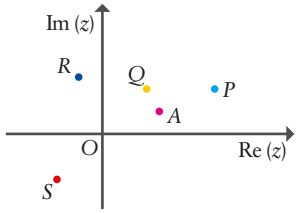
(C) 3θ **(D)** $\theta + \pi$

126 Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i\sqrt{2}$ dois números complexos. Sendo $w = \frac{z_2}{(z_1)^3}$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $w = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ **(B)** $w = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

(C) $w = \frac{1}{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$ **(D)** $w = \frac{1}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

127 Seja A o afixo do número complexo z .



O afixo do número z^2 pode ser:

(A) P **(B)** Q **(C)** R **(D)** S

PROFESSOR

Soluções

123. (B)

124. (B)

125. (A)

126. (C)

127. (B)

128 Seja $z = 1 + 2i$ um número complexo e seja α um seu argumento. A representação trigonométrica do número iz^2 pode ser:

(A) $5\,e^{i(\alpha^2 i)}$

(B) $5\,e^{i\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

(C) $\sqrt{5}\,e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

(D) $5\,e^{i(-2\alpha)}$

129 Seja z um número complexo de módulo 1 e argumento α.

Então, $z^n + \frac{1}{z^n}$ é igual a:

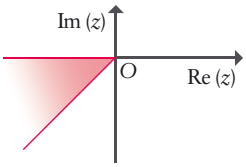
(A) $2\cos(n\alpha)$

(B) $2\,\text{sen}(n\alpha)$

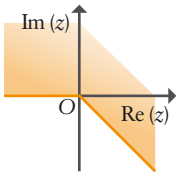
(C) e^{0i}

(D) $e^{i(2n\alpha+1)}$

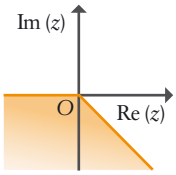
130 Se o afixo de uma raiz cúbica de um número complexo z pertence à região assinalada na figura seguinte, a qual das regiões podes garantir que pertence o afixo do número z?



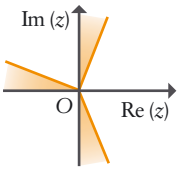
(A)



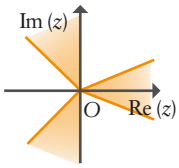
(B)



(C)



(D)



131 $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ são duas raízes de índice n de um número complexo w. Os seus afixos são vértices consecutivos do polígono cujos vértices são os afixos das raízes de índice n desse número w. Então, w é igual a:

(A) $4\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$

(B) $16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(C) $16\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}$

(D) $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

PROFESSOR

Soluções

128. (B)

129. (A)

130. (B)

131. (B)

132 Se $\text{Arg}(w^2) = \frac{\pi}{6}$, então um argumento de w pode ser:

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

(C) $\frac{\pi}{12}$

(D) $\frac{\pi^2}{36}$

133 A_k, com $k = 1, 2, 3, ..., n$, são os afixos das raízes de índice n de um certo número w.

Sabendo que, para um certo valor de k, A_k e A_{k+1} são os afixos de $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ e de $e^{i\frac{7\pi}{6}}$, respetivamente, então w é igual a:

(A) 1

(B) -1

(C) 6

(D) -6

134 Seja $w = e^{i\frac{\pi}{3}}$ um número complexo.

Então, $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5$ é igual a:

(A) $e^{i\frac{16\pi}{3}}$

(B) 0

(C) $e^{i(6\pi)}$

(D) $e^{i\frac{40\pi}{3}}$

135 Qual dos seguintes números complexos é representado no plano complexo por um ponto que não pertence ao círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$?

(A) O inverso de $2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(B) O conjugado de $2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(C) O simétrico de $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(D) O inverso de $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

136 Considera o número complexo $z = \sqrt{2} + \cos\frac{\pi}{4}i$.

O afixo de z pertence à região do plano complexo definida pela condição:

(A) $|z| = \sqrt{2}$

(B) $|z| > \frac{5}{2}$

(C) $\frac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$

(D) $0 \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$

137 Qual das condições define, em $\mathbb{C}$, o eixo imaginário?

(A) $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$

(B) $|\text{Arg}(z)| = \frac{\pi}{2}$

(C) $|z| = 0$

(D) $|z - i| = |z + i|$

PROFESSOR

Soluções

132. (C)
133. (B)
134. (B)
135. (B)
136. (D)
137. (B)

138 Qual das condições seguintes define uma circunferência no plano de Argand?

(A) $|z+1| \leqslant 3$

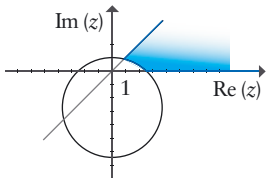
(B) $|\text{Arg}(z)| = \frac{\pi}{4}$

(C) $|z+2i| = |1+i|$

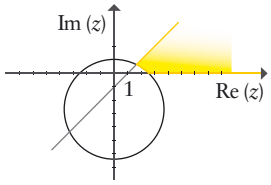
(D) $|z+i| = 0$

139 A condição $|z+3i| \geqslant 4 \wedge 0 \leqslant \text{Arg}(z+1) \leqslant \frac{\pi}{4}$, definida em $\mathbb{C}$, pode ser representada graficamente por:

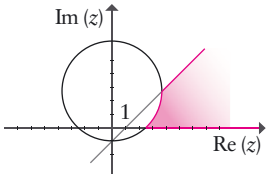
(A)



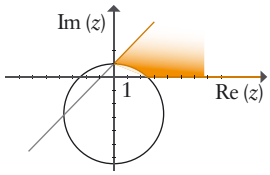
(B)



(C)



(D)



140 Qual das seguintes condições define, no plano complexo, uma reta perpendicular à reta definida por $|z+1| = |z-i|$?

(A) $\text{Re}(z) = \frac{\pi}{4}$

(B) $\text{Im}(z) = \frac{\pi}{4}$

(C) $|z-1| = |z+i|$

(D) $|z| = |z-1+i|$

141 Considera o número complexo $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $w \in \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z+i) < \frac{\pi}{2}\right\}$

(B) $w \in \left\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > \sqrt{2}\right\}$

(C) $w \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z+i) < 2\}$

(D) $w \in \{z \in \mathbb{C} : |z+i+1| < 2\}$

PROFESSOR

Soluções

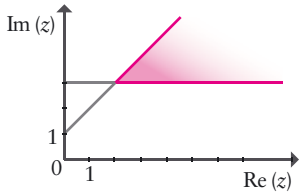
138. (C)

139. (D)

140. (D)

141. (C)

142 Seja P o conjunto dos números complexos cujos afixos, no plano complexo, formam a região colorida na figura.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}(z-3i)\leqslant 1 \wedge 0\leqslant \operatorname{Arg}(z-1)\leqslant \frac{\pi}{3}\right\}$

(B) $P=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}(z-2i)\geqslant 1 \wedge 0\leqslant \operatorname{Arg}(z-i)\leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$

(C) $P=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(z-3)\leqslant 0 \wedge 0\leqslant \operatorname{Arg}(z-2)\leqslant \frac{\pi}{3}\right\}$

(D) $P=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(z-3i)\geqslant 1 \wedge 0\leqslant \operatorname{Arg}(z-1)\leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$

Itens de construção

Números complexos

143 Determina os valores de $t\in\mathbb{R}$ para os quais:

a) $2t+3i$ é imaginário puro;

b) $t-(t+1)i$ é real;

c) $(t^2-t)+ti$ é imaginário puro;

d) ti é uma raiz quadrada de -25;

e) $\operatorname{sen} t+i\cos t$ é um número real negativo.

144 Determina os valores que pode tomar o número real x para que o número complexo $z=\operatorname{tg}x+i\,(1-2\cos(2x))$ seja real.

145 Dados os números complexos $z=1-3\cos x+2xi$ e $z_1=5+\left(2-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{4}\right)i$, sendo x um número real, prova que:

«Se z é um imaginário puro, então z_1 é real.»

146 Resolve em $\mathbb{C}$ as equações seguintes.

a) $z^2+10=0$

b) $z^2-2z+4=0$

c) $x^4-81=0$

d) $x\left[(x-3)^2+1\right]=0$

e) $z^3+2z=0$

f) $(z-4)^2+9=0$

g) $4x^3+13x+17=0$, sabendo que -1 é uma das soluções.

PROFESSOR

Soluções

142. (B)

143. a) $t=0$

b) $t=-1$

c) $t=1$

d) $t=5 \vee t=-5$

e) $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

144. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

146. a) $z=\pm\sqrt{10}\,i$

b) $z=1\pm\sqrt{3}\,i$

c) $x=3 \vee x=-3 \vee x=3i \vee x=-3i$

d) $x=0 \vee x=3+i \vee x=3-i$

e) $z=0 \vee z=\pm\sqrt{2}\,i$

f) $z=4+3i \vee z=4-3i$

g) $x=1 \vee x=\frac{1}{2}\pm 2i$

147 Calcula os valores dos números reais x e y para os quais:

a) $(2x+1)+(y-2)i=4-i$

b) $(2x-y+2)+(y-x)i=3i$

148 Escreve na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, os números:

a) $2+3i(2-i)-(1+2i)^2$

b) $(i^2-2i)2i-1$

c) $\left(\sqrt{2}-i\right)^2\left(1-\sqrt{2}\,i\right)^2$

d) $\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)\times\left(\overline{i-2}\right)$

e) $(\cos x+i\,\text{sen}\,x)^2$

149 Calcula os reais x e y, de forma que:

a) $(5+xi)-(y+3i)=2-5i$

b) $\dfrac{3+xi}{y-3i}=4-3i$

c) $x^2+1+(y+3)i=2i(1-i)$

d) $(x-i)(5-yi)=4-17i$

150 Sejam $z=3a-2i$ e $w=3-bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, dois números complexos. Determina os valores de a e b, sabendo que $z+w$ é um número real e zw é um imaginário puro.

151 Escreve a expressão geral dos números complexos cuja soma com o conjugado é igual a:

a) 6

b) -5

152 Escreve a expressão geral dos números complexos cujo produto por $a+bi$ é igual a $-a^2-b^2$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2+b^2 \neq 0$.

153 Escreve na forma $a+bi$ os números:

a) $\dfrac{2i}{1-i}$

b) $i-\dfrac{1}{1+i}$

c) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i-1}$

d) $\dfrac{1}{(3+i)^2}$

e) $\dfrac{(6-3i)(2+2i)}{3-3i}-i$

f) $\dfrac{1-i}{(2+i)(-2+i)}+\dfrac{1}{i}$

g) $\dfrac{2+i}{(2i-1)^2}$

PROFESSOR

Soluções

147. a) $x=\frac{3}{2} \wedge y=1$

b) $x=1 \wedge y=4$

148. a) $8+2i$

b) $3-2i$

c) -9

d) $\left(-2\sqrt{3}-1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

e) $\cos(2x)+i\,\text{sen}(2x)$

149. a) $x=-2 \wedge y=3$

b) $x=-21 \wedge y=3$

c) $(x=1 \vee x=-1) \wedge y=-1$

d) $(x=2 \wedge y=6) \vee$
$\vee\ (x=-1{,}2 \wedge y=-10)$

150. $b=-2 \wedge a=-\frac{4}{9}$

151. a) $3+yi,\ y \in \mathbb{R}$

b) $-\frac{5}{2}+yi,\ y \in \mathbb{R}$

152. $-a+bi$

153. a) $-1+i$

b) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

d) $\frac{2}{25}-\frac{3}{50}i$

e) $2+3i$

f) $-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}i$

g) $-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

154 Sejam $z = x + 2i$ e $w = 1 + yi$ dois números complexos. Determina os valores de x e y $(x, y \in \mathbb{R})$ de modo que z^2 e $\frac{z}{w}$ sejam ambos imaginários puros.

155 Escreve na forma $a + bi$:

a) $z - \frac{i}{z}$, sendo $z = 3 - 3i$

b) $w = \dfrac{3i\left(4 + \frac{4}{3}i^{11}\right)}{-i + 2i^{18}}$

c) $i^{15}z + \frac{z}{i^{102}}$, sendo $z = \frac{1}{1+i}$

d) $z = \dfrac{(1-3i)(2+i)}{1+2i^{8n+5}} + 2i$

e) $z = \dfrac{3 - 2i + \overline{4i - 3}}{i^{4n+2} - i}$

156 Resolve em $\mathbb{C}$ as equações seguintes.

a) $zi = \dfrac{3z+1}{1-i}$

b) $i^{10} + z = \dfrac{z^2}{2}$

c) $z^2 = -4i$

157 Sendo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, investiga a relação que deve existir entre a e b de modo que os afixos de z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$ sejam vértices de:

a) um quadrado;

b) um retângulo de área 10;

c) um retângulo de perímetro p.

158 Considera o número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sendo $w = 1 - 2i$, determina a relação que deve existir entre a e b para que o afixo de $\frac{z}{w}$ pertença:

a) ao eixo imaginário;

b) à bissetriz dos quadrantes pares.

159 No plano complexo considera:

$$A \circlearrowright 3 + 2i, \quad B \circlearrowright -3 - 2i \quad \text{e} \quad C \circlearrowright -5i$$

Indica um número complexo cujo afixo seja um ponto D de modo que $[ABCD]$ seja um paralelogramo.

160 Escreve, na forma $a + bi$, seis números que tenham o mesmo módulo.

PROFESSOR

Soluções

154. $(x = 2 \wedge y = -1) \vee$
$\vee\ (x = -2 \wedge y = 1)$

155. a) $\frac{19}{6} - \frac{19}{6}i$

b) $-4 - 4i$

c) -1

d) $-1 - i$

e) $3 + 3i$

156. a) $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

b) $z = 1 + i \vee z = 1 - i$

c) Substituir z por $x + yi$
$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \vee z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

157. a) $|a| = |b|$, $a \neq 0$

b) $|ab| = 2{,}5$

c) $|a| + |b| = \frac{p}{4}$

158. a) $a = 2b$

b) $b = 3a$

159. $D = C + \overrightarrow{BA} = 6 - i$

160. $2 - i$, $2 + i$, $-2 + i$, $-2 - i$, $\sqrt{5}i$, $-\sqrt{5}$

161 Determina a e b reais, de modo que:

a) $e^{ib} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $e^{ib} = a + \frac{1}{2}i$

c) $\frac{2+2i}{1-i} = a\,e^{ib},\ a > 0$

162 Considera o número complexo $w = (a-2) + ai$, com $a \in \mathbb{R}$.

Determina a de modo que w^2 tenha argumento π.

163 Sendo w um número complexo tal que $w = a + 2i$, determina os valores de a para os quais $\frac{7}{2}\pi$ é argumento de w^2.

164 Sendo $z = 2 - x + x^2 i$ um número complexo, com $x \in \mathbb{R}$, determina para que valores de x se tem $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$.

165 Escreve, na forma $a + bi$ e na forma trigonométrica, os números complexos seguintes.

a) $\frac{(3+i)^2}{2-i} - 2$

b) $\frac{(2-i)^3 - 8i^{35}}{1-i} + 3i$

166 Sendo $z = \sqrt{3}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$, calcula $z - i$ na forma trigonométrica.

167 Mostra que $2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ é solução da equação $(1 - 2i\sqrt{3})z - 5 - 3i\sqrt{3} = 0$.

168 Escreve na forma trigonométrica o número complexo:

$$z = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - i}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + i}$$

169 Sendo θ um argumento de $z = 1 + 2i$, determina o valor exato de:

a) $\operatorname{sen}\theta$

b) $\cos\theta$

c) $\operatorname{sen}(2\theta)$

d) $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

PROFESSOR

Soluções

161. a) $b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\left(b = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge a = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee$
$\vee \left(b = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge a = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $a = 2 \wedge b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

162. $a = 2$

163. $a = -2$

164. $x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2[$

165. a) $4i = 4\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

166. $z - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

168. $e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

169. a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

170 Justifica que são iguais os seguintes pares de números complexos:

a) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ e $2e^{i\left(\frac{49\pi}{5}\right)}$

b) $\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{17\pi}{8}\right)}$ e $\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{113\pi}{8}\right)}$

171 Determina os valores de $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \mathbb{R}$, para os quais:

a) $\rho e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\theta}$

b) $\rho^2 e^{i\frac{3\pi}{5}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{5}\right)}$

c) $\rho^2 e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = 2\rho\, e^{i(3\theta)}$

172 Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\rho > 0$. Considera o triângulo $[ABC]$, sendo A, B e C os afixos de z, do conjugado de z e do simétrico de z, respetivamente.

Mostra que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada por $A(\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)$.

173 Seja $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ um número complexo.

a) Escreve $\frac{\bar{z}}{z+2}$ na forma trigonométrica.

b) Indica um número complexo w de modo que $\frac{z}{w}$ seja um imaginário puro.

c) Seja A o afixo de z e seja B o afixo de $-\bar{z}$ num referencial de origem O. Determina a área do triângulo $[AOB]$.

174 Sejam $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2 = 1 + i$ dois números complexos.

a) Escreve o número $\frac{3iz_1}{z_2}$ na forma algébrica e na forma trigonométrica.

b) Usa a alínea anterior para indicar os valores exatos do seno e do cosseno de $\frac{7\pi}{12}$.

175 Sendo $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ e $z_2 = 2 - 3i$, calcula os valores de α para os quais $2z_1(z_2 - i^3)$ é imaginário puro.

176 Escreve na forma trigonométrica o número:

$$\frac{\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(\pi - \alpha)i}$$

PROFESSOR

Soluções

170. a) $-\frac{\pi}{5} - \frac{49\pi}{5} = -10\pi = -5 \times 2\pi$

b) $-\frac{17\pi}{8} - \left(-\frac{113\pi}{8}\right) = 12\pi = 6 \times 2\pi$

171. a) $\rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\rho = \sqrt[4]{2} \wedge \theta = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\rho = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

173. a) $e^{i\pi}$

b) Por exemplo, $w = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ ou $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

c) $\sqrt{3}$

174. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} =$

$= \frac{-3\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3\sqrt{3}+3}{4}i$

b) $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

175. $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

176. $e^{i\pi}$

177 Seja $z = \operatorname{tg}\theta + i$.

a) Mostra que $|z| = \dfrac{1}{|\cos\theta|}$.

b) Determina θ de modo que o afixo de z esteja sobre a reta da equação $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

178 Seja $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Escreve $\dfrac{(z_1)^5 + 1}{2\overline{z_1}}$ na forma trigonométrica.

179 Considera o número complexo $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Calcula $(z_1)^5 + 4$ e apresenta o resultado na forma trigonométrica.

b) Seja $w = e^{i\alpha}$. Determina para que valores de $\alpha \in [0, 2\pi]$ o número wz_1 é um imaginário puro.

180 Dados os números complexos $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ e $z_2 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$, representa:

a) $z_1^6 - \overline{z}_2$ na forma algébrica;

b) $w = \dfrac{-3}{z_1 z_2}$ na forma trigonométrica e determina o menor natural n tal que w^n é real positivo.

181 Determina a e b reais de modo que $1 + i$ seja solução da equação:

$$w^5 + aw^3 + b = 0$$

182 Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Sabe-se que z_1 tem argumento $\dfrac{\pi}{3}$, $z_2 = (z_1)^2$ e A e B são os afixos de z_1 e z_2 num referencial do plano complexo com origem O.

a) Justifica a afirmação: «O triângulo $[AOB]$ é equilátero se $|z_1| = 1$.»

b) Representa z_1 na forma trigonométrica, supondo que $\operatorname{Re}(z_1) = 2$.

183 Prova que $\dfrac{(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)^3}{\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}$.

184

a) Prova que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$ e interpreta este resultado em termos geométricos.

b) Determina o menor número natural n para o qual $(1+i)^n = (1-i)^n$.

PROFESSOR

Soluções

177. b) $\theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

178. $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

179. a) $4\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$

b) $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

180. a) $\sqrt{3} - 63i$

b) $\dfrac{3}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $n = 24$

181. $a = 2 \wedge b = 8$

182. b) $z_1 = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

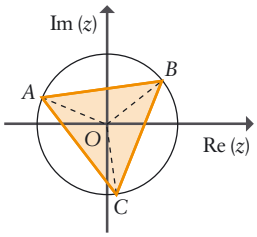
184. b) $n = 4$

185 Seja $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ um número complexo.

a) Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 + \overline{w} = 0$.

b) Determina os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais w^n é um número real negativo.

186 Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$. Um dos vértices é o afixo do número $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.



a) Determina os números complexos cujos afixos são os outros vértices.

b) O número z é uma das raízes de índice 6 do número w.
Determina w e escreve-o na forma algébrica.

187 Considera o número complexo $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ e seja $z_1 = \frac{\sqrt{3}\,z}{2 - z}$.

a) Mostra que $z_1 = i$.

b) Determina o perímetro do polígono cujos vértices são os afixos das raízes quartas de z_1.

c) Supõe que z_1 e z_2 são duas raízes de índice n de um número complexo w e que os seus afixos são vértices consecutivos do polígono cujos vértices são as raízes de índice n de w.
Se $\frac{z_1}{z_2} = z$, determina w.

188 Seja $z = -\frac{i^{26} - 2i^{23}}{i - 3}$ um número complexo.

a) Escreve z na forma trigonométrica.

b) Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $w^3\overline{w} = z^4$ e apresenta as soluções na forma $a + bi$ e na forma trigonométrica.

189 Considera os números complexos $w_1 = 3 - 4i$ e $w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$.

a) Sendo θ um argumento de w_1, representa na forma trigonométrica, em função de θ, o número complexo $4 - 3i$.

b) Calcula as raízes quadradas de w_1 e apresenta-as na forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Resolve a equação $z^3 = \frac{\overline{z}}{w_2}$.

PROFESSOR

Soluções

185. a) $z^3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{9}} \vee$
$\vee\, z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{8\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{14\pi}{9}}$

b) $n = 3 + 6k,\ k \in \mathbb{N}_0$

186. a) $B \curvearrowright 2e^{i\frac{5\pi}{24}}$
$C \curvearrowright 2e^{i\frac{37\pi}{24}}$

b) $-32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\,i$

187. b) O perímetro é $4\sqrt{2}$.

c) $w = i^6 = -1$

188. a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) $w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \vee$
$\vee\, w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow w = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

189. a) $5e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}$

b) $(a + bi)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a = 2 \wedge b = -1) \vee$
$\vee\, (a = -2 \wedge b = 1)$;
$2 - i$ e $-2 + i$

c) $z = 0 \vee z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}\right)}$,
$k = 0, 1, 2, 3$

190 Seja $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Representa o conjunto dos pontos do plano que são afixos dos números complexos z que satisfazem a condição $|z - z_1| \leqslant |z_1|$.

191 No conjunto dos números complexos, considera os números:

$$x_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{e} \quad x_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

a) Mostra que x_1 e x_2 são soluções da equação $x^2 + (e^{i\pi})^3 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$.

b) Representa no plano complexo o conjunto dos pontos que são afixos dos números complexos z que satisfazem a condição:

$$|z - x_1| = |z - x_2| \wedge 1 \leqslant |z| \leqslant 2$$

192 Sejam A, B, C, D, E e F os afixos das raízes de índice 6 do número complexo w, sendo A o afixo de $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

a) Escolhidos três daqueles pontos ao acaso, qual é a probabilidade de que sejam vértices de um triângulo equilátero?

b) Determina w e escreve-o na forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

c) Mostra que a imagem de $t = \frac{3}{2}e^{i\pi}$ não pertence ao círculo de centro em A e raio 1.

d) Define, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência de centro em A que passa no afixo de $t = \frac{3}{2}e^{i\pi}$.

193 Seja A o conjunto dos pontos do plano que distam de $P(1, -2)$ mais de três unidades.

a) Define, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, o conjunto A.

b) Mostra que o afixo do número complexo

$$\frac{4\, e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - \sqrt{3}\, i}$$

pertence ao conjunto A.

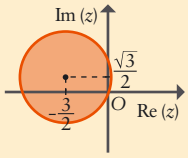
194 Representa no plano de Argand os afixos dos números complexos que satisfazem a condição:

$$|-z + 2 + i| \geqslant 2 \wedge 0 \leqslant \text{Arg}\,(iz) \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

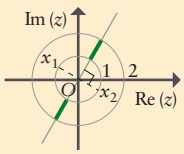
PROFESSOR

Soluções

190. Círculo de centro no afixo de z_1 e que passa na origem.



191. b)



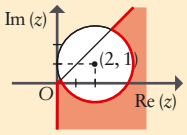
192. a) $P = \frac{2}{{}^6C_3} = \frac{1}{10}$

b) $w = 8\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$

d) $\left|z - \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

193. a) $|z - 1 + 2i| > 3$

194.



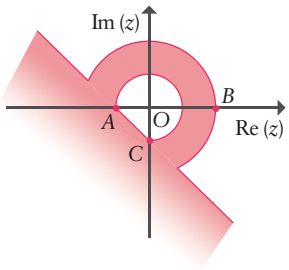
195 Sejam $z_1 = 3i^{29}$ e $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$ dois números complexos.

a) Escreve $(z_1 + z_2)^2$ na forma $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

b) Determina o menor natural n tal que $(z_1 z_2)^n$ é um número real.

c) Identifica o lugar geométrico dos afixos dos números complexos w tais que $|z_2 - w| = |z_1|$.

196 Escreve uma condição na variável $z \in \mathbb{C}$ que defina a região colorida na figura.



$$A(-1, 0) \qquad C(0, -1) \qquad B(2, 0)$$

Os dois arcos são arcos de circunferência de centro na origem. A reta representada interseta os eixos em A e C.

197 Seja $w = a + bi$ um número complexo.

a) Identifica valores reais para a e b de modo que:

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(w) < \frac{3\pi}{4} \text{ e } |w| < 6$$

b) Com $a = -2$ e $b = 4$:

b₁) calcula $\dfrac{w^2}{w + 2i^{17}}$ e apresenta o resultado na forma algébrica;

b₂) representa no plano complexo o conjunto dos pontos que são os afixos dos números complexos z que satisfazem a condição:

$$|2z + w| \leqslant 6 \wedge |z - \overline{w}| \geqslant |z + w|$$

198

a) Mostra que são equivalentes em $\mathbb{C}$ as condições:

$$|z + 5| \leqslant 6 \quad \text{e} \quad 5(z + \overline{z}) + z\overline{z} \leqslant 11$$

b) Representa no plano complexo o conjunto dos pontos que são os afixos dos números complexos z que satisfazem a condição:

$$5(z + \overline{z}) + z\overline{z} \leqslant 11 \wedge (z - \overline{z})\, i \geqslant 2$$

PROFESSOR

Soluções

195. a) $(-1 + 2i)^2 = -3 - 4i$

b) $n = 4$

c) Circunferência de centro em $(-1, -1)$ e raio 3.

196. $1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge |z| \geqslant |z + 1 + i|$

197. a) Tem de ser $a < 0 \wedge b > -a \wedge \sqrt{a^2 + b^2} < 6$

Exemplos:

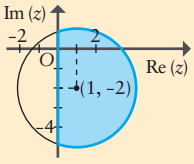
$a = -1$ e $b = 3$;

$a = -3$ e $b = 5$;

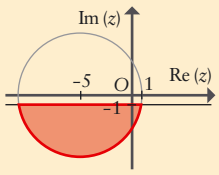
$a = -1$ e $b = 5$.

b₁) $-\frac{9}{5} + \frac{13}{5}i$

b₂)



198. b)



199 Representa no plano complexo o conjunto dos afixos dos números complexos z que satisfazem as condições:

a) $\text{Im}(z-\bar{z}) \leqslant z\bar{z} \wedge 8z^3+27i=0$

b) $z\bar{z} \leqslant \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \wedge \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{4}$

c) $|\text{Im}(z+i)| \leqslant 2 \vee |z-4+i| \leqslant 3$

d) $|z+1-2i| < 4 \wedge \text{Re}(iz) < 0$

200 Identifica e representa por uma condição em $\mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do plano definido em $\mathbb{C}$ por $|z+2-3i| = |z-6i|$.

201 Representa no plano complexo o conjunto dos afixos dos números complexos z que satisfazem as condições:

a) $|z+1| \leqslant 2 \wedge \text{Re}(z^2) \leqslant 0$

b) $|z-2| = 2+\text{Re}(z)$

c) $|z-1| \geqslant 2|z-i|$

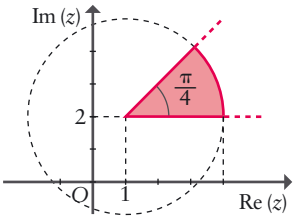
202 Sejam P e Q os afixos de $5+2i$ e $1+4i$, respetivamente.

a) Define a mediatriz do segmento $[PQ]$ por uma condição em $\mathbb{C}$ e por uma condição em $\mathbb{R}^2$.

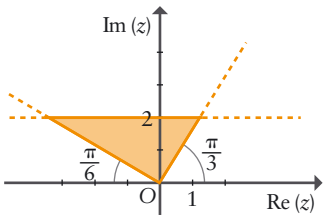
b) Qual é o ponto da mediatriz que é afixo de um complexo com argumento $\frac{\pi}{4}$?

203 Indica uma condição em $\mathbb{C}$ que defina as regiões coloridas.

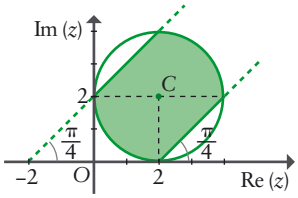
a)



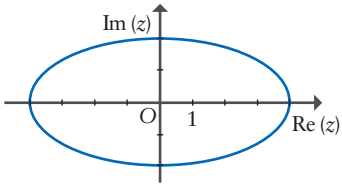
b)



c)



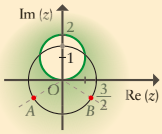
d)



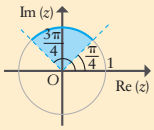
PROFESSOR

Soluções

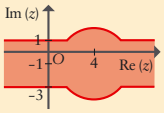
199. a)



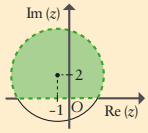
b)



c)

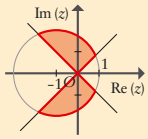


d)

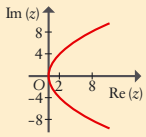


200. É a mediatriz do segmento $[AB]$ com $A(-2,3)$ e $B(0,6)$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $y=-\frac{2}{3}x+\frac{23}{6}$.

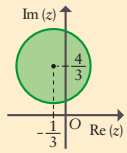
201. a)



b)



c)



202. a) $|z-5-2i| = |z-1-4i|$; $y=2x-3$

b) $P(3,3)$

203. a) $0 \leqslant \text{Arg}(z-1-2i) \leqslant \frac{\pi}{4} \wedge$
$\wedge |z-1-2i| \leqslant 3$

b) $\frac{\pi}{3} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6} \wedge |z-4i| \geqslant |z|$
ou $\frac{\pi}{3} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6} \wedge \text{Im}(z) \leqslant 2$

c) $|z-2-2i| \leqslant 2 \wedge$
$\wedge\, 0 \leqslant \text{Arg}(z+2) \leqslant \frac{\pi}{4} \wedge$
$\wedge\, \frac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z-2) \leqslant \pi$

d) $|z-\sqrt{12}| + |z+\sqrt{12}| = 8$

Calculadoras Gráficas

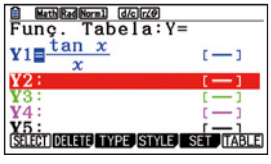
Casio fx-CG 20

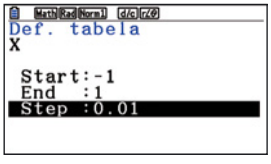
Página 13

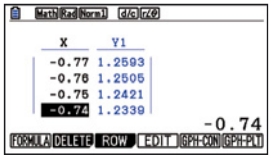
Exercício resolvido 1. a) e b)

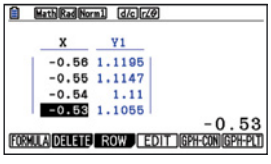
Para estudares os limites de uma função podes recorrer ao menu **Tabela** e ao menu **Gráfico**.

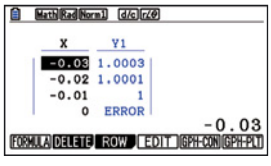
a) No menu **Tabela**, introduz a expressão da função e prime a tecla F5 (**SET**) para definires o intervalo da tabela. Como queremos estudar o limite da função quando o x tende para 0, escolhe um intervalo à volta desse valor. Obtém a tabela pressionando a tecla F6 (**TABLE**). Ao analisares os valores da tabela, verifica que o limite é 1.

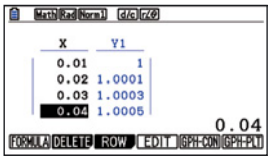




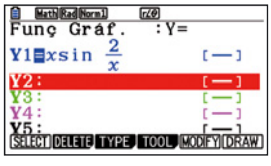


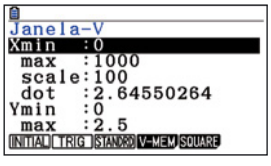


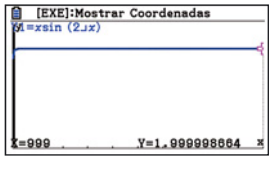




b) No menu **Gráfico**, escreve a expressão da função. Na janela de visualização, escolhe para **Xmax** um valor grande. Desenha o gráfico pressionando a tecla F6 (**DRAW**) e ativa o **Trace** (tecla F1). Verifica que o limite é 2.



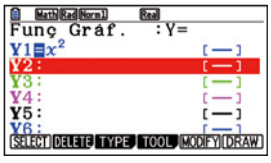


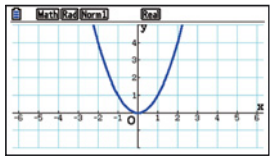


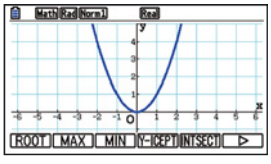
Página 80

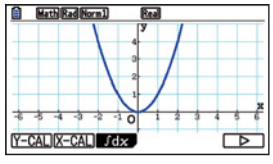
Cálculo de integrais

No menu **Gráfico**, introduz a expressão da função. Pressiona a tecla F5 e roda a barra de ferramentas até encontrares o símbolo de integral (tecla F3).

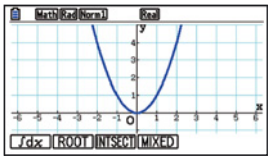


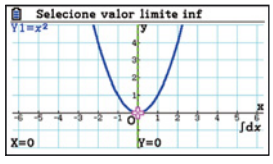


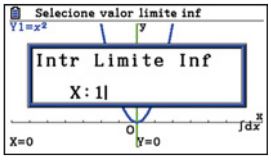


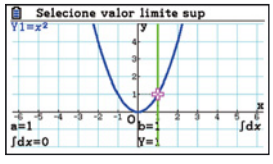


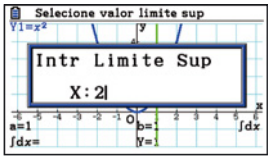
Prime F1 para introduzires o limite inferior e superior. Introduz o limite inferior e prime EXE. Introduz o limite superior e prime EXE. Visualiza a área e o valor do integral que é apresentado.

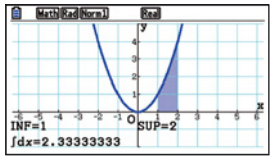








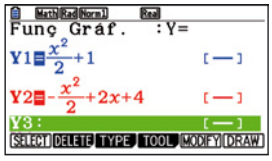


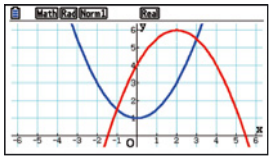


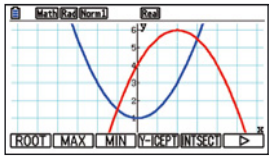
Página 87

Áreas resultantes de interseções
Exercício resolvido

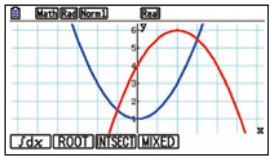
No menu **Gráfico**, introduz as expressões das funções e obtém a representação gráfica. Pressiona a tecla F5 e roda a barra de ferramentas até encontrares o símbolo de integral (tecla F3).

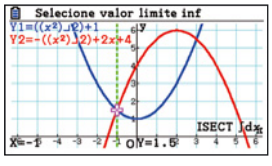


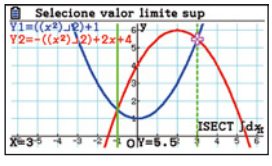


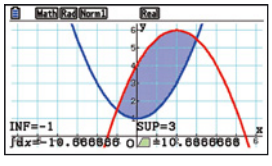


Pressiona F3 (**INTSECT**) para que possa ser calculado o valor do integral entre os dois pontos de interseção. Pressiona EXE para passar ao segundo ponto de interseção. O valor da área é exibido.





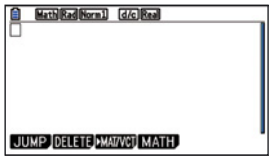


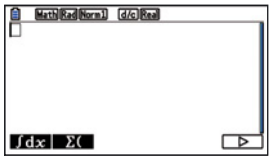


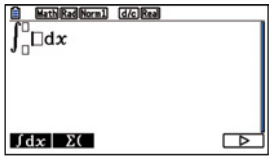
Página 88

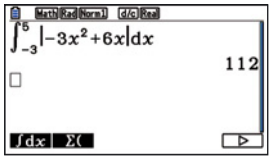
Exercício resolvido

No menu **Exe-Matriz**, pressiona a tecla F4 (**MATH**), roda a barra de ferramentas até encontrares o símbolo de integral (tecla F1). Introduz a expressão e os respetivos limites e pressiona EXE para visualizares o resultado.









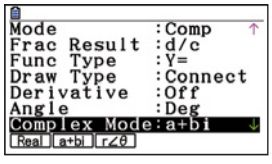
Página 106

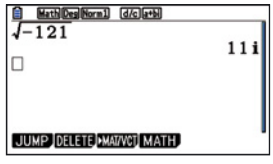
Números complexos

Para escrever e calcular números complexos devemos ter em consideração as configurações da calculadora: prime as teclas SHIFT e MENU e, na opção **Complex Mode**, prime F1 (**Real**) se quiseres trabalhar com números complexos na forma real, F2 (**a+bi**) se quiseres resultados na forma algébrica e F3 (**r<θ**) se quiseres resultados na forma trigonométrica.

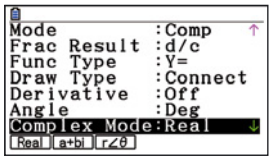
Para introduzires o i, usa as teclas SHIFT 0.

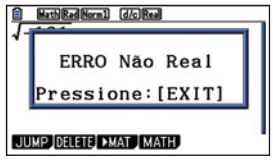
Se em **Complex mode** estiver selecionada a opção **a+bi**, surge o resultado.





Se em **Complex Mode** estiver selecionada a opção **Real**, surge uma mensagem de erro.

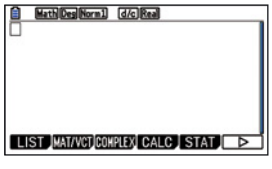


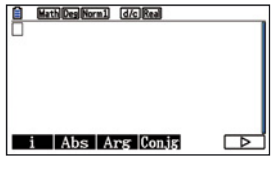


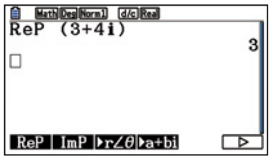
Página 110

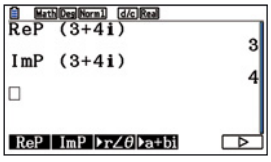
Parte real e parte imaginária
Exercício resolvido 1

No **menu Exe-Matriz**, pressiona a tecla OPTN. Prime F3 (**COMPLEX**), roda a barra (tecla F6) e prime F1 (**ReP**) para obteres a parte real de um número complexo e F2 (**ImP**) para obteres a parte imaginária de um número complexo.





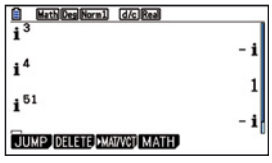




Página 111

Cálculos simples
Exercício resolvido 4

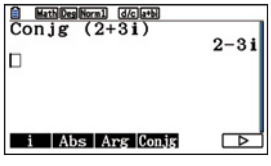
Usa as teclas SHIFT 0 para escreveres i.

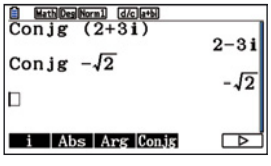


Página 114

Conjugado de um número complexo

Para obter o conjugado de um número complexo, no menu **Exe-Matriz**, pressiona a tecla OPTN, seguida de F3 (**COMPLEX**) e, por fim, F4 (**Conjg**).

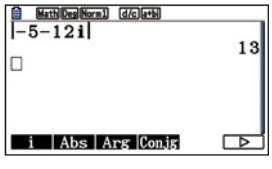




Página 117

Módulo de um número complexo
Exercício 18. a)

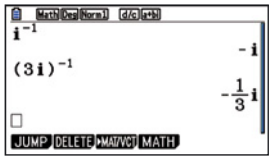
Para obter o módulo de um número complexo, no menu **Exe-Matriz**, pressiona a tecla OPTN, seguida de F3 (**COMPLEX**) e, por fim, F2 (**Abs**).

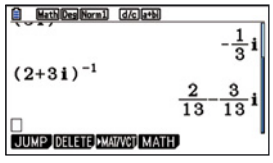


Página 122

Inverso de um número complexo
Exercício 23

Para determinar o inverso de um número complexo, basta elevá-lo a -1.





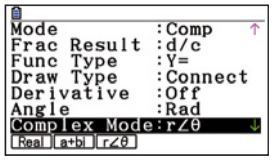
Página 128

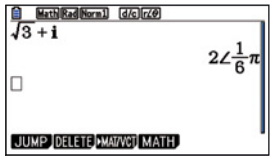
Forma trigonométrica de um número complexo

Para escrever na forma trigonométrica um número complexo que está na forma algébrica, podemos optar por um de dois métodos.

1.º método:

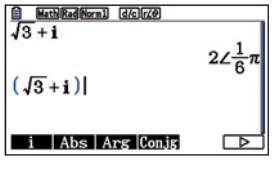
Prime as teclas SHIFT MENU: em **Angle**, seleciona a opção F2 (**Rad**) para radianos e, em **Complex Mode**, seleciona a opção F3 (**r<θ**) para a forma trigonométrica. Escreve o número complexo e pressiona EXE.

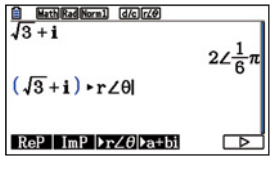




2.º método

Escreve o número e pressiona OPTN. Prime F3 (**COMPLEX**), roda a barra (F6) e pressiona a tecla F3.

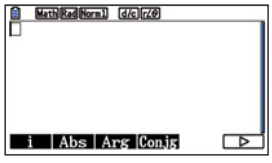


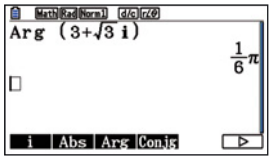


Página 133

Argumento de um número complexo
Exercício 34. a)

Prime OPTN, de seguida F3 (**COMPLEX**) e novamente F3 (**Arg**). Escreve o número complexo.

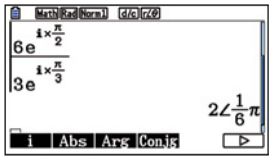


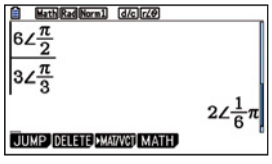


Página 138

Operações com números complexos na forma trigonométrica

Com a calculadora configurada para a forma trigonométrica, basta escrever a expressão. A calculadora também define e^i, bastando usar as teclas SHIFT X,θ,T .

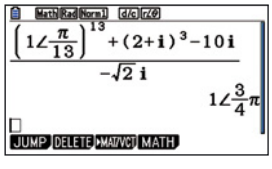


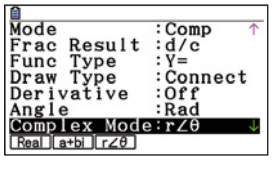


Página 141

Operações com números complexos na forma trigonométrica e na forma algébrica
Exercício resolvido 2

Podes efetuar diretamente esta operação, com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica, pedindo o resultado na forma trigonométrica (**SET UP**).

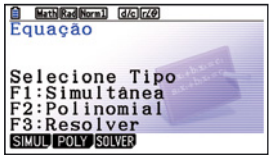


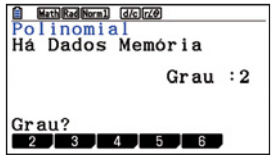


Página 149

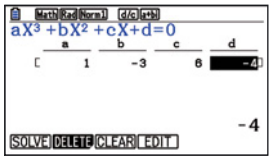
Resolução de equações em ℂ
Exercício resolvido 1

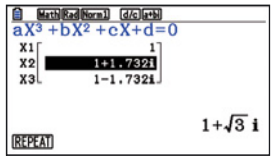
No menu **Equação**, pressiona a tecla F2 (**Polinomial**) e prime F2 (**3**).





Introduz os parâmetros e pressiona a tecla F1 (**SOLV**) ou EXE para obteres o resultado.





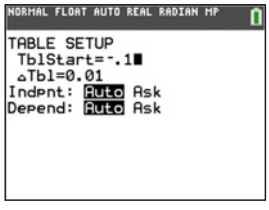
Texas Instruments
TI-84 Plus C SE / CE-T

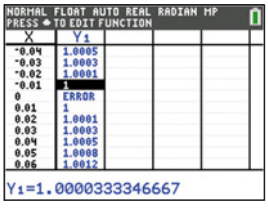
Página 13

Exercício resolvido 1. a) e b)

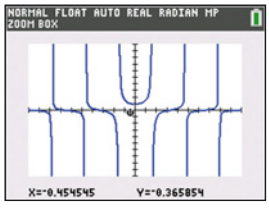
Acede ao editor de funções, premindo a tecla Y=, e introduz a expressão analítica da função de que se pretende calcular o limite. Para estudares o limite de uma função podes recorrer à análise dos valores da tabela e do gráfico da função na vizinhança do ponto em que se pretende calcular o limite.

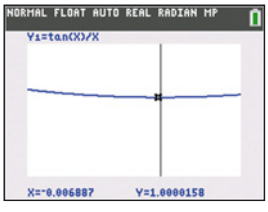
a) No editor de funções, introduz a expressão da função e, de seguida, configura a tabela adequadamente colocando como valor inicial um valor inferior ao ponto do limite, por exemplo $-0{,}1$, e como incremento da tabela 0,01. Desta forma, podes estudar o limite da função quando x tende para 0, escolhendo um intervalo à volta desse valor, a que chamamos vizinhança.



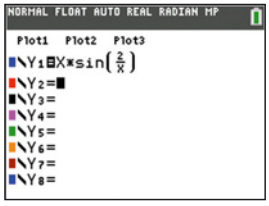


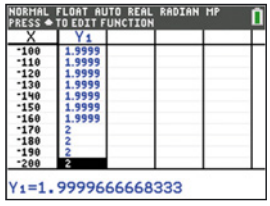
Na tabela podes observar que para valores próximos de 0 a função tende para 1, sendo que a função não está definida em $x = 0$. Podes também estudar o limite da função através da análise do gráfico da função, devendo para tal fazeres um zoom caixa (tecla ZOOM) centrada no ponto e deslocar o cursor ao longo do gráfico (tecla TRACE).



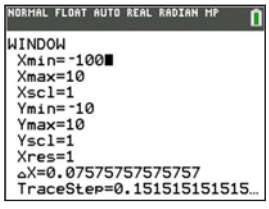


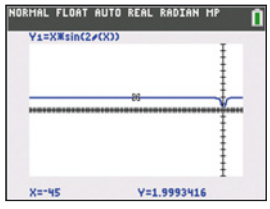
b) No editor de funções, introduz a expressão da função e, de seguida, configura a tabela adequadamente colocando como valor inicial um qualquer valor do domínio da função, por exemplo, -10, e como incremento da tabela -10. Desta forma, terás a variável independente x a tender para $-\infty$. Percorrendo os valores da tabela verificas que a função está a tender para 2, isto é, o limite é 2.





O mesmo podes concluir através da observação do gráfico da função para valores tendentes para $-\infty$, usando para tal a ferramenta TRACE.

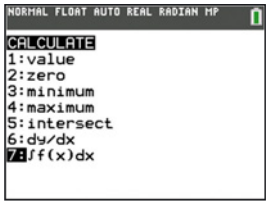


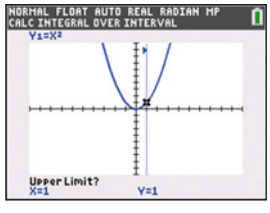


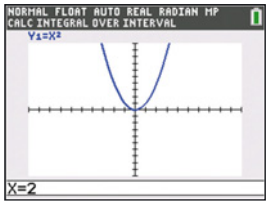
Página 80

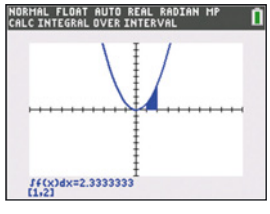
Cálculo de integrais

Acede ao editor de funções, premindo a tecla Y=, e introduz a expressão da função em **Y1**, isto é, **Y1=x²**. De seguida, no menu **CALCULATE**, teclas 2ND e TRACE, seleciona a opção **7:∫f(x)dx** e na representação gráfica da função indica o limite inferior, premindo a tecla 1 e depois ENTER, e o limite superior, premindo tecla 2 e depois ENTER, surgindo de imediato o valor do integral e a sombreado a correspondente região.





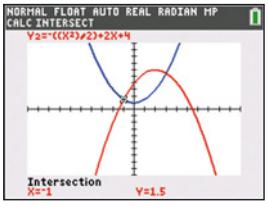


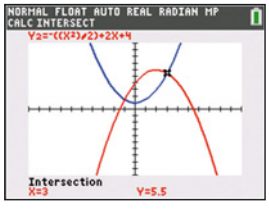


Página 87

Áreas resultantes de interseções
Exercício resolvido

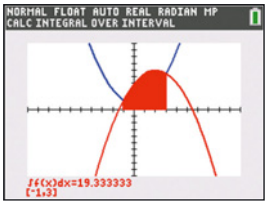
No editor de funções, tecla Y=, introduz as expressões das duas parábolas em **Y1** e **Y2**, respetivamente, e representa os seus gráficos, premindo a tecla GRAPH. Obtém os pontos de interseção das duas parábolas recorrendo à ferramenta **5:intersect** do menu **CALCULATE**, teclas 2ND e TRACE.

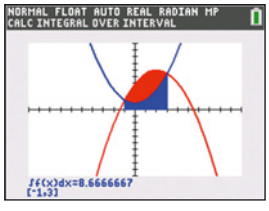




Nesta calculadora calculas a área da região compreendida entre duas funções recorrendo à diferença entre as áreas abaixo de cada uma das curvas e acima do eixo dos xx , isto é, do cálculo integral de cada uma das funções no intervalo pretendido.

Assim, utilizando a ferramenta **7:∫f(x)dx** do menu **CALCULATE**, teclas 2ND e TRACE, calcula a área abaixo da curva que limita superiormente a região pretendida, neste caso **Y2**, no intervalo $[-1, 3]$. De seguida, calcula a área abaixo da curva que limita inferiormente a região pretendida, neste caso **Y1**, no mesmo intervalo. A área da região compreendida entre as duas parábolas obtém-se fazendo-se a diferença dos valores dos integrais.

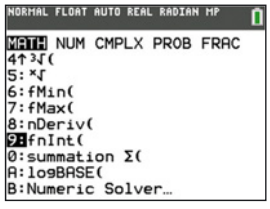


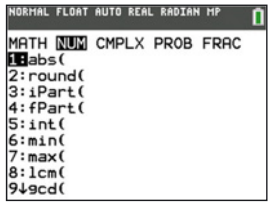


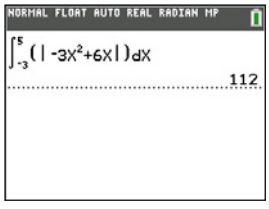
Página 88

Exercício resolvido

No menu **MATH**, tecla MATH, seleciona a opção **9:fnInt(**, ferramenta que permite calcular o valor numérico de um integral. Surgirá o operador integral com vários campos a serem preenchidos, coloca adequadamente os limites inferior e superior do integral, de seguida define a função (obténs o operador valor absoluto, **1:abs(**, no menu **NUM** premindo a tecla MATH) e coloca a variável de integração (a mesma que usares na função). Premindo ENTER obterás o valor numérico do integral.





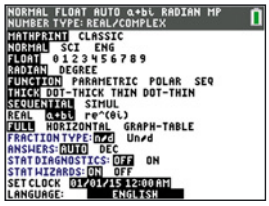


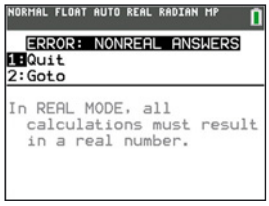
Página 106

Números complexos

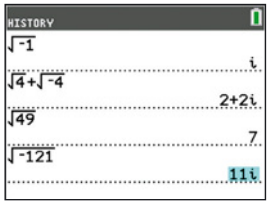
Para escrever e efetuar cálculos no domínio do conjunto dos números complexos devemos ter em consideração as configurações da calculadora: prime a tecla MODE e seleciona a opção **REAL**, se quiseres trabalhar apenas com números reais, e, para trabalhar com números complexos, a opção **a+bi** se quiseres resultados na forma algébrica ou a opção **re^(θi)** se quiseres resultados na forma trigonométrica.

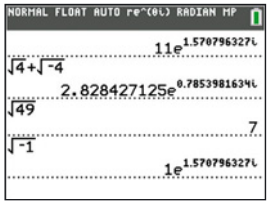
Para introduzires a unidade imaginária i , usa as teclas 2ND e . . Se a calculadora estiver em modo **REAL** apenas admitirá cálculos cujo resultado seja um número real, surgindo uma mensagem de erro caso o resultado seja um número complexo.



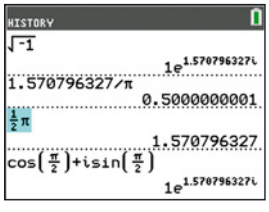


Se nas configurações da calculadora estiver ativo o modo **a+bi**, surge o resultado, quer seja um número real quer seja um número imaginário, na forma algébrica. Se estiver ativo o modo **re^(θi)**, surge o resultado, quer seja um número real quer seja um número imaginário, em função do raio r e do argumento θ da forma trigonométrica, embora na TI-84 Plus CE surja na forma exponencial. Neste modo, deves garantir que na calculadora a unidade de medida de ângulos esteja selecionada em radianos (**RADIAN**).





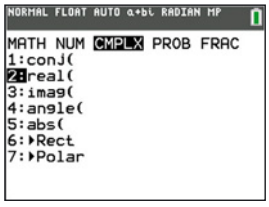
Nota que, quer o raio r e quer o argumento θ do número complexo, quando irracionais, surgem em forma decimal, portanto um valor aproximado. Para obteres o argumento θ em π radianos deves dividir o argumento θ por π, conforme imagem seguinte ilustra:

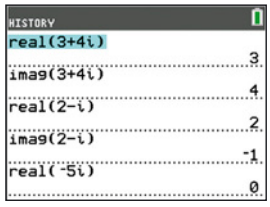


Página 110

Parte real e parte imaginária
Exercício resolvido 1

Para utilizares alguns operadores específicos para os números complexos, deves premir a tecla MATH e deslocar o cursor até ao menu **CMPLX**. Seleciona a opção **2:real(** para obteres a parte real de um número complexo e a opção **3:imag(** para obteres a parte imaginária de um número complexo.

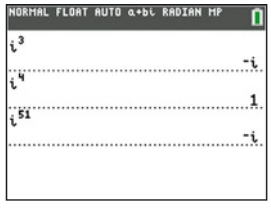




Página 111

Cálculos simples
Exercício resolvido 4

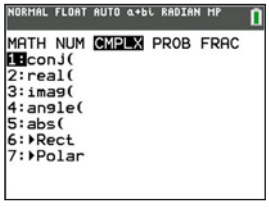
Usa as teclas 2ND e . para escreveres i.

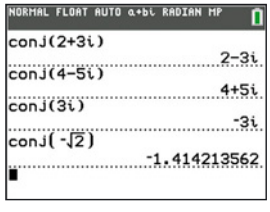


Página 114

Conjugado de um número complexo

Para obteres o conjugado de um número complexo, prime a tecla MATH, desloca o cursor até ao menu **CMPLX** e, de seguida, seleciona a opção **1:conj(**.

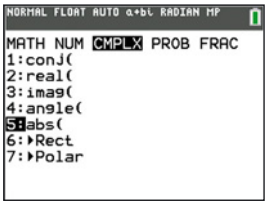


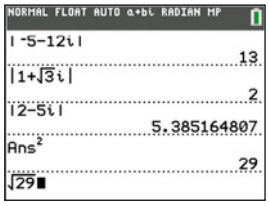


Página 117

Módulo de um número complexo
Exercício 18. a)

Para obter o módulo de um número complexo, prime a tecla MATH, desloca o cursor até ao menu **CMPLX** e, de seguida, seleciona a opção **5:abs(**. Quando o módulo do número complexo for um número irracional, o seu valor exato é a raiz quadrada do seu quadrado.

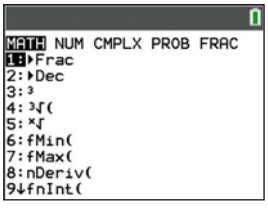


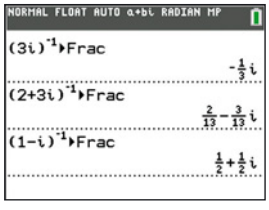


Página 122

Inverso de um número complexo
Exercício 23

Para determinar o inverso de um número complexo, basta elevá-lo a –1. Para obteres os valores exatos, para o caso de números fracionários, podes usar a opção **1:▸Frac** do menu **MATH** (tecla MATH).





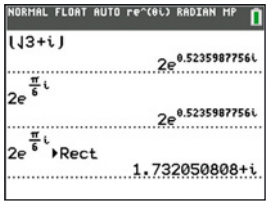
Página 128

Forma trigonométrica de um número complexo

Para escrever na forma trigonométrica um número complexo que está na forma algébrica, podemos optar por um de dois métodos.

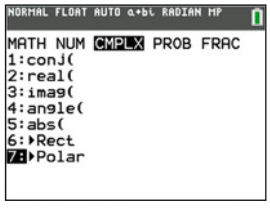
1.º método:

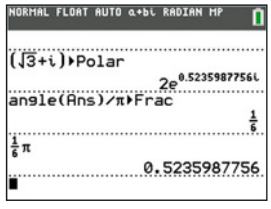
Configura a tua calculadora para o modo complexo na forma trigonométrica (prime a tecla MODE e seleciona a opção **re^(θi)**) e define a unidade de medida de ângulo como sendo o radiano (prime a tecla MODE e seleciona a opção **RADIAN**). Escreve o número complexo na forma algébrica e pressiona ENTER.



2.º método

Estando a calculadora configurada no modo complexo e na forma algébrica, escreve o número, prime a tecla MATH e, no menu **CMPLX**, seleciona a opção **7: ▸Polar** para converteres o número à forma trigonométrica. Podes obter o valor exato do seu argumento recorrendo à sua divisão por π e respetiva conversão ao modo de fração, conforme imagem abaixo.

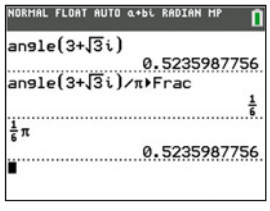


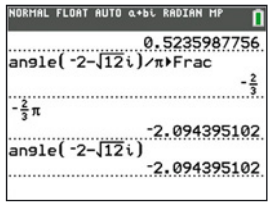


Página 133

Argumento de um número complexo
Exercício 34. a)

Prime a tecla MATH e, no menu **CMPLX**, seleciona a opção **4: angle(** para obteres o argumento de um número complexo. Podes obter o valor exato do seu argumento recorrendo à sua divisão por π e respetiva conversão ao modo de fração, conforme imagem abaixo.



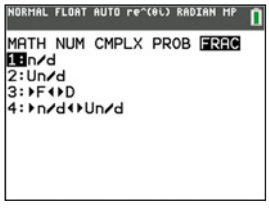


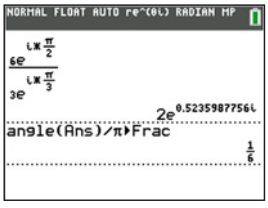
Página 138

Operações com números complexos na forma trigonométrica

Podes efetuar operações com números complexos com a calculadora definida em qualquer um dos modos complexos, algébrica ou trigonométrica, sendo que o resultado será apresentado na forma em que estiver a calculadora configurada. Assim, se pretendes obter o resultado na forma trigonométrica configura-a nesse modo e, de seguida, escreve a expressão. Utiliza a escrita natural de frações para escreveres a expressão: para tal prime a tecla

MATH e, no menu **FRAC**, seleciona a opção **1: n/d** sempre que pretendes escrever uma fração.

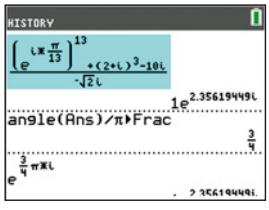


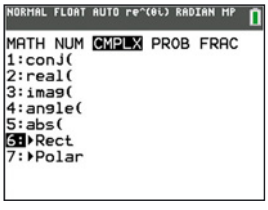


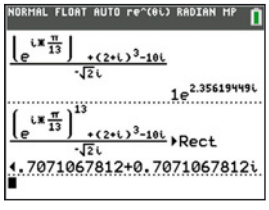
Página 141

Operações com números complexos na forma trigonométrica e na forma algébrica
Exercício resolvido 2

Podes efetuar diretamente esta operação, com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica, obtendo o resultado na forma em que estiver definida a calculadora. Caso a calculadora esteja em modo complexo na forma trigonométrica, obterás o resultado nesta forma. Podes obter a forma algébrica efetuando a conversão: utilizando a opção **6: ▸Rect** do menu **CMPLX** e premindo a tecla MATH.



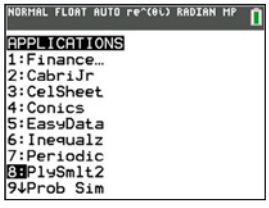


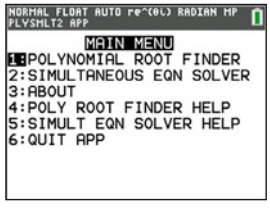


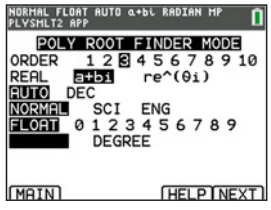
Página 149

Resolução de equações em ℂ
Exercício resolvido 1

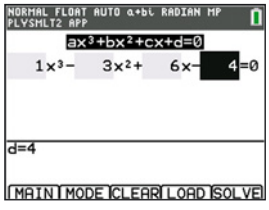
Para resolveres equações polinomiais deves recorrer à aplicação **PlySmlt2**, premindo a tecla APPS. No menu principal desta aplicação, seleciona a opção **1:POLYNOMIAL ROOT FINDER** e configura adequadamente os parâmetros da aplicação (grau da equação, modo real ou complexo, …).

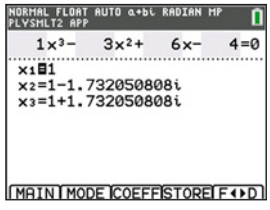






Seleciona a opção **NEXT**, premindo a tecla GRAPH, e introduz os coeficientes da equação, premindo ENTER por cada coeficiente. De seguida, seleciona a opção **SOLVE**, premindo a tecla GRAPH, e obterás assim as soluções da equação.





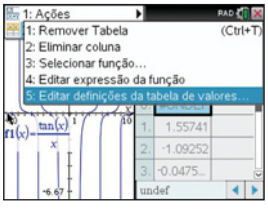
TI-Nspire CX 20

Página 13

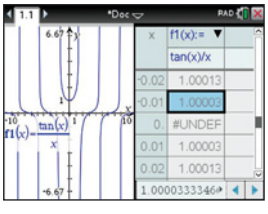
Exercício resolvido 1. a) e b)

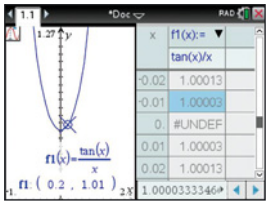
Abre uma página de gráficos e, no editor de funções, insere a expressão analítica da função que se pretende calcular o limite. De seguida, define adequadamente as configurações da tabela e da janela de visualização do gráfico para poderes estudar o limite da função recorrendo à análise dos valores da tabela e do gráfico da função na vizinhança do ponto em que se pretende calcular o limite.

a) No editor de funções, introduz a expressão da função e, de seguida, torna visível a tabela de valores premindo as teclas CTRL e T. No menu da aplicação tabela, tecla MENU, configura a tabela adequadamente, colocando como valor inicial um valor inferior ao ponto do limite, por exemplo −0,1, e como incremento da tabela 0,01. Desta forma, podes estudar o limite da função quando x tende para 0, escolhendo um intervalo à volta desse valor, a que chamamos vizinhança.

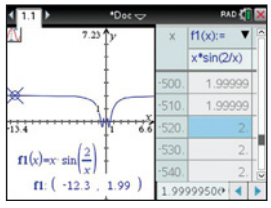


Na tabela podes observar que, para valores próximos de 0, a função tende para 1, sendo que a função não está definida em $x = 0$. Podes também estudar o limite da função através da análise do gráfico da função, devendo para tal fazeres um zoom caixa (teclas CTRL e MENU e, de seguida, as opções **4:Janela/Zoom >> 2:Zoom – Caixa**) centrada no ponto e deslocar o cursor ao longo do gráfico (cursor sobre o gráfico, prime as teclas CTRL e MENU e seleciona as opções **7:Traçar >> 1:Traçado do gráfico**).





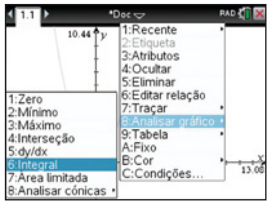
b) No editor de funções, introduz a expressão da função e, de seguida, configura a tabela adequadamente colocando como valor inicial um qualquer valor do domínio da função, por exemplo, −10, e como incremento da tabela −10. Desta forma, terás a variável independente x a tender para $-\infty$. Percorrendo os valores da tabela, verificas que a função está a tender para 2 quando x tende para $-\infty$, isto é, o limite é 2. O mesmo podes constatar percorrendo o gráfico da função.

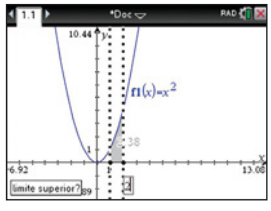


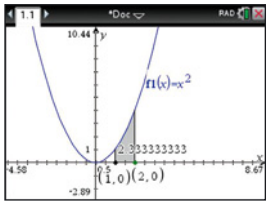
Página 80

Cálculo de integrais

Abre uma página de gráficos e, no editor de funções, insere a expressão analítica da função em **f1**, isto é, **f1(x)=x²**. De seguida, com o cursor sobre o gráfico da função e recorrendo ao menu de contexto (teclas CTRL e MENU), seleciona as opções **6:Integral >> 8:Analisar gráfico**. Na representação gráfica da função, indica o limite inferior, premindo a tecla 1 e depois ENTER, e o limite superior, premindo tecla 2 e depois ENTER, surgindo de imediato o valor do integral e a sombreado a correspondente região.



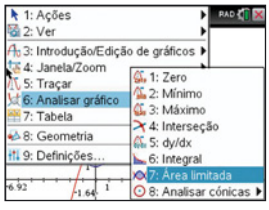


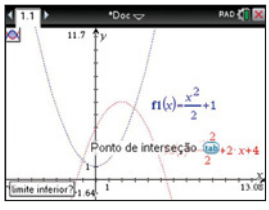


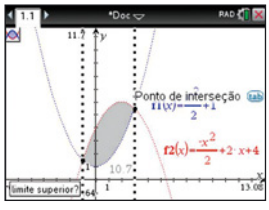
Página 87
Áreas resultantes de interseções
Exercício resolvido

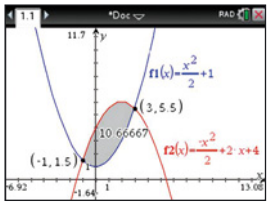
No editor de funções de uma página de gráficos, introduz as expressões das duas parábolas em **f1** e **f2**, respetivamente, e representa-as graficamente.

No menu da aplicação de gráficos, tecla MENU, seleciona as opções **6:Analisar gráfico >> 7:Área limitada**, ferramenta que permite calcular a área da região limitada entre o gráfico de duas funções. Com o cursor, identifica o limite inferior como sendo o ponto de interseção das curvas com abcissa inferior e, como limite superior, o outro ponto de interseção. Ao premir ENTER surgirá o valor da área.



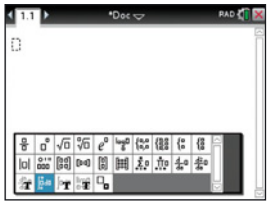


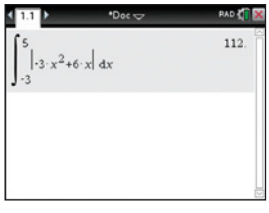




Página 88
Exercício resolvido

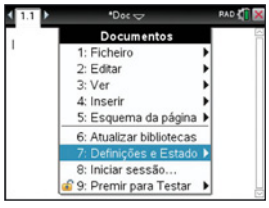
Numa página de calculadora, acede à palete de operadores matemático, clicando a tecla . De seguida, seleciona o operador integral e insere todos os campos deste operador, sendo que para obteres o operador módulo (valor absoluto) bastará escreveres **abs(** e, de seguida, a expressão. Premindo ENTER obterás o valor numérico do integral.

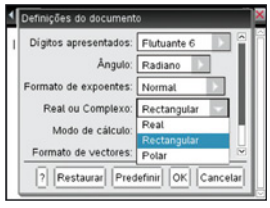




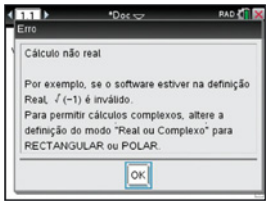
Página 106
Números complexos

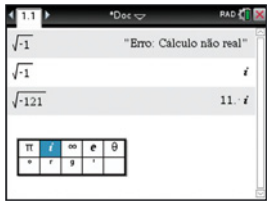
Para escrever e calcular números complexos devemos ter em consideração as configurações do documento em que estamos a trabalhar. Para acederes às **Definições do documento**, coloca o cursor sobre o simbolo de roldana no canto superior do ecrã e prime a tecla ENTER ou , ou então prime a tecla doc e seleciona a opção **7:Definições e Estado**. No parâmetro relativo ao conjunto de números a considerar como domínio dos cálculos a efetuar, **Real ou Complexo**, podes selecionar a opção **Real**, a opção complexo na forma **Rectangular** (algébrica) ou a opção complexo na forma **Polar** (trigonométrica).





Se estiver selecionada a opção **Real**, num cálculo em que o resultado seja um número complexo surge uma mensagem de cálculo não real. Se estiver o modo **Rectangular**, surge o resultado na forma algébrica, a+bi. Para introduzires a unidade imaginária *i* prime a tecla , sendo que surgirá uma paleta com números irracionais, símbolos e unidades de medida.

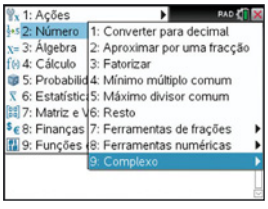


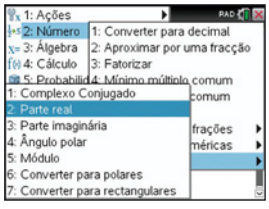


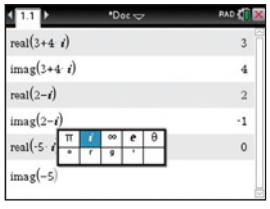
Página 110

Parte real e parte imaginária
Exercício resolvido 1

Numa página de calculadora do teu documento, configurado em modo complexo **Rectangular** ou **Polar**, podes obter as várias ferramentas/operações com números complexos premindo a tecla MENU, selecionando de seguida a opção **9:Complexo** e, depois, a operação/função pretendida. Podes, ainda, usando o teclado alfanumérico da tua calculadora, escrever o nome do operador/função, por exemplo, escrever «real» (para obter a parte real) ou «imag» (para obter a parte imaginária) e, de seguida, entre parênteses, o número complexo.



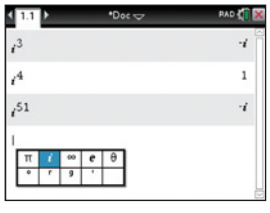




Página 111

Cálculos simples
Exercício resolvido 4

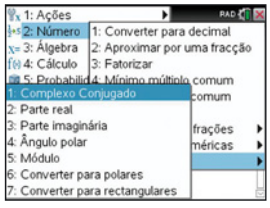
Escreve a unidade imaginária i premindo a tecla π e selecionando a opção pretendida de entre as que surgem na paleta.

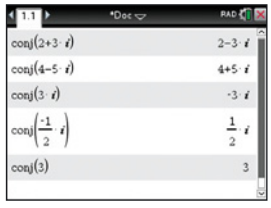


Página 114

Conjugado de um número complexo

Para obteres o conjugado de um número complexo, utiliza a função **conj(**, selecionando-a no menu, tecla MENU, e seguindo as opções **9:Complexo >> 1:Complexo Conjugado**, ou, então, escrevendo a função usando o teclado alfanumérico.

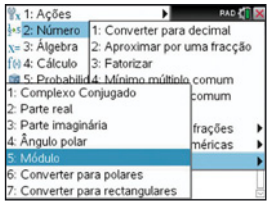


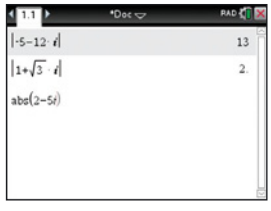


Página 117

Módulo de um número complexo
Exercício 18. a)

Para obteres o módulo de um número complexo, utiliza a opção **5:Módulo** dos números complexos ou escreve, utilizando o teclado alfanumérico, a função **abs(**.

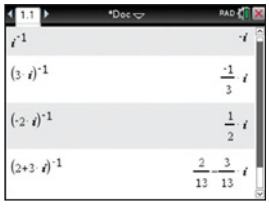




Página 122

Inverso de um número complexo
Exercício 23

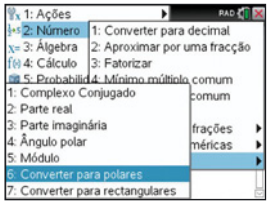
Para determinares o inverso de um número complexo, basta elevá-lo a −1.

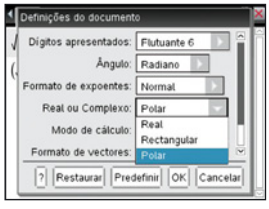


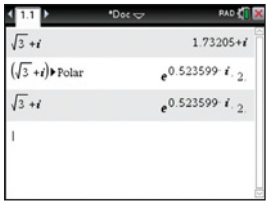
Página 128

Forma trigonométrica de um número complexo

Para escrever na forma trigonométrica um número complexo que está na forma algébrica, podemos optar por uma de duas formas. Se o documento estiver configurado em modo complexo **Rectangular**, usa a função de conversão para polar, **6:Converter para polares**, ou, então, altera a configuração do documento para complexo **Polar**.



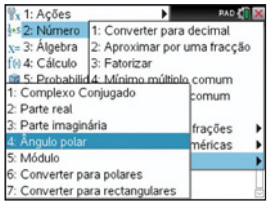


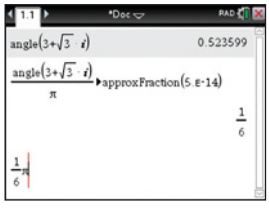


Página 133

Exercício 34. a)
Argumento de um número complexo

Para obteres o argumento de um número complexo, utiliza a função **4:Ângulo polar** dos números complexos ou escreve, utilizando o teclado alfanumérico, a função **angle(**. Podes obter o valor do argumento do número complexo em π radianos, dividindo o argumento por π e aproximando esse valor a uma fração.

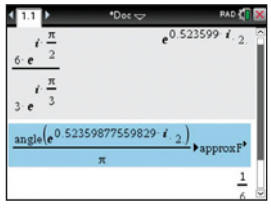




Página 138

Operações com números complexos na forma trigonométrica

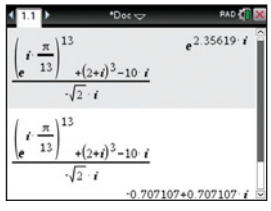
Com a calculadora configurada para a forma trigonométrica, basta escrever a expressão. Podes obter o valor do argumento do número complexo em π radianos, dividindo o argumento por π e aproximando esse valor a uma fração.



Página 141

Operações com números complexos na forma trigonométrica e na forma algébrica
Exercício resolvido 2

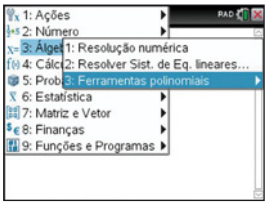
Podes efetuar diretamente esta operação, com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica, sendo que o resultado surgirá no modo em que estiver configurado nesse momento o documento, em modo complexo **Polar** (forma trigonométrica) ou em modo complexo **Rectangular** (forma algébrica).

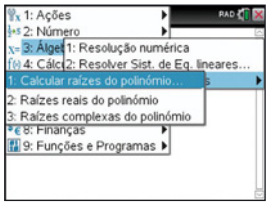


Página 149

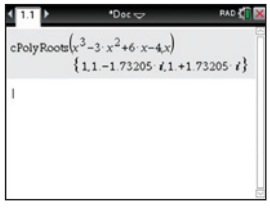
Resolução de equações em ℂ
Exercício resolvido 1

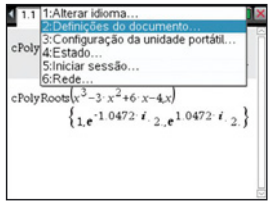
No menu da aplicação Calculadora, tecla MENU, seleciona as opções **3:Álgebra >> 3:Ferramentas polinomiais >> 1:Calcular raízes do polinómio...** . Na janela, configura adequadamente os parâmetros grau do polinómio e domínio para o cálculo das raízes, neste caso, **Grau: 3** e **Raízes: Complexo**.





Introduz os os coeficientes do polinómio e pressiona o botão OK ou a tecla ENTER para obteres as soluções da equação, que surgirão no modo em que estiver configurado o documento.





$$\frac{}{2n^2} = 0$$

$$\frac{7}{3n^2+4}$$

$$\lim \frac{7}{3n^2+4} = 0$$

$$c_n = \frac{6n+1}{2n^2-1}$$

$$\lim \frac{6n+1}{2n^2-1} = \lim \frac{n\left(6+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2n-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$d_n = \frac{5n^2+3n-1}{4n^2}$$

$$\lim \frac{5n^2+3n-1}{4n^2} = \lim \frac{n^2(}{}$$

$$e_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

e) $$\lim \frac{n+1}{n^2+1} = \lim \frac{n(1}{n(}$$

Respostas dos exercícios propostos

Respostas dos exercícios propostos

Tema 5 Trigonometria e Funções Trigonométricas

1. Fórmulas trigonométricas

1 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2

a) $\text{sen}\,(x-y) = \text{sen}\,[x+(-y)] =$

$= \text{sen}\,x\cos(-y) + \text{sen}\,(-y)\cos x =$

$= \text{sen}\,x\cos y - \text{sen}\,y\cos x$

b) $\cos(2x) = \cos\,(x+x) =$

$= \cos x\cos x - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,x =$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

3

a) $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ e $\frac{7}{8}$ **b)** $\sqrt{\frac{3}{8}}$

4 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5

a) Como $\cos x = \frac{\overline{BS}}{4}$, vem $\overline{BS} = 4\cos x$,

pelo que $\overline{DC} = 3 + 4\cos x$.

Como $\text{sen}\,x = \frac{\overline{CS}}{4}$, vem $\overline{CS} = 4\,\text{sen}\,x$.

Portanto, $A(x) = \frac{3+3+4\cos x}{2} \times 4\,\text{sen}\,x =$

$= \frac{6+4\cos x}{2} \times 4\,\text{sen}\,x =$

$= (3+2\cos x) \times 4\,\text{sen}\,x =$

$= 12\,\text{sen}\,x + 4 \times 2\,\text{sen}\,x\cos x =$

$= 12\,\text{sen}\,x + 4\,\text{sen}\,(2x)$

b) $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 4\,\text{sen}\,\pi =$

$= 12 \times 1 + 4 \times 0 = 12$

Interpretação geométrica: quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto C coincide com o ponto Q e o ponto D coincide com o ponto P, pelo que o quadrilátero $[ABCD]$ coincide com o retângulo $[ABQP]$, cuja área é $3 \times 4 = 12$.

6

a) $x = 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

7 Conjunto-solução: $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

8 $\text{sen}\,105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\text{tg}\,105° = -2-\sqrt{3}$

9

a) $\frac{5\sqrt{3}-2}{12}$ **b)** $\frac{16}{65}$

10 $-\frac{4}{5}$

11

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$

12

a) $\frac{\text{sen}\,(x-y)}{\cos x\cos y} =$

$= \frac{\text{sen}\,x\cos y - \text{sen}\,y\cos x}{\cos x\cos y} =$

$= \frac{\text{sen}\,x\cos y}{\cos x\cos y} - \frac{\text{sen}\,y\cos x}{\cos x\cos y} =$

$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} - \frac{\text{sen}\,y}{\cos y} = \text{tg}\,x - \text{tg}\,y$

b) $\frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y}{\text{tg}\,x - \text{tg}\,y} = \frac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\text{sen}\,y}{\cos y}}{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} - \frac{\text{sen}\,y}{\cos y}} =$

$= \frac{\frac{\text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x}{\cos x\cos y}}{\frac{\text{sen}\,x\cos y - \text{sen}\,y\cos x}{\cos x\cos y}} =$

$= \frac{\text{sen}\,x\cos y + \text{sen}\,y\cos x}{\text{sen}\,x\cos y - \text{sen}\,y\cos x} =$

$= \frac{\text{sen}\,(x+y)}{\text{sen}\,(x-y)}$

c) $\text{sen}\,(3x) = \text{sen}\,(2x+x) =$

$= \text{sen}\,(2x)\cos x + \text{sen}\,x\cos(2x) =$

$= 2\,\text{sen}\,x\cos x\cos x + \text{sen}\,x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) =$

$= 2\,\text{sen}\,x(1-\text{sen}^2 x) + \text{sen}\,x(1-2\,\text{sen}^2 x) =$

$= 2\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x + \text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x =$

$= 3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x$

d) $\cos(4x) = \cos\,[2 \times (2x)] =$

$= \cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x) =$

$= \cos^2(2x) - [1-\cos^2(2x)] =$

$= 2\cos^2(2x) - 1 =$

$= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)^2 - 1 =$

$= 2\,[\cos^2 x - (1-\cos^2 x)]^2 - 1 =$

$= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 =$

$= 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 =$

$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

13

a) $\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}\,(2x)} = \frac{1-(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2\,\text{sen}\,x\cos x} =$

$= \frac{1-\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2\,\text{sen}\,x\cos x} = \frac{2\,\text{sen}^2 x}{2\,\text{sen}\,x\cos x} =$

$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\,x$

b) $\text{tg}\,15° = \frac{1-\cos(2\times 15°)}{\text{sen}\,(2\times 15°)} = \frac{1-\cos(30°)}{\text{sen}\,(30°)} =$

$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2 = 2-\sqrt{3}$

14

a) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$

$= \cos 45°\cos 30° + \text{sen}\,45°\,\text{sen}\,30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1+\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{2} =$

$= \frac{1-\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{2} = \frac{2\cos^2 x}{2} = \cos^2 x$

$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{2} =$

$= \frac{1-\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2} = \frac{2\,\text{sen}^2 x}{2} = \text{sen}^2 x$

c) Tem-se $\text{sen}^2\,7{,}5° = \frac{1-\cos(2\times 7{,}5°)}{2} =$

$= \frac{1-\cos 15°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

pelo que $\text{sen}\,7{,}5° = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}} \approx 0{,}131$.

Tem-se $\cos^2 7{,}5° = \frac{1+\cos(2\times 7{,}5°)}{2} =$

$= \frac{1+\cos 15°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$

pelo que $\cos 7{,}5° = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}} \approx 0{,}991$.

15 $(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) =$

$= (\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha) =$

$= (\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 =$

$= \text{sen}^2\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$

$= 1 + \text{sen}\,(2\alpha)$

16

a) 1

b) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

c) $-\frac{24}{25}$

17

a) $x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

18 $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

19 $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$

20 $\frac{224}{17}$

21

a) Área do retângulo $[ABCD] =$

$= \overline{AD} \times \overline{AB} =$

$= 2\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$

b) $\frac{1}{2}$

22

a) $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} =$

$= \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y} =$

$= \frac{\frac{\operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y} + \frac{\operatorname{sen}y\cos x}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}} = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \times \operatorname{tg}y}$

b) $2\sqrt{2} - 3$

2. Limites e derivadas de funções trigonométricas

23

a) 1 b) 1 c) 2 d) 1

24

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4 - 4\cos x}{x(x + \operatorname{sen}x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(x+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4}{1+\cos x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x(x+\operatorname{sen}x)} =$

$= \frac{4}{1+\cos 0} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(x+\operatorname{sen}x)} =$

$= 2 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x} =$

$= 2 \times 1 \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}x}{x}} =$

$= 2 \times 1 \times \frac{1}{1+1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname{sen}0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, f é contínua no ponto 0.

b) -2π, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$

25

a) $4\cos x + 3\operatorname{sen}(3x)$

b) $x\cos x$

c) $\frac{1}{1+\cos x}$

d) $\operatorname{sen}(2x)$

e) $3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - \operatorname{sen}^4 x$

f) $\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$

h) $2\pi x\cos(2\pi x)$

26

a) Área do quadrilátero $[OPQR]$ = Área do trapézio $[PQRS]$ − Área do triângulo $[OPS]$ =

$= \frac{1+\cos x}{2}(1+\operatorname{sen}x) - \frac{\cos x\operatorname{sen}x}{2} =$

$= \frac{(1+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}{2} - \frac{\cos x\operatorname{sen}x}{2} =$

$= \frac{1+\operatorname{sen}x+\cos x+\cos x\operatorname{sen}x}{2} - \frac{\cos x\operatorname{sen}x}{2} =$

$= \frac{1+\operatorname{sen}x+\cos x}{2}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $f(0) = 1$

Interpretação: $f(0)$ é a área do quadrado $[OBQR]$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1$

Interpretação: $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$ é a área do triângulo $[AQR]$.

27 A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ e está voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Existem dois pontos de inflexão: um com abcissa $\frac{\pi}{3}$ e outro com abcissa $\frac{2\pi}{3}$.

28 $y = 2x + 1$

29

a) $\frac{1}{9}$ b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{2}{\pi}$ d) $+\infty$

e) $\frac{1}{2}$ f) $\sqrt{3}$

g) $+\infty$ h) 0

30

a) π

b) O gráfico de f tem uma assíntota vertical, de equação $x = \pi$.

31

a) $2\sqrt{3}$

b) 0, $\frac{2\pi}{3}$ e π

c) $\frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}$

d) Existe uma assíntota vertical, de equação $x = \frac{\pi}{2}$.

32

a) $\frac{3}{\pi}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$ c) 1

33

a) $1 + \sqrt{2}$

b) $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}$

c) A função f é contínua no ponto 1.

34 5

35

a) $2\cos x - 3\operatorname{sen}(3x)$

b) $-\operatorname{sen}(2x)$

c) $-\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}$

d) $2\cos(2x)\cos(3x) - 3\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)$

e) $\cos^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

f) $x\cos x$

g) $\operatorname{tg}^4 x$

h) $\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^3 x}$

36 $\frac{\pi}{4}$

37

a) 6

b) A reta de equação $y = x$ é a única assíntota não vertical ao gráfico de f.

c) $y = x + 1$

38

a) $y = 4x$

b) A concavidade do gráfico está voltada para cima nos intervalos $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ e está voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Existem dois pontos de inflexão: um com abcissa $\frac{\pi}{6}$ e outro com abcissa $\frac{5\pi}{6}$.

39

a) Existem duas assíntotas verticais, uma de equação $x = 0$ e outra de equação $x = \pi$.

b) A função é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

A função tem um mínimo para $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Tem-se:

- a função é contínua no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41$;

  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}15$
- $2{,}15 < 2{,}3 < 2{,}41$

Portanto, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, tem-se que $\exists c \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] : f(c) = 2{,}3$.

d) $\frac{(6 + \sqrt{3})\pi}{6}$

40 Tem-se $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Por outro lado, tem-se que $a + b = \pi \Leftrightarrow b = \pi - a$.

Portanto,

- o declive da reta r é $f'(a) = -\operatorname{sen} a$;
- o declive da reta s é $f'(b) = -\operatorname{sen} b = -\operatorname{sen}(\pi - a) = -\operatorname{sen} a$

Logo, as retas r e s têm o mesmo declive, pelo que são paralelas.

41

a) Área da região azul =

= Área do triângulo $[ABP]$ +

+ Área do triângulo $[BCP]$ =

$= \frac{\overline{AB} \times \overline{EP}}{2} + \frac{\overline{BC} \times \overline{FP}}{2} =$

$= \frac{1 \times \operatorname{sen} x}{2} + \frac{1 \times (1 - \cos x)}{2} =$

$= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{1 - \cos x}{2} =$

$= \frac{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}{2}$

b) $\frac{10}{13}$

c) $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Quando $x = \frac{\pi}{4}$, o ponto P pertence ao segmento de reta $[AC]$, pelo que a região colorida a azul é o triângulo $[ABC]$ cuja área é $\frac{1}{2}$.

d) Perímetro da região azul =

$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AP} + \overline{PC} =$

$= 1 + 1 + 1 + \overline{PC} = 3 + \overline{PC}$

Tem-se $\overline{PC}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FC}^2$, donde vem:

$\overline{PC}^2 = (1 - \cos x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 1 - 2\cos x +$

$+ \cos^2 x + 1 - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 3 - 2\cos x - 2\operatorname{sen} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PC}^2 = 3 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PC} = \sqrt{3 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}$

Portanto, o perímetro da região colorida a azul é igual a $3 + \sqrt{3 - 2(\operatorname{sen} x + \cos x)}$.

e) $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

Quando $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto D, pelo que a região colorida a azul é o quadrado $[ABCD]$ cujo perímetro é 4.

f) $\frac{\pi}{4}$

3. Osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton

42

a) 12

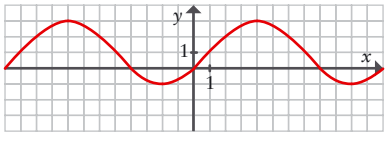
b) $[-1, 3]$

c) $x = 12k \vee x = -4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = 4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = -2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

f)



43 $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$

44

a) 6 m **b)** 9 m **c)** 2 h e 14 h

45

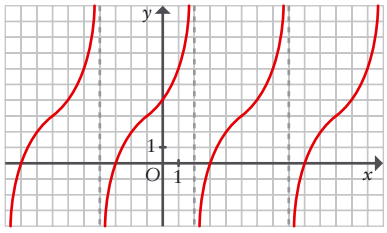
a) $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\mathbb{R}$ **c)** 6 **d)** 4

e) $x = -3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$

f) $+\infty$ **g)** $-\infty$

h)



46

a) 2

b) Maior: 2; menor: -2.

c) 2 segundos

d) 30

47

a) $f(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)$

b) Amplitude: 4; pulsação: $\frac{\pi}{3}$;

período: 6; fase: $\frac{2\pi}{3}$

48

a) $x(t) = \operatorname{sen}(\pi t) = \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

b) Amplitude: 1; pulsação: π;

período: 2; frequência: $\frac{1}{2}$;

fase: $\frac{3\pi}{2}$

49

a) $x(t) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) =$

$= \sqrt{12}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{12}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{5\pi}{3}\right)$

b) Amplitude: $\sqrt{12}$; período: 8;

frequência: $\frac{1}{8}$; fase: $\frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{10}{3}, \frac{22}{3}, \frac{34}{3}, \frac{46}{3}, \frac{58}{3}$

50 $f'(x) + f(x) = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x + \operatorname{sen} x)' + \cos x + \operatorname{sen} x = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\operatorname{sen} x + \cos x + \cos x + \operatorname{sen} x = 2\cos x$,

o que é verdade.

51 Seja $x(t)$ a abcissa do ponto P no instante t e seja d a distância do ponto P ao ponto de equilíbrio. Como o ponto P tem abcissa positiva, tem-se $d = x(t)$.

Como o ponto P está à direita do ponto de equilíbrio, a força F exercida pela mola sobre P tem sentido negativo. De acordo com a lei de Hooke, o módulo desta força é proporcional à distância d a que P se encontra do ponto de equilíbrio.

Tem-se, portanto, $F=-kd$, onde k é a constante de proporcionalidade. Vem, então: $F=-kd=-kx(t)$.

De acordo com a segunda lei de Newton, esta força é igual ao produto da massa m pela aceleração do ponto P, ou seja, $F=mx''(t)$.

Portanto, $mx''(t)=-kx(t)$.

52

a) 45

b) $\sqrt{5}\cos(3t+3{,}6)$

Teste 1 5+5

Págs. 38 e 39

Grupo I

1. **(D)**

2. **(C)**

3. **(A)**

4. **(D)**

5. **(B)**

Grupo II

1. $-\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$

2. **a)** $f(\alpha)=\dfrac{17}{5}$

b) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

c) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right[$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Os pontos de abcissas $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão do gráfico da função f.

d) $\dfrac{13\pi}{12}$ (u.a.)

3. **a)** A reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g, quando $x\longrightarrow-\infty$.

As retas de equações $x=0$ e $x=\pi$ são assíntotas verticais ao gráfico da função g.

b) A função é decrescente no intervalo $\left]0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right[$.

A função atinge um mínimo relativo para $x=\dfrac{\pi}{3}$.

4. 2

5. **a)** 252

b) $\dfrac{1}{15}$

53

a) $x=6k \vee x=-2+6k, k\in\mathbb{Z}$

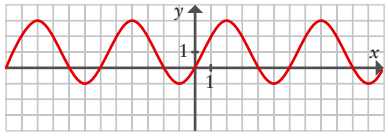
b) 6

c) $[-1,3]$

d) $x=2+6k, k\in\mathbb{Z}$

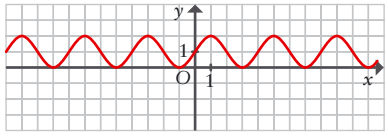
e) $x=-1+6k, k\in\mathbb{Z}$

f)

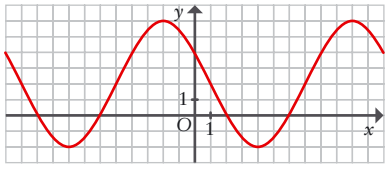


54

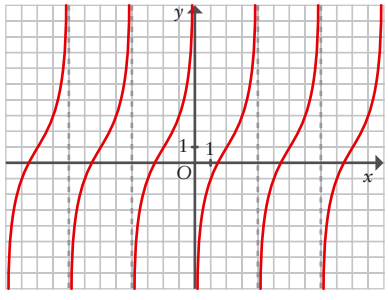
a)



b)



c)



55

a) $4\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{5}x+\dfrac{\pi}{10}\right)+2$

b) $5\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{10}x\right)+2$

c) $2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{50}x+\dfrac{\pi}{25}\right)+3$

56

a) 12

b) $[-6,4]$

c) $5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{7\pi}{6}\right)-1$

57 $-2\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2$

58

a) 18 h 7 min **b)** 61

59

a) $a=1{,}8$; $b=\dfrac{\pi}{6}$; $c=\dfrac{\pi}{6}$; $d=6{,}1$

b) 54 minutos

60

a) -4

b) Maior abcissa: 8; menor abcissa: -8.

c) Amplitude: 8; pulsação: $\dfrac{\pi}{6}$;

fase: $\dfrac{2\pi}{3}$; período: 12;

frequência: $\dfrac{1}{12}$

61

a) $M\,\text{sen}(Bt)+N\cos(Bt)=$

$=\dfrac{\sqrt{M^2+N^2}}{\sqrt{M^2+N^2}}\left[M\,\text{sen}(Bt)+N\cos(Bt)\right]=$

$=\sqrt{M^2+N^2}\left[\dfrac{M}{\sqrt{M^2+N^2}}\text{sen}(Bt)+\right.$

$\left.+\dfrac{N}{\sqrt{M^2+N^2}}\cos(Bt)\right]=$

$=\sqrt{M^2+N^2}\left[-\text{sen}(C)\,\text{sen}(Bt)+\right.$

$\left.+\cos(C)\cos(Bt)\right]=$

$=\sqrt{M^2+N^2}\cos(Bt+C)$

b₁) $\sqrt{18}\cos\left(2t+\dfrac{7\pi}{4}\right)$

b₂) $\sqrt{2}\cos\left(\pi t+\dfrac{5\pi}{4}\right)$

b₃) $4\cos\left(3\pi t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

b₄) $8\cos\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

b₅) $5\cos(8t+5{,}64)$

62

a) $x''(t)=-9x(t)$

b) $x(t)=5\cos(3t+2{,}5)$

+ Exercícios Propostos

63 (A)	**64** (C)	**65** (C)	**66** (A)
67 (B)	**68** (A)	**69** (C)	**70** (A)
71 (D)	**72** (C)	**73** (D)	**74** (B)
75 (B)	**76** (B)	**77** (B)	**78** (C)
79 (D)	**80** (D)	**81** (D)	**82** (D)
83 (A)	**84** (D)	**85** (D)	**86** (D)
87 (A)	**88** (B)	**89** (B)	**90** (A)

91

a) $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

c) $x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

92 $\frac{7}{9}$

93

a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{x\in\mathbb{R}:\left(\exists k\in\mathbb{Z}:x=\frac{k\pi}{2}\right)\right\}$

b) Para $x\in D_f$, tem-se:

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\operatorname{sen}x\cos x}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2}{2\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$$

c) C.S. $=\left]\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right[$

94

a) $f(\alpha)=\frac{\overline{PR}\times\overline{RQ}}{2}=\frac{(1-\cos\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{2}=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{4}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

b) $\frac{9+4\sqrt{5}}{20}$

95

a) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{AB}\times\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\overline{AC}=2\overline{AB}\times\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

b) $\alpha=\frac{2\pi}{n}$, $P=n\times2\times1\times\operatorname{sen}\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}=$

$$=2n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

c) $\lim\left(2n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)\overset{\infty\times0}{=}2\lim\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$$=2\pi\lim\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=2\pi\times1=2\pi,$$

pois a sucessão de termo geral $\frac{\pi}{n}$ tende para 0 e $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

Este limite é o perímetro do círculo de raio 1, que é o limite da sucessão dos perímetros dos polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1, quando o número de lados tende para $+\infty$.

96

a) $-\frac{1}{3}$

b) 1

c) -1

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

97 $a=-\frac{1}{2}$ ou $a=\frac{1}{2}$

98

a) Área $=\frac{\overline{OR}+\overline{PQ}}{2}\times\overline{RQ}=$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cos\alpha}{2}\times\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{4}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$; quando $x=\frac{\pi}{2}$, o ponto P coincide com o ponto A e o quadrilátero $[OPQR]$ é um retângulo de largura igual a $\frac{1}{2}$ e altura igual a 1.

c) $\frac{2\pi}{3}$

99

a) f é crescente em $\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$, em $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$; f é decrescente em $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$;

$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ são máximos relativos e

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$ e $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}$ são mínimos relativos.

b) 3

c) $f(a)+f(b)=\operatorname{sen}(2a)+a+\operatorname{sen}(2b)+b=$

$$=\operatorname{sen}(2a)+\operatorname{sen}(2b)+\pi=$$

$$=\operatorname{sen}(2a)+\operatorname{sen}(2(\pi-a))+\pi=$$

$$=\operatorname{sen}(2a)+\operatorname{sen}(2\pi-2a)+\pi=$$

$$=\operatorname{sen}(2a)+\operatorname{sen}(-2a)+\pi=$$

$$=\operatorname{sen}(2a)-\operatorname{sen}(2a)+\pi=\pi$$

d) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$

100

a) 107 149,52 euros

b) É o segmento de reta $[FC]$.

c) $\overline{BC}=\frac{2}{\operatorname{sen}x}$, $\operatorname{tg}x=\frac{2}{4-\overline{FB}}$, $\overline{FB}=4-\frac{2}{\operatorname{tg}x}$

$$c(x)=\left(4-\frac{2}{\operatorname{tg}x}\right)\times15+\frac{2}{\operatorname{sen}x}\times25=$$

$$=60-\frac{30}{\operatorname{tg}x}+\frac{50}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=60-\frac{30\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{50}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=60+\frac{50-30\cos x}{\operatorname{sen}x}$$

d) $\cos x=\frac{3}{5}$

101 $D'_f=[1,e-1]$

102 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}+1<0$ e

$f(0)=0-0+1>0$

A função f é contínua em $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ e $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0<f(0)$, portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f tem pelo menos um zero em $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$.

$f'(x)=\cos x+2$; assim, $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$ e, portanto, a função f é crescente, de onde se conclui que não pode ter mais do que um zero.

Como não pode tem mais do que um zero, conclui-se que tem exatamente um zero que pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$.

103

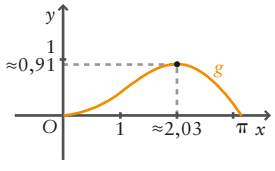
a) $f'(\pi)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}(\pi+h)+\pi+h-0-\pi}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{-\operatorname{sen}h}{h}+\frac{h}{h}\right)=-1+1=0$$

b) $y=2x-2\pi$

c) Seja g a função de domínio $]0,\pi[$, definida por $g(x)=\frac{x\times\operatorname{sen}x}{2}$.

A função g dá a área do triângulo $[OPQ]$.



O valor de x, arredondado às centésimas, é 2,03.

104

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}+2\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=$

$$=g'(0)+1+2=0+3=3$$

b) $g''(x)=1+2\cos x$; o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

105

a) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $f(a) = -\frac{8\sqrt{5}}{27}$

c) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

106

a) A função é contínua.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 + \frac{1+0}{0^-} = -\infty$ e

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 + \frac{1+0}{0^-} = -\infty$

As retas de equações $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais.

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um conjunto limitado.

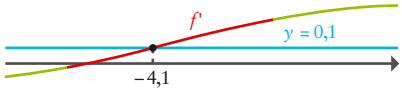
b) $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$; $f(\pi) = 1$ é máximo.

c) $A = \frac{6\pi - 2\sqrt{3}\,\pi}{9}$

107

a) $x = 1$ e $y = 2x + 1$

b) $f'(x) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\cos x \times x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{1}{10}$;



$f(-4{,}066) \approx 1{,}8$

A reta tangente ao gráfico da função no ponto $A(-4{,}1;\ 1{,}8)$ é paralela à reta de equação $10y - x = 0$.

108 0,266 m

109 $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 2 < 0$ e $f'(0) = 1 > 0$

A função f' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0)$, portanto, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f' tem pelo menos um zero em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

$f''(x) = 2 - \cos x$; assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) < 0$ e, portanto, a função f' é decrescente, de onde se conclui que não pode ter mais do que um zero.

Como não pode ter mais do que um zero, conclui-se que f' tem exatamente um zero que pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e que é abcissa do único extremo relativo da função f.

110

a) A reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$ é a única assíntota vertical.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(2e^x - x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{2e^x - x}{e^x}\right) =$
$= \ln(2)$

A reta de equação $y = x + \ln(2)$ é assíntota ao gráfico de f, em $+\infty$.

c) $y = \frac{16 - 8\pi}{\pi^2}x + \frac{8 - 2\pi}{\pi}$

111

a) As retas de equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assíntotas verticais.

b) $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2\cos^2 \frac{\pi x}{2}}$;

f' não tem zeros, é negativa em $]-1, 1[$;

portanto, f é decrescente;

$f''(x) = -\frac{\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{4\cos^4 \frac{\pi x}{2}}$;

o gráfico tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[0, 1[$; o ponto de coordenadas $(0, 0)$ é ponto de inflexão.

112

a) As retas de equações $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ são as únicas assíntotas.

b) $h'(x) = \frac{-8\cos(2x)e^{\operatorname{sen}(2x)}}{\left(e^{\operatorname{sen}(2x)} - 1\right)^2}$; $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{e-1}$ é mínimo relativo e $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{e^{-1} - 1}$ é máximo relativo;

$D'_h = \left]-\infty, \frac{4}{e^{-1}-1}\right] \cup \left[\frac{4}{e-1}, +\infty\right[$.

113

a) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) =$
$= \operatorname{sen} x + \cos x = f(x)$

b) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$; f é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$;

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ é máximo absoluto e

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ é mínimo absoluto da restrição de f ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Dado que 2π é período da função f, o seu contradomínio é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

c) $-\frac{7\pi}{12}$

d) $f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x = -(\operatorname{sen} x + \cos x) = -f(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Como f'' muda de sinal nestes valores, eles são as abcissas dos pontos de inflexão.

114 $D_f = \mathbb{R}$; f é contínua e tem período fundamental 2π; $f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$;

no intervalo $[0, 2\pi]$, a função é crescente em $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é máximo absoluto e $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ é mínimo absoluto.

$D'_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; g é contínua e tem período fundamental 4π; as retas de equações $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas verticais;

$g'(x) = \frac{-5\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$; no intervalo $]0, 4\pi[$, a função é crescente em $[\pi, 2\pi[$ e em $]2\pi, 3\pi]$ e é decrescente em $]0, \pi]$ e em $[3\pi, 4\pi[$; $f(\pi) = 5$ é mínimo relativo e $f(3\pi) = -5$ é máximo relativo.

$D'_g =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$

115 As funções têm igual domínio, contradomínio e período fundamental. Também atingem os extremos nos mesmos pontos, mas, no caso do gráfico A, o mínimo é atingido em pontos em que não existe derivada e, no caso do gráfico B, o mínimo é atingido em pontos em que a derivada é 0. O gráfico A corresponde à função g e o gráfico B corresponde à função f.

116

a) A função é crescente em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e é decrescente em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;

$f(\pi) = e^{-\frac{1}{4}}$ é máximo (absoluto).

b) Não existem assíntotas.

c) $D' = \left]0, e^{-\frac{1}{4}}\right]$

d) C.S. $= \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$

117

a) 129,61 m^2

b) $\overline{ED} = 10\cos\alpha$, $h = 10\operatorname{sen}\alpha$,

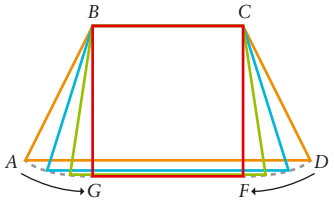
$A(\alpha) = \frac{(10 + 2 \times 10\cos\alpha) + 10}{2} \times 10\operatorname{sen}\alpha =$
$= (10 + 10\cos\alpha) \times 10\operatorname{sen}\alpha =$
$= 100\operatorname{sen}\alpha + 50 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$
$= 100\operatorname{sen}\alpha + 50\operatorname{sen}(2\alpha)$

$A'(\alpha) = 100(\cos\alpha + \cos(2\alpha))$;

a área é máxima para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

c) $\lim\limits_{\alpha \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} A(\alpha) = 100$

Quando α tende para $\frac{\pi}{2}$, o ponto D desloca-se para F e o ponto A desloca-se para G. Portanto, o trapézio tende para o quadrado $[GBCF]$, que é um quadrado de área 100 porque tem lado 10.



d) A função A é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right]$, $A\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 106$ e $A\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 93$.

Dado que $A\left(\frac{\pi}{6}\right) < 100 < A\left(\frac{\pi}{5}\right)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists \alpha \in \left]\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}\right[: A(\alpha) = 100$.

118

a) Este limite é $g'(\pi) = 2$.

b) $g''(x) = -\cos x$;

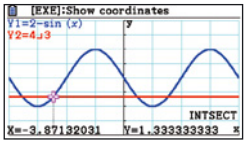
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, os zeros de g'' são $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ que correspondem a dois pontos de inflexão; concavidade voltada para cima em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

c) A afirmação traduz que g é crescente em $\mathbb{R}$, o que é verdade, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ (recorda que $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$).

d) Como o declive da reta tangente ao gráfico de g num ponto é o valor da derivada na abcissa desse ponto, vamos representar a função g' e a reta $y = \frac{4}{3}$.

A resposta é a abcissa do ponto em que os gráficos se intersetam e que tem maior abcissa negativa: $x \approx -3{,}9$.



119

a) $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$

As retas de equações $x = -\pi$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais. Não há outras assíntotas verticais porque a função é contínua no domínio.

Não há assíntotas não verticais porque o domínio é um intervalo limitado.

b) $f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + 1}$; $f(0) = \ln(2)$ é máximo absoluto.

$D'_f =]-\infty, \ln(2)]$

c) $f''(x) = \frac{-\cos x - 1}{(\cos x + 1)^2} = -\frac{1}{1 + \cos x}$

f'' não tem zeros; como a função é duas vezes derivável no domínio, não há pontos de inflexão.

120

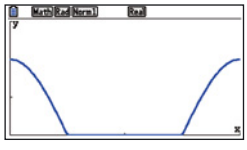
a) É a soma de duas funções contínuas.

b) g é positiva e crescente em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

c) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

d) $D'_g = [0, 2]$

e)



121

a) $\overline{AP} = 1 - \cos\alpha$ e $h = \operatorname{sen}\alpha$;

$$\text{Área} = \frac{(1 - \cos\alpha) \times \operatorname{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{4} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (u.a.)

c) 0,54

122

a) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : (\exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee \right.$
$\left. \vee \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi)\right\}$; zeros: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi)\}$; zeros: $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} : (\exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee \right.$
$\left. \vee \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi)\right\}$; não existem zeros.

123

Função	D'	Período fundamental	Transformações
g	$[1, 5]$	2π	Translação de vetor $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$, seguida de dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de translação de vetor $(0, 3)$
h	$[-1, 1]$	π	Translação de vetor $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$
r	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$\frac{2\pi}{3}$	Translação de vetor $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$
s	$[-1, 3]$	4π	Dilatação horizontal de coeficiente 2, seguida de dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de reflexão de eixo Ox, seguida de translação de vetor $(0, 1)$

124

a) Por exemplo, $a = 4$, $b = 3$ e $c = \pi$.

b₁) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b₂) O menor é $-\frac{99\pi}{2}$ e o maior é $\frac{7\pi}{2}$.

125

a) $a - b = 3 \wedge a - b\cos(3\pi) = 13$

b) 9 h 43 min

126

a) Dado que: $t \in [0, 24[\Rightarrow \frac{\pi t}{6} \in [0, 4\pi[$, o contradomínio da função definida por $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ é $[-1, 1]$; portanto, o contradomínio da função h é $[7, 11]$. Como $h(0) = 7$, conclui-se que às zero horas ocorre uma maré baixa (profundidade mínima) que, necessariamente, é a primeira desse dia.

b) 12 horas, pois o intervalo de tempo entre duas marés baixas corresponde ao período fundamental da função que é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.

c) A embarcação pode ter entrado no porto entre as 4 horas e as 8 horas ou entre as 16 horas e as 20 horas.

127 Por exemplo: $a=5$, $b=\pi$, $c=\frac{\pi}{2}$ e $d=3$.

128 Por exemplo: $a=2$, $b\approx 0{,}5$, $c=4{,}4$ e $d=4$.

129 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$,

$g(x)=2\cos(x+\pi)+1$, $h(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$

e $j(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)+2$

130

a) $A(t)=28 \Longleftrightarrow t=14$ h 18 min

b) 8 horas

c) Obter o gráfico de $A(t)-M(t)$ na janela $[0,24]\times[0,20]$ e determinar o máximo: ocorre às 13 h e 27 min (aproximadamente).

131 $S'(t)=km\cos(kt)-nk\,\text{sen}(kt)$

$S''(t)=-k^2 m\,\text{sen}(kt)-nk^2\cos(kt)$

$\frac{S''(t)}{S(t)}=-k^2$

132 $a=12$, $b=6$ e $c=3$.

133

a) $-2\,\text{sen}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-2\left(\text{sen}\,t\cos\frac{\pi}{6}-\text{sen}\frac{\pi}{6}\cos t\right)=$

$=-2\left(\text{sen}\,t\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right)=$

$=-\sqrt{3}\,\text{sen}\,t+\cos t$

b) 2

c) $[-2, 2]$

134

a) -2 **b)** Seis

135

a) $2\sqrt{3}$

b) 0,44 s; o ponto P inverte, pela primeira vez, o sentido em que se desloca.

136

a) Amplitude: 0,5; período: 1; pulsação: 2π; fase: $\frac{3\pi}{2}$.

b) $x(t)=0{,}5\cos\left(2\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$

c) 1 min 15 s corresponde a 1,25 min; portanto uma equação que traduz o problema é $x(t)=x(1{,}25)$; os instantes são 0,25 s, 1,25 s, 2,25 s e 3,25 s.

137

a) $x(t)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $-\frac{k^2}{9}$

138

a) $t=\frac{4}{3}$

b) A afirmação é falsa porque a função é crescente em $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ mas é decrescente em $\left[\frac{1}{3},1\right]$. Portanto, durante o primeiro segundo, o ponto P só se afasta da origem no primeiro terço de segundo.

c) $b=-1$

139

a) $3\cos\theta$

b) $3\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\theta=\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{2}$, $t\in[0, 24[$

d) $x(t)=3\cos\left(\frac{\pi t}{12}+\frac{\pi}{2}\right)$ e esta expressão é da forma $A\cos(\omega t+\phi)$ com $A>0$, $\omega>0$ e $\phi\in[0, 2\pi[$; Amplitude: 3; pulsação: $\frac{\pi}{12}$; período: 24; fase: $\frac{\pi}{2}$.

140

a) Nos instantes 2 s, 6 s e 8 s.

b) A função x é contínua em $[3, 4]$,

$x(3)=3+2\text{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3-2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$ e

$x(4)=3+2\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3+2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$.

Dado que $x(4)<1{,}5<x(3)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists t\in\,]3, 4[\,: x(t)=1{,}5$.

c) $d(t)=x(t)-3=2\cos\left(\frac{\pi t}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)$

d) Amplitude: 2; pulsação: $\frac{\pi}{3}$; fase: $\frac{5\pi}{3}$

período: 6; frequência: $\frac{1}{6}$.

141 A área total é igual à soma da área lateral com a área da base.

Tem-se $2A\hat{B}F+\frac{\pi}{2}+\alpha=2\pi$, portanto, $A\hat{B}F=\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

$\overline{AB}=2\times 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ e, designando por h a altura de uma face, tem-se $h=4\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Então, a área de cada face é dada por:

$$\frac{2\times 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\times 4\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

Ora, $\frac{2\times 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\times 4\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$

$=16\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=8\times 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=8\times\text{sen}\left[2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$

$=8\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-8\cos\alpha$

Portanto, a área de cada face é $-8\cos\alpha$.

Área da base $=\overline{AB}^2=64\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=32\times 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

De $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$, conclui-se que $2\cos^2 x=\cos(2x)+1$;

então, $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=\cos\left[2\times\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+1=$

$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+1=-\text{sen}\,\alpha+1$.

Portanto,

Área da base $=32(-\text{sen}\,\alpha+1)=32-32\,\text{sen}\,\alpha$

e a área total é dada por:

$32-32\,\text{sen}\,\alpha+4\times(-8\cos\alpha)=$

$=32-32(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)$

142 $\forall x\in\mathbb{R}, \cos(2x)=2\cos^2 x-1$, portanto, $\forall x\in\mathbb{R}, \cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$.

Ora, $\cos x=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \cos x+1=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \frac{\cos x+1}{2}=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

143

$\frac{\text{tg}\,A}{\text{tg}\,B}=\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 B}\Longrightarrow\frac{\frac{\text{sen}\,A}{\cos A}}{\frac{\text{sen}\,B}{\cos B}}=\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 B}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{\text{sen}\,A\,\text{sen}^2 B}{\cos A}=\frac{\text{sen}\,B\,\text{sen}^2 A}{\cos B}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\frac{\text{sen}\,B}{\cos A}=\frac{\text{sen}\,A}{\cos B}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \text{sen}\,B\cos B=\text{sen}\,A\cos A\Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2\,\text{sen}\,B\cos B=2\,\text{sen}\,A\cos A\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \text{sen}(2B)=\text{sen}(2A)$

Como o triângulo é escaleno, não pode ser $2A = 2B$.

Então, $2B = \pi - 2A$. Esta equação é equivalente a $A + B = \frac{\pi}{2}$, de onde se conclui que $C = \frac{\pi}{2}$.

Portanto, o triângulo é retângulo em C.

144 $a \operatorname{sen}(2x) + b\cos(2x) =$

$= b\left[\frac{a}{b}\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)\right] =$

$= b\left[\operatorname{tg} x \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)\right] =$

$= b\left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)\right] =$

$= b\left[\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x) + \cos x \cos(2x)}{\cos x}\right] =$

$= b \times \frac{\cos(2x - x)}{\cos x} = b \times \frac{\cos x}{\cos x} = b$

145 Vamos começar por verificar que:

$$f'\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = 0$$

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cos x - e^{\frac{x}{2}}\operatorname{sen} x = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos x - \operatorname{sen} x\right)$

$f'\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) =$

$= e^{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right)$

Seja $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = y$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$.

De $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$, com $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

conclui-se que $\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Então, $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \wedge \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

portanto, $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} y = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Então,

$f'\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{2}}\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$.

Para concluir que a função atinge o extremo e identificar se é máximo ou mínimo, calculemos a segunda derivada de f em $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

$f''(x) = \left[e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos x - \operatorname{sen} x\right)\right]' =$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos x - \operatorname{sen} x\right) + e^{\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \cos x\right) =$

$= e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \cos x\right) =$

$= e^{\frac{x}{2}}\left(-\frac{3}{4}\cos x - \operatorname{sen} x\right)$

$f''\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{2}}\left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Então, $f''\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) < 0$, de onde se conclui que f atinge um máximo relativo em $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

146

a) Seja $x \in]0, \pi[$;

$a(x) = \frac{x r^2}{2} - \frac{r \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \times r\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \times 2 =$

$= \frac{x r^2}{2} - \frac{r^2 \times 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} =$

$= \frac{x r^2}{2} - \frac{r^2 \times \operatorname{sen} x}{2} = \frac{r^2(x - \operatorname{sen} x)}{2}$.

Seja $x = \pi$.

$a(x) = \frac{\pi r^2}{2}$ e $\frac{r^2(\pi - \operatorname{sen}\pi)}{2} = \frac{r^2(\pi - 0)}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$

Seja $x \in]\pi, 2\pi]$.

$a(x) = \pi r^2 - a(2\pi - x) =$

$= \pi r^2 - \frac{r^2[2\pi - x - \operatorname{sen}(2\pi - x)]}{2} =$

$= \frac{r^2[2\pi - 2\pi + x + \operatorname{sen}(-x)]}{2} =$

$= \frac{r^2(x - \operatorname{sen} x)}{2}$

b) 2,1 m

147 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \Rightarrow (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}' x \times \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = 1$

Como $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, tem-se:

$\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \overset{\operatorname{arctg} x = y}{=} \frac{1}{\cos^2 y}$.

Dado que:

- $\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$
- $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$

conclui-se que $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$.

Então,

$\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} =$

$= \frac{1}{\cos^2 y} = x^2 + 1$.

Finalmente,

$\operatorname{arctg}' x \times \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}' x \times (x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{x^2 + 1}$

Então,

$\left[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]' =$

$= \operatorname{arctg}' x + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' =$

$= \frac{1}{1 + x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} =$

$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} =$

$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1} =$

$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$

Dado que a função derivada é nula em $\mathbb{R}^+$, a função é constante.

Como $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, conclui-se que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Tema 6 Primitivas e Cálculo Integral

Nota: nas respostas a todas as alíneas dos exercícios 3, 4, 5, 6, 7, 10, 20 e 21, c designa uma constante real.

1. Noção de primitiva

1 x^3 ; x^3+1 ; x^3+2 (por exemplo)

2

a) $F(x) = \text{sen}\, x + 2$

b) $F(x) = \text{sen}\, x - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

3

a) $\frac{5x^4}{4}+c$

b) $-\frac{1}{5x^5}+c$

c) $\frac{7\sqrt[7]{x^{12}}}{12}+c$

d) $\frac{5\sqrt[5]{x^2}}{2}+c$

e) $\frac{2\sqrt{x^9}}{9}+c$

f) $3\sqrt[3]{x}+c$

g) $2x^5-x^3+3x^2-5x+c$

h) $28\sqrt[4]{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+\frac{8\sqrt{x^3}}{3}+c$

i) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+c$

j) $3x+2x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+c$

k) $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+\frac{4}{3x^3}-\frac{5}{4x^4}+c$

4

a) $\frac{(x^2+1)^{26}}{26}+c$

b) $-\frac{\cos^4 x}{4}+c$

c) $\frac{2\sqrt{(x^2+7x+5)^3}}{3}+c$

d) $\frac{(4x^3+7)^{10}}{120}+c$

e) $-\frac{1}{2(e^x+1)^2}+c$

f) $\frac{\sqrt{(3+e^{2x})^3}}{3}+c$

g) $-\frac{(1+\cos x)^3}{3}+c$

5

a) $\frac{e^{x^4}}{4}+c$

b) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+4e^x+c$

c) $-\frac{1}{8x^4}-\sqrt{2}\,e^x+c$

d) $2(e^x+4)^6+3e^{-5x}+c$

e) $e^{\text{tg}\,x}+3(x^2+7)^4+c$

f) $2e^{\sqrt{x}}-\frac{(3x+1)^3}{9}+c$

6

a) $\ln|x|+\frac{1}{x}+e^x+c$

b) $4\ln|x|+\frac{x^3}{3}+c$

c) $\frac{\ln(x^2+7)}{2}+c$

d) $-\frac{\ln|1+\cos(3x)|}{3}+c$

e) $\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x+2|+c$

7

a) $2\ln|x|+3e^x+\text{sen}\,x+c$

b) $\text{sen}(e^x+2)+c$

c) $\frac{x^2}{2}+\text{sen}[\ln(x)]+c$

d) $\frac{\text{sen}(x^2+2x)}{2}+c$

e) $2\sqrt{x}-\cos x+c$

f) $-\frac{\cos(4x^3+5)}{12}+c$

g) $\frac{e^{2x}-\cos(e^{2x})}{2}+c$

8

$F(x)=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+4$

9

$F(x)=3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+3-3\ln(2)$, em $]0,2[$

10

a) $x\,\text{sen}\,x+\cos x+c$

b) $\frac{x^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}+c$

c) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+c$

11

57,5

2. Noção de integral

12

a) 8 b) 10

13

a) e^{x^2+1}

b) $3\ln\left[1+(3x+2)^3\right]$

14

a) 52 b) 4

15

$\frac{19}{4}$

16

$\frac{32}{3}$

17

a) 4 b) 9

18

$\pi+e$

19

-1

Teste 2 5+5

Págs. 96 e 97

Grupo I

1. **(A)**
2. **(D)**
3. **(B)**
4. **(B)**
5. **(C)**

Grupo II

1. a) $\frac{1}{2}e^{1+\text{sen}(2x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$

   b) $\ln|x|+6x+6x^2+\frac{8x^3}{3}+c,\ c\in\mathbb{R}$

2. 8 segundos
3. $\frac{5}{12}$
4. $\frac{28}{5}$
5. a) 774 mg

   b) 897 mil anos

20

a) $\frac{x^5}{5} - x + c$

b) $-\frac{2}{3\sqrt{x}} + c$

c) $\frac{x^7}{7} + x^4 + 4x + c$

d) $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} - \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$

e) $\frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + c$

f) $\frac{\text{sen}^2 x}{2} + c$

g) $-\frac{\cos(8x)}{8} + c$

h) $\frac{\text{sen}(5x)}{5} + c$

i) $\frac{\ln|3x-7|}{3} + c$

j) $\frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c$

k) $\frac{x^3}{3} - x - \frac{1}{4x} + c$

l) $\frac{(x+1)^7}{7} + c$

m) $e^x + x^2 - 3x + c$

n) $e^x + \frac{1}{x} + c$

o) $e^{x+3} + 2x + c$

p) $-\ln|1-x| + c$

q) $-\frac{\ln|\cos(5x-7)|}{5} + c$

r) $\sqrt{2\,\text{sen}\,x + 1} + c$

s) $\frac{\text{tg}^4 x}{4} + c$

t) $\frac{\sqrt{(x^4+1)^3}}{6} + c$

u) $\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + c$

v) $\frac{e^{3x-4}}{3} + c$

w) $\frac{e^{x^2+1}}{2} + c$

x) $\frac{e^{2x\sqrt{x}}}{3} + c$

y) $\frac{\ln^3(x)}{3} + c$

z) $2\sqrt{\text{tg}\,x - 1} + c$

21

a) $e^{\text{sen}^2 x} + c$

b) $\frac{e^{x^2+4x+3}}{2} + c$

c) $\frac{e^{5x}}{5} + \frac{(x^2+1)^5}{10} + c$

d) $\frac{\ln(3+e^{2x})}{2} + c$

e) $-2\sqrt{1+\cos^2 x} + c$

f) $\frac{\text{sen}(2\pi x) - 2\cos(\pi x)}{2\pi} + c$

g) $\frac{\text{sen}(x^2+4)}{2} + c$

h) $\frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{1}{3\,\text{sen}^3 x} + c$

i) $\frac{x^2}{2} + 2x - 7\ln|x+1| + c$

22

a) $\frac{5}{72}$

b) $\frac{98}{3}$

c) $\cos\frac{1}{2} - \cos 8$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{4}{3}$

f) 4

g) 1

h) $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

i) $\ln\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

23

a) $\frac{500}{3}$

b) $\frac{32}{3}$

c) $\frac{64}{3}$

d) $\frac{125}{24}$

e) $\frac{125}{6}$

f) $\frac{7}{12}$

g) $\frac{4}{3}$

h) $\frac{\pi^2+4}{2}$

24

$y = x$

25

a) f é crescente em todo o seu domínio, isto é, em $]1, +\infty[$.

b) O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]1, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$. O gráfico de f tem um ponto de inflexão, cuja abcissa é 2.

26

a) Tem-se, para qualquer x real:

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}dt = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2}dt$$

Como a função definida por $y = e^{-t^2}$ é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, pelo que $\int_{-x}^{0} e^{-t^2}dt = \int_0^x e^{-t^2}dt$.

Portanto, para qualquer x real,

$$f(-x) = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2}dt = -\int_0^x e^{-t^2}dt = -f(x)$$

Concluímos, assim, que f é uma função ímpar.

b) Tem-se:

$$t \geqslant 1 \Longrightarrow t^2 \geqslant t \Longrightarrow -t^2 \leqslant -t \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$$

Tem-se, também, que $\forall t \in \mathbb{R}, -t^2 \leqslant 0$, pelo que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leqslant e^0$, ou seja, $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leqslant 1$.

Vem, então:

Se $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^x 1dt \leqslant 1$$

Se $x > 1$,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt =$$
$$= \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 1\,dt + \int_1^x e^{-t}\,dt \leqslant 1 + [-e^{-t}]_1^x =$$
$$= 1 + (-e^{-x} + e^{-1}) = 1 + e^{-1} - e^{-x} \leqslant 1 + e^{-1}$$

Portanto, tem-se:

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \leqslant 1 + e^{-1}$$

Por outro lado, tem-se:

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} > 0$$

pelo que, para qualquer $x \geqslant 0$, $\int_0^x e^{-t^2}dt$ designa uma área.

Portanto, tem-se:

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0$$

Concluímos, assim, que:

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 + e^{-1}$$

Como a função f é ímpar, tem-se:

$$x \leqslant 0 \Longrightarrow -1 - e^{-1} \leqslant f(x) \leqslant 0$$

Portanto,

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 - e^{-1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + e^{-1}$$

Logo, a função f é limitada.

c) Tem-se:

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' = e^{-x^2}$$

Portanto, tem-se $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, pelo que f é crescente.

Tem-se, também:

$$f''(x) = (e^{-x^2})' = -2x\,e^{-x^2},$$

pelo que $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	−
f	∪	p.i.	∩

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[0, +\infty[$.

O ponto de abcissa 0 é ponto de inflexão do gráfico de f.

d) $y = x$

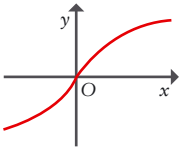
e) Como já vimos, tem-se $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \leqslant 1$.

Portanto, tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leqslant \int_0^x 1 \, dt = x$$

Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant x$.

f)



27

a) $t = 0$ e $t = 4$

b) 328 m

28 0,318 €

29 93 °C

30

a) $3\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{2}$

b) $4 + \pi$

31

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$;

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$;

f é crescente em $\left]-\infty, \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\right]$

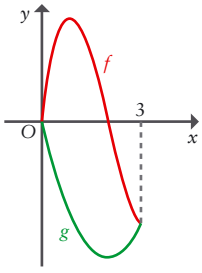
e em $\left[\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ e é decrescente em

$\left[\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right]$;

$f''(x) = 6x - 12$;

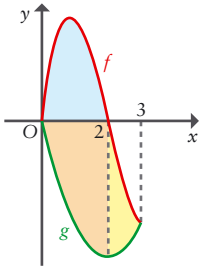
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(2, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico.

b)



c) $\frac{45}{4}$

d) $\frac{45}{4}$



e) São iguais.

Tema 7 Números Complexos

1. Introdução aos números complexos

1 $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

2 Para quaisquer números reais a, b, c, d, e e f, tem-se:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) =$
  $= (c, d) + (a, b)$
- $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) =$
  $= (a + c, b + d) + (e, f) =$
  $= ((a + c) + e, (b + d) + f) =$
  $= (a + (c + e), b + (d + f)) =$
  $= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$
- $(a, b) \times [(c, d) + (e, f)] =$
  $= (a, b) \times (c + e, d + f) =$
  $= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) =$
  $= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) =$
  $= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) =$
  $= (a, b) \times (c, d) + (a, b) \times (e, f)$

Portanto, a operação $+$ é comutativa e associativa e a operação $\times$ é distributiva, relativamente à operação $+$.

3 Tem-se, para qualquer (a, b) pertencente a $\mathbb{R}^2$, $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) =$
$= (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

Portanto, $(0, 0)$ é efetivamente elemento neutro da operação $+$.

4

a) -2 **b)** 7 **c)** 3 **d)** 1
e) -6 **f)** 0 **g)** 0 **h)** 5

5 $-7 + 8i$

6 Números reais: z_5 e z_8

Números imaginários: z_1, z_2, z_3, z_4, z_6 e z_7

Números imaginários puros: z_2, z_3 e z_6

7 $x = 1$ e $y = 2$

8 $2 - 4i$

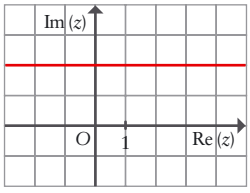
9 $8 + 34i$

10 $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -3 + 3i$; $z_3 = -1 - 3i$; $z_4 = 1 - 2i$; $z_5 = -2$; $z_6 = i$

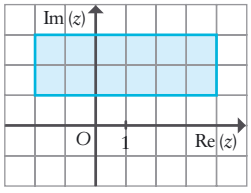
11 z_2

12

a)



b)



13 $2 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 4 \wedge -3 \leqslant \text{Im}(z) \leqslant -1$

2. Operar com números complexos

14

a) $1-5i$ b) $2+3i$

c) $-1-i$ d) $-4+3i$

e) 6 f) $5i$

15 $12-33i$

16 $-2\sqrt{3}-2i$

17

a) 7 b) 1 c) 2

18

a) 13 b) 2 c) $\sqrt{29}$

19 $4-3i$

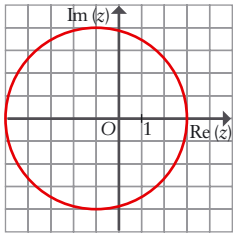
20 $(z+i)(\bar{z}-i) = (z+i)(\bar{z}+\bar{i}) =$

$= (z+i)\overline{(z+i)} = |z+i|^2$

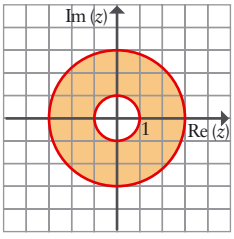
21 $3\sqrt{3}+3i$

22

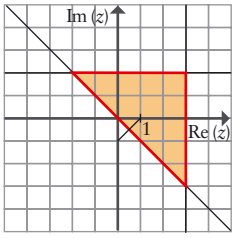
a)



b)



c)



23

a) $-i$ b) $-\frac{1}{3}i$ c) $\frac{1}{2}i$

d) $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$ e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

24 $\frac{1}{2}$

25

a) $\frac{16}{29}-\frac{11}{29}i$

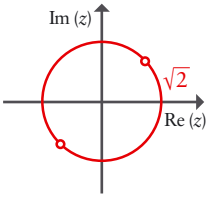
b) $\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$

c) $\frac{48}{25}+\frac{36}{25}i$

d) $\frac{498}{169}+\frac{553}{169}i$

e) $\frac{12}{25}+\frac{8}{25}i$

26



3. Forma trigonométrica de um número complexo

27

a) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ (por exemplo)

b) π, $-\pi$ e -3π (por exemplo)

c) $\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

28

a) 1 b) $-i$ c) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

29 $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = \frac{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta} =$

$= \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta) = e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha - i\beta}$

30

a) $6e^{i\frac{3\pi}{2}}$ b) $7e^{i0}$ c) $9e^{i\frac{\pi}{2}}$

d) $12e^{i\pi}$ e) $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ f) $\sqrt{50}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$

31

a) 10 b) $5i$ c) $-3-\sqrt{3}i$

32

a) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

c) $\sqrt{24}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ d) $\sqrt{29}\,e^{i\left(\text{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right)+\pi\right)}$

33 $\rho = 2$ e $\alpha = \frac{23\pi}{3}$

34

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{2}$

c) π d) $-\frac{2\pi}{3}$

35 4

36 $2\sqrt{3}$

37

a) $2e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$ b) $e^{i\frac{3\pi}{7}}$

c) $2e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}\right)}$ d) $e^{i\frac{4\pi}{7}}$

38

a) $-24+0i$ b) $-3+3i$

39 $23-14i$

40

a) $0+4i$ b) $2+2\sqrt{3}i$

41 $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$

42 $\rho = 1$; $\theta = \frac{\pi}{6}$

43 $2\sqrt{3}+2i$

44 $\rho = 2$; $\theta = \frac{11\pi}{24}$

45

$z^n + \frac{1}{z^n} = (e^{-i\alpha})^n + \frac{1}{(e^{-i\alpha})^n} = e^{-in\alpha} + e^{in\alpha} =$

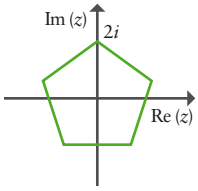
$= \cos(-n\alpha) + i\,\text{sen}(-n\alpha) + \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha) =$

$= \cos(n\alpha) - i\,\text{sen}(n\alpha) + \cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha) =$

$= 2\cos(n\alpha)$

4. Raízes de um número complexo

46 $2e^{i\frac{\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{10}}$



47

a) $\sqrt{2}e^{i\frac{29\pi}{18}}$ **b)** $16\sqrt{2}i$

48

a) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

b) 0, 1, i, -1, $-i$

c) $2i$, $-\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}-i$

49 $-2+3i$, $2-3i$

50

a) $1-4i$, $1+4i$

b) 0, $3-2i$, $3+2i$

c) $-2i$, $2i$, -3, 3

51 $3-2i$ e $3+2i$

Teste 3

5+5

Págs. 156 e 157

Grupo I

1. **(A)**

2. **(B)**

3. **(A)**

4. **(B)**

5. **(C)**

Grupo II

1. **a)** Como D_f é limitado, só podem existir assíntotas verticais. As retas de equações $x=-\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são as únicas assíntotas verticais ao gráfico de f.

b) Tem-se $f'(x)=\left(\frac{2-\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'=$

$=\frac{(2-\operatorname{sen}x)'\cos x-(\cos x)'(2-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=$

$=\frac{(-\cos x)\cos x-(-\operatorname{sen}x)(2-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=$

$=\frac{-\cos^2 x+\operatorname{sen}x(2-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=$

$=\frac{-\cos^2 x+2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=$

$=\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}=$

$=\frac{2\operatorname{sen}x-(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)}{\cos^2 x}=$

$=\frac{2\operatorname{sen}x-1}{\cos^2 x}$

c) $y=-x+2$

d) f é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ e é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

A função tem mínimo absoluto para $x=\frac{\pi}{6}$ e tem-se $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

e) O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e não tem pontos de inflexão.

2. $\approx 3{,}54$ gramas

3. **a)** $1-i$

b) $\rho=\sqrt{2}$ e $\alpha=-\frac{13\pi}{12}$

4. **a)** $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

b) $-9+46i$

5. Tem-se $w=\bar{z}$, pelo que $\left|\frac{z}{w}\right|=\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=\frac{|z|}{|\bar{z}|}=1$.

52

a) $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ **b)** $6+8i$

c) $-2-2i$ **d)** $-24-5i$

e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ **f)** $-2i$

g) $2+i$ **h)** $2-\frac{2}{3}i$

53 $p=-\frac{2}{5}$; $q=\frac{6}{5}$

54 $a=3$ e $b=1$

55 $a=-2$ e $b=2$

56

a) $4+2i$

b) $-972+972i$

c) $11-i$

57

a) $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ **b)** $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **c)** $e^{i\frac{13\pi}{10}}$

58 $-1-i$

59 $3e^{i\frac{\pi}{3}}$

60 4

61 $\frac{5\pi}{4}$

62 -1

63 $\sqrt{3}$

64 $a=\frac{\pi}{2}$ e $b=-1$

65 $\frac{\pi}{10}$

66 $\frac{11\pi}{24}$

67 10

68 4

69

a) $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $w=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

c) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

70 Tem-se:

$|z-1|=|e^{2i\alpha}-1|=|\cos(2\alpha)+i\operatorname{sen}(2\alpha)-1|=$

$=|\cos(2\alpha)-1+i\operatorname{sen}(2\alpha)|=$

$=\sqrt{(\cos(2\alpha)-1)^2+\operatorname{sen}^2(2\alpha)}=$

$=\sqrt{\cos^2(2\alpha)-2\cos(2\alpha)+1+\operatorname{sen}^2(2\alpha)}=$

$=\sqrt{2-2\cos(2\alpha)}=\sqrt{2-2(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}=$

$=\sqrt{2-2\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha}=$

$=\sqrt{2(1-\cos^2\alpha)+2\operatorname{sen}^2\alpha}=$

$=\sqrt{2\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{4\operatorname{sen}^2\alpha}=2|\operatorname{sen}\alpha|=$

$=2\operatorname{sen}\alpha$ (note-se que, como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\operatorname{sen}\alpha>0$)

71 $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1+e^{2i\alpha}}=$

$=\frac{1}{1+\cos(2\alpha)+i\operatorname{sen}(2\alpha)}=$

$=\frac{1+\cos(2\alpha)-i\operatorname{sen}(2\alpha)}{[1+\cos(2\alpha)]^2+\operatorname{sen}^2(2\alpha)}=$

$=\frac{1+\cos(2\alpha)-i\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+2\cos(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)+\operatorname{sen}^2(2\alpha)}=$

$=\frac{1+\cos(2\alpha)-i\operatorname{sen}(2\alpha)}{2+2\cos(2\alpha)}=$

$=\frac{1+\cos(2\alpha)-i\operatorname{sen}(2\alpha)}{2[1+\cos(2\alpha)]}=$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\cos(2\alpha)-i\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}-i\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}\right]=$

$=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(1-i\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)=$

$=\frac{1}{2}(1-i\operatorname{tg}\alpha)$

72

a) A condição $|z| = |z - 3i|$ define, no plano de Argand, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são a origem do referencial e o ponto de coordenadas $(0, 3)$. Esta mediatriz tem equação $y = \frac{3}{2}$. Portanto, todos os números complexos que verificam a condição $|z| = |z - 3i|$ têm parte imaginária igual a $\frac{3}{2}$.

b) Tem-se $z = x + \frac{3}{2}i$, com $x > 0$. Portanto,

$|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{4} = 9 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Logo, sendo $\theta = \text{Arg}(z)$, tem-se $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pelo que, como o afixo de z está no primeiro quadrante, se tem $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$.

73 $|z|^2 + |w|^2 - |z - w|^2 =$

$= z\bar{z} + w\bar{w} - (z - w)\overline{(z - w)} =$

$= z\bar{z} + w\bar{w} - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) =$

$= z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}) =$

$= z\bar{w} + \bar{z}w$

74 $\bar{z}^3 + z = (e^{-i\alpha})^3 + e^{i\alpha} = e^{-3i\alpha} + e^{i\alpha} =$

$= e^{-i\alpha}(e^{-2i\alpha} + e^{2i\alpha}) =$

$= e^{-i\alpha}[\cos(-2\alpha) + i\,\text{sen}(-2\alpha) + \cos(2\alpha) +$
$+ i\,\text{sen}(2\alpha)] =$

$= e^{-i\alpha}[\cos(2\alpha) - i\,\text{sen}(2\alpha) + \cos(2\alpha) +$
$+ i\,\text{sen}(2\alpha)] =$

$= 2\cos(2\alpha)\,e^{-i\alpha}$

75 $1 + z + z^2 = 1 + e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^2 = 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} =$

$= 1 + \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos(2\alpha) + i\,\text{sen}(2\alpha) =$

$= 1 + \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha +$
$+ i\,2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha =$

$= \cos\alpha + 2\cos^2\alpha + i(\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) =$

$= \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha(1 + 2\cos\alpha) =$

$= (1 + 2\cos\alpha)(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = (1 + 2\cos\alpha)\,e^{i\alpha}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $1 + 2\cos\alpha > 0$, pelo que $(1 + 2\cos\alpha)\,e^{i\alpha}$ é a forma trigonométrica de $1 + z + z^2$.

Portanto, α é o argumento de $1 + z + z^2$.

76 Tem-se $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e

$w = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha$

Portanto,

$z + w = (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha) + i(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, tem-se $\text{sen}\,\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\cos\alpha > \text{sen}\,\alpha$, pelo que $\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha > 0$ e $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha > 0$.

Logo, o afixo de $z + w$ pertence ao primeiro quadrante, pelo que $\text{Arg}(z + w) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

77 5

78 $-\frac{\pi}{2} - \alpha$

79 $3 + 4i$

80

a) 5

b) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$; $w = 3\sqrt{3} - 3i$

81

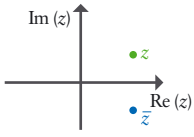
a) Tem-se $w = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^5 = 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Portanto, $Z\hat{O}W = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

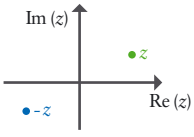
b) 4

82

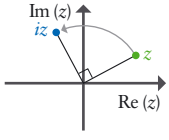
a)



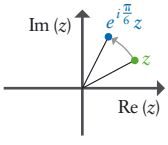
b)



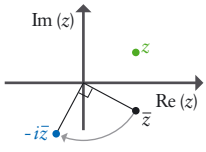
c)



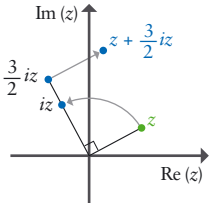
d)



e)

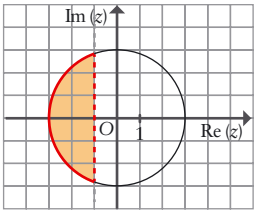


f) $\left(1 + \frac{3}{2}i\right)z = z + \frac{3}{2}iz$

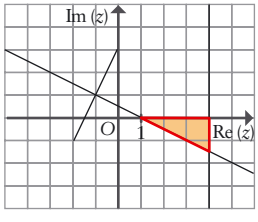


83

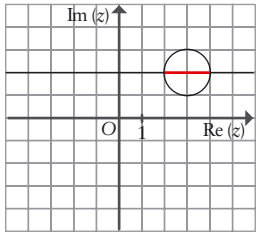
a)



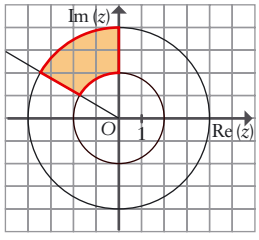
b)



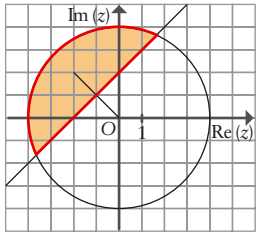
c)



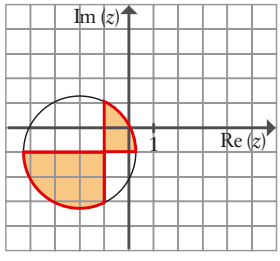
d)



e)



f)



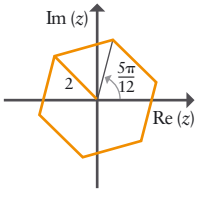
84

$|z - (3 + 4i)| \leqslant 5 \wedge |z| \geqslant |z - (3 + 4i)| \wedge \text{Re}(z) \leqslant 0$

85

a) $2e^{i\frac{\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

b)



c) Perímetro: 12; Área: $6\sqrt{3}$.

86 12

87 Apresentamos duas resoluções.

• z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo se e só se tiverem o mesmo módulo e a diferença entre um argumento de w e um argumento de z for um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{5}$.

Tem-se $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Portanto, $|z| = |w| = \sqrt{2}$ e

$\frac{21\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{20} - \frac{5\pi}{20} = \frac{16\pi}{20} = \frac{4\pi}{5} = 2 \times \frac{2\pi}{5}$

Logo, z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo.

• z e w são raízes quintas de um mesmo número complexo se e só se $z^5 = w^5$.

$z^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $w^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\frac{21\pi}{4}}$; dado que $\frac{21\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 2 \times 2\pi$, conclui-se que $z^5 = w^5$.

88 $18 - 26i$

89 $-3 + 2i$, $-2 - 3i$, $3 - 2i$

90 $-4 - 3i$ e $4 + 3i$

91 $2e^{i\frac{\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{10}}$, $2e^{i\frac{17\pi}{10}}$

92 2, $-1 + \sqrt{3}i$, $-1 - \sqrt{3}i$

93 $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}$

94 0, -2, $1 - \sqrt{3}i$, $1 + \sqrt{3}i$

95 -1, 0, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

96 0, 1, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$

97 $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

98

a) $-2i$ e $2i$ b) $-3i$ e $3i$
c) $3 - 2i$ e $3 + 2i$ d) 0, $-5i$ e $5i$
e) 1, $1 - i$ e $1 + i$ f) -2, 2, $-5i$ e $5i$

99

a) $8e^{-i\frac{\pi}{2}}$ b) 0 c) 4

100 $4 - 3i$ e $4 + 3i$

+ Exercícios Propostos

101 (D) **102** (B) **103** (C) **104** (C)
105 (D) **106** (C) **107** (A) **108** (D)
109 (A) **110** (C) **111** (D) **112** (C)
113 (D) **114** (B) **115** (C) **116** (A)
117 (C) **118** (B) **119** (B) **120** (A)
121 (B) **122** (D) **123** (B) **124** (B)
125 (A) **126** (C) **127** (B) **128** (B)
129 (A) **130** (B) **131** (B) **132** (C)
133 (B) **134** (B) **135** (B) **136** (D)
137 (B) **138** (C) **139** (D) **140** (D)
141 (C) **142** (B)

143

a) $t = 0$ b) $t = -1$
c) $t = 1$ d) $t = 5 \vee t = -5$
e) $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

144 $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

145 z é imaginário puro $\Longrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \text{tg}^2 x = 8 \Longrightarrow 2 - \frac{\text{tg}^2 x}{4} = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow z_1$ é real

146

a) $z = \pm\sqrt{10}i$
b) $z = 1 \pm \sqrt{3}i$
c) $x = 3 \vee x = -3 \vee x = 3i \vee x = -3i$
d) $x = 0 \vee x = 3 + i \vee x = 3 - i$
e) $z = 0 \vee z = \pm\sqrt{2}i$
f) $z = 4 + 3i \vee z = 4 - 3i$
g) $x = 1 \vee 4x^2 - 4x + 17 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2} \pm 2i$

147

a) $x = \frac{3}{2} \wedge y = 1$
b) $x = 1 \wedge y = 4$

148

a) $8 + 2i$ b) $3 - 2i$ c) -9
d) $(-2\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3})i$
e) $\cos(2x) + i\,\text{sen}(2x)$

149

a) $x = -2 \wedge y = 3$
b) $x = -21 \wedge y = 3$
c) $(x = 1 \vee x = -1) \wedge y = -1$
d) $(x = 2 \wedge y = 6) \vee (x = -1{,}2 \wedge y = -10)$

150 $b = -2 \wedge a = -\frac{4}{9}$

151

a) $3 + yi, y \in \mathbb{R}$ b) $-\frac{5}{2} + yi, y \in \mathbb{R}$

152 $-a + bi$

153

a) $-1 + i$ b) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$
c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ d) $\frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$
e) $2 + 3i$ f) $-\frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$
g) $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

154 $(x = 2 \wedge y = -1) \vee (x = -2 \wedge y = 1)$

155

a) $\frac{19}{6} - \frac{19}{6}i$ b) $-4 - 4i$
c) -1 d) $-1 - i$
e) $3 + 3i$

156

a) $z = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$
b) $z = 1 + i \vee z = 1 - i$
c) Substituir z por $x + yi$
$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \vee z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

157

a) $|a| = |b|$, $a \neq 0$
b) $|ab| = 2{,}5$
c) $|a| + |b| = \frac{p}{4}$

158

a) $a = 2b$ b) $b = 3a$

159

$D = C + \overrightarrow{BA} = -5i + (3 + 2i) - (-3 - 2i) = 6 - i$

160 $2 - i$, $2 + i$, $-2 + i$, $-2 - i$, $\sqrt{5}i$, $-\sqrt{5}$

161

a) $b = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $\left(b = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge a = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vee$
$\vee \left(b = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge a = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
c) $a = 2 \wedge b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

162 $a = 2$

163 $a = -2$

164 $x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2[$

165

a) $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$
b) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

166 $z - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$

167 $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + \sqrt{3}\,i$ e

$(1 - 2i\sqrt{3})(-1 + \sqrt{3}\,i) - 5 - 3i\sqrt{3} = 0$.

É verdade.

168 $e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

169

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

170

a) $-\frac{\pi}{5} - \frac{49\pi}{5} = -10\pi = -5 \times 2\pi$

b) $-\frac{17\pi}{8} - \left(-\frac{113\pi}{8}\right) = 12\pi = 6 \times 2\pi$

171

a) $\rho = 2 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\rho = \sqrt[4]{2} \wedge \theta = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\rho = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

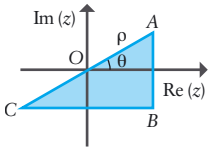
172 $\overline{AB} = 2\rho \operatorname{sen}\theta$;

$\overline{CB} = 2\rho\cos\theta$

Área $[ABC]$ =

$= \frac{2\rho^2 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2} =$

$= \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)$



173

a) $e^{i\pi}$

b) Por exemplo, $w = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ ou $w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

c) $\sqrt{3}$

174

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = \frac{-3\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3\sqrt{3}+3}{4}i$

b) $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

175 $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

176 $e^{i\pi}$

177

a) $|z| = \sqrt{\operatorname{tg}\theta + 1} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta}} = \frac{1}{|\cos\theta|}$

b) $\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

178 $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

179

a) $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$

b) $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

180

a) $\sqrt{3} - 63i$

b) $\frac{3}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $n = 24$

181 $a = 2 \wedge b = 8$

182

a) $|z_1| = 1 \Longrightarrow |z_2| = 1$; Como $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{OA} = \overline{OB}$, o triângulo $[AOB]$ é equilátero.

b) $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

183 $\frac{\left(e^{i(-\alpha)}\right)^3}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} = e^{i\left(-3\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = e^{i\left(-2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(-2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$

184

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$;

$\forall n \in \mathbb{N}$, o número $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ tem a imagem sobre os eixos.

b) $n = 4$

185

a) $z^3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Longleftrightarrow z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{9}} \vee$

$\vee\, z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{8\pi}{9}} \vee z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{14\pi}{9}}$

b) $n = 3 + 6k, k \in \mathbb{N}_0$

186

a) $B \curvearrowright 2e^{i\frac{5\pi}{24}}$ $C \curvearrowright 2e^{i\frac{37\pi}{24}}$

b) $w = 64e^{i\frac{5\pi}{4}} = -32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\,i$

187

a) $\frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 - \sqrt{3}\,i} =$

$= \frac{(\sqrt{3} + 3i)(3 + \sqrt{3}\,i)}{9 + 3} = \frac{12i}{12} = i$

b) O perímetro é $4\sqrt{2}$.

c) $w = i^6 = -1$

188

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) $w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \vee w = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} \Longleftrightarrow w = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

189

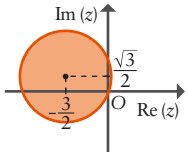
a) $5e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$

b) $(a + bi)^2 = 3 - 4i \Longleftrightarrow (a = 2 \wedge b = -1) \vee$

$\vee\, (a = -2 \wedge b = 1)$; $2 - i$ e $-2 + i$

c) $z = 0 \vee z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$

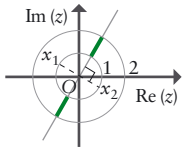
190 Círculo de centro no afixo de z_1 e que passa na origem.



191

a) Substituindo x por x_1 e substituindo x por x_2 na equação dada obtêm-se afirmações verdadeiras.

b)



192

a) $P = \frac{2}{{}^6C_3} = \frac{1}{10}$

b) $w = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$

c) $\left|\frac{3}{2}e^{i\pi} - \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right| = \left|-\frac{3}{2} + 1 - i\right| = \left|-\frac{1}{2} - i\right| =$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} > 1$

d) $\left|z - \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

193

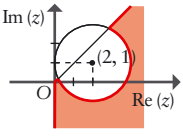
a) $|z - 1 + 2i| > 3$

b) $\frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - \sqrt{3}\,i} = 2i$ e

$|2i - (1 - 2i)| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} > 3$

194 $|z - 2 - i| \geqslant 2 \wedge$

$\wedge\, -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}(z) \leqslant \frac{\pi}{4}$



195

a) $(-1 + 2i)^2 = -3 - 4i$

b) $z_1 z_2 = 3\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $n = 4$

c) Circunferência de centro em $(-1, -1)$ e raio 3.

196 $1 \leqslant |z| \leqslant 2 \wedge |z| \geqslant |z + 1 + i|$

197

a) Tem de ser $a<0 \wedge b>-a \wedge \sqrt{a^2+b^2}<6$

Exemplos:

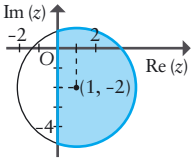
$a=-1$ e $b=3$; $a=-3$ e $b=5$;

$a=-1$ e $b=-5$.

b₁) $-\frac{9}{5}+\frac{13}{5}i$

b₂) $|2z+w| \leqslant 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|z+\frac{w}{2}\right| \leqslant 3$

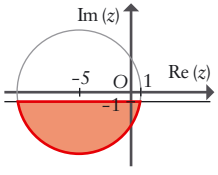


198

a) $10x+x^2+y^2 \leqslant 11 \Leftrightarrow (x+5)^2+y^2 \leqslant 36$

As duas condições definem o círculo de centro $(-5, 0)$ e raio 6.

b) $(z-\bar{z})i \geqslant 2 \Leftrightarrow -2y \geqslant 2 \Leftrightarrow y \leqslant -1$



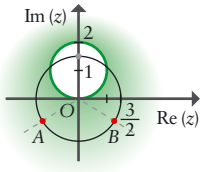
199 Sendo $z=x+yi$:

a) $2y \leqslant x^2+y^2 \wedge z^3=-\frac{27}{8}i \Leftrightarrow$

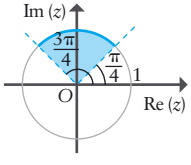
$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 \geqslant 1 \wedge$

$\wedge \left(z=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \vee z=\frac{3}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} \vee z=\frac{3}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}\right) \Leftrightarrow$

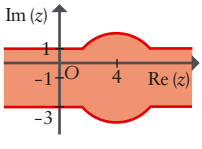
$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} \vee z=\frac{3}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$



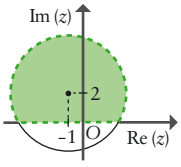
b) $x^2+y^2 \leqslant 1 \wedge \frac{\pi}{4}<\text{Arg}(z)<\frac{3\pi}{4}$



c) $|y+1| \leqslant 2 \vee |z-(4-i)| \leqslant 3$



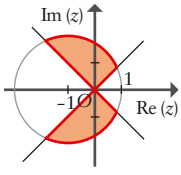
d) $|z-(-1+2i)|<4 \wedge y>0$



200 É a mediatriz do segmento $[AB]$ com $A(-2, 3)$ e $B(0, 6)$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $y=-\frac{2}{3}x+\frac{23}{6}$.

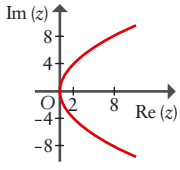
201 Sendo $z=x+yi$:

a) $|z-(-1)| \leqslant 2 \wedge y^2 \geqslant x^2$



b) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2+x \Leftrightarrow$

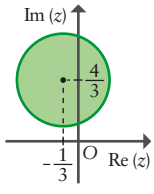
$\Leftrightarrow y^2=8x \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2x}$



c) $\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geqslant 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \geqslant 4\left(x^2+(y-1)^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2 \leqslant \frac{8}{9}$



202

a) $|z-5-2i|=|z-1-4i|$; $y=2x-3$

b) $x=y \wedge y=2x-3 \wedge x>0 \Leftrightarrow x=3$

$P(3, 3)$

203

a) $0 \leqslant \text{Arg}(z-1-2i) \leqslant \frac{\pi}{4} \wedge |z-1-2i| \leqslant 3$

b) $\frac{\pi}{3} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6} \wedge |z-4i| \geqslant |z|$ ou

$\frac{\pi}{3} \leqslant \text{Arg}(z) \leqslant \frac{5\pi}{6} \wedge \text{Im}(z) \leqslant 2$

c) $|z-2-2i| \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant \text{Arg}(z+2) \leqslant \frac{\pi}{4} \wedge$

$\wedge \frac{\pi}{4} \leqslant \text{Arg}(z-2) \leqslant \pi$

d) $\left|z-\sqrt{12}\right|+\left|z+\sqrt{12}\right|=8$

PARA O ALUNO

- **Manual do Aluno (3 volumes)**
- **Caderno de Exercícios**
- **Simulador de Exames**
- **Apoio Internet** www.mat12.te.pt

2.0 AULA DIGITAL ALUNO

PARA O PROFESSOR (EXCLUSIVO)

- **Manual do Professor (3 volumes)**
- **Resoluções dos Exercícios do Manual**
- **Resoluções dos Exercícios do Caderno de Exercícios**
- **Caderno de Apoio ao Professor**
- **Apoio Internet** www.mat12.te.pt

2.0 AULA DIGITAL PROFESSOR Online Offline Tablet

Recomenda-se a utilização conjunta do Manual e do Caderno de Exercícios para facilitar a aprendizagem e contribuir para o sucesso escolar. Estes materiais podem, no entanto, ser vendidos separadamente.

Este manual é composto por três volumes, que não podem ser vendidos separadamente.

Para registo na base de dados do Ministério da Educação deve ser inserido o ISBN da edição do aluno: 978-972-47-5485-7

AMOSTRA NÃO COMERCIALIZÁVEL

De acordo com o artigo 21.º da Lei n.º 47/2006, de 28 de agosto, este exemplar destina-se ao órgão da escola competente para a adoção de manuais escolares.

LeYa www.leya.com
Texto www.texto.pt
978-111-11-4409-8
9 781111 144098
IVA INCLUÍDO 6%
€40,85

acordo ortográfico

LeYa EDUCAÇÃO
www.leyaeducacao.com